Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПЛИТ, ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

О. М. Сапонджян

(Ереван)

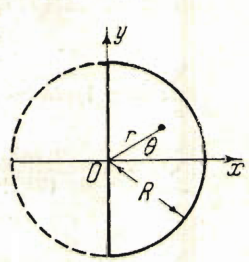
Метод дополнительных воздействий заключается в следующем: предварительно строится общее решение рассматриваемой задачи, которое отражает разрыв непрерывности внутренних сил и перемещений по некоторой линии. Подходящим выбором параметров разрывных величин можно удовлетворить заданным условиям. При этом задача распадается либо на две самостоятельные части, либо приводится к задаче в одной области при наличии вдоль указанной линии или ее некоторой части дополнительных условий, например разреза, защемления, свободного опирания, совместной работы с упругой балкой и т. д.

По идее метод дополнительных воздействий близок методу фиктивных нагрузок, предложенному Ю. В. Репманом [1], и методу компенсирующих нагрузок, разработанному Б. Г. Кореневым [2].

§ 1. Изгиб заделанной по всему контуру полукруглой плиты при равномерно распределенной нагрузке. Расположим ось x по оси симметрии полукруга, а ось y по диаметру, как показано на фиг. 1.

Дополним (пунктиром) этот полукруг до круга и рассмотрим последний как плиту, назвав ее вспомогательной круглой плитой. На площади вспомогательной плиты приложим равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью p, а вдоль линии, разделяющей правый и левый полукруги, — поперечные силы интенсивностью

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} q_{2n} y^{2n} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Решение задачи для вспомогательной круглой плиты под действием нагрузки p и q и при условии заделки по всему ее контуру можно представить так:

$$w = \frac{pr^4}{64D} + \sum_{0}^{\infty} (a_{2n} r^{2n} + b_{2n} r^{2n+2}) \cos 2n\theta \pm$$

$$\pm \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_{2n}}{n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+3} \left[\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} + \frac{\cos(2n+3)\theta}{2n+3}\right] \tag{1.2}$$

где w — прогиб, D — жесткость, r, θ — полярные координаты, R — радиус круга; из двойных знаков верхний относится к области $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, а нижний к области $\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$

$$c_{2n} = \frac{q_{2n} R^{2n+3}}{16 D} \tag{1.3}$$

$$a_0 = \frac{8}{\pi} \sum_0^\infty \frac{c_{2k}}{(2k+1)(2k+3)^2} + \frac{pR^4}{64 D}, \quad b_0 = -\frac{8}{\pi R^2} \sum_0^\infty \frac{c_{2k}}{(2k+1)^2(2k+3)} - \frac{pR^4}{32 D} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} a_{2n} = \frac{16(-1)^n}{\pi R^{2n}} \sum_{k=0}^\infty \frac{c_{2k}}{(2k+1+2n)(2k+3-2n)(2k+3+2n)} \\ b_{2n} = -\frac{16(-1)^n}{\pi R^{2n+2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{c_{2k}}{(2k+1-2n)(2k+1+2n)(2k+3+2n)} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Параметры $c_{2n}\,(q_{2n})$ можно определить из условий заделки прямолинейного края полукруглой плиты:

$$w\left(y, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)_{\theta=\pm\frac{1}{2}\pi} = 0 \tag{1.6}$$

В силу симметрии второе условие удовлетворяется тождественно. Из первого после подстановки в него (1.2) получим

$$a_0 = 0, \qquad a_2 - b_0 = 0, \qquad a_4 - b_2 = -\frac{p}{64 D} \tag{1.7}$$

$$a_{2n} - b_{2n-2} = 0 \qquad (n = 3, 4, \ldots) \tag{1.8}$$

Внеся сюда (1.4), (1.5), приходим к бесконечным системам уравнений:

$$\sum_0^\infty \frac{c_{2k}}{(2k+1)(2k+3)^2} = -\frac{p\pi R^4}{512 D} \tag{1.9}$$

$$\sum_0^\infty \frac{(2k-3)\, c_{2k}}{(2k+1)^2(2k+3)(2k+5)} = \frac{p\pi R^4}{256 D} \tag{1.10}$$

$$\sum_0^\infty \frac{c_{2k}}{(2k-1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)} = \frac{p\pi R^4}{4096 D} \tag{1.11}$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{c_{2k}}{(2k-2n+3)(2k+2n-1)(2k+2n+1)(2k+2n+3)} = 0 \quad (n=3, 4, \ldots) \tag{1.12}$$

Из этих уравнений можно с желаемой точностью определить коэффициенты $c_0, c_2, c_4, \ldots$, а затем из (1.4), (1.5) найти коэффициенты a_{2n} и b_{2n}. Таким образом, будет построено решение поставленной задачи. Заметим, что систему (1.9) — (1.12) можно привести к регулярному виду.

Для быстрого достижения желаемой точности выражение (1.2) удобно представить в другом виде; пользуясь равенствами (1.7), (1.8), исключим из (1.2) коэффициенты b_{2n}.

Тогда для прогиба получим при $-{}^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$

$$w = \frac{pr^4}{64\,D}(1+\cos 2\theta) + a_2 r^2 (1+\cos 2\theta) + \sum_2^\infty a_{2n} r^{2n} [\cos 2n\theta + \cos(2n-2)\theta] +$$

$$+ \sum_0^\infty \frac{(-1)^n c_{2n}}{n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+3} \left[\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} + \frac{\cos(2n+3)\theta}{2n+3}\right] \tag{1.13}$$

Выражение (1.2) при наличии (1.4), (1.5) точно удовлетворяет контурным условиям дугового края полукруга независимо от точности определения коэффициентов c_{2n}.

Выражение же (1.13) точно удовлетворяет условиям прямолинейного края независимо от точности определения коэффициентов c_{2n} и a_{2n}. Поэтому при определении расчетных величин дугового края следует применить выражение (1.2), а при определении указанных величин прямолинейного края — выражение (1.13).

Приводим выражения для расчетных величин.

1. *Изгибающий момент на прямолинейном крае*

$$M^-\left(y, \pm\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{py^2}{16} - 4Da_2 - 4D\sum_2^\infty (-1)^n (2n-1)\, a_{2n} y^{2n-2}$$

При $y = 0$

$$M^-_{\max} = -4Da_2 \tag{1.14}$$

2. *Изгибающий момент на дуговом крае*

$$M^\circ(R, \theta) = -\frac{pR^2}{4} - 4D\sum_0^\infty (2n+1)\, b_{2n} R^{2n} \cos 2n\theta -$$

$$-\frac{8D}{R^2}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{c_{2n}}{2n+1} \cos(2n+1)\theta \tag{1.15}$$

3. *Опорная реакция на прямолинейном крае*

$$Q^-\left(y, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 8D\sum_0^\infty \frac{c_{2n}}{R^{2n+3}}\, y^{2n} \tag{1.16}$$

При $y = 0$

$$Q^-_{\max} = \frac{8D}{R^3} c_0 \tag{1.17}$$

4. *Опорная реакция на дуговом крае*

$$Q^\circ(R, \theta) = -\frac{pR}{2} - 4D\sum_0^\infty 2n(2n+1)\, b_{2n} R^{2n-1} \cos 2n\theta -$$

$$-\frac{8D}{R^3}\sum_0^\infty (-1)^n c_{2n} \cos(2n+1)\theta$$

При $\theta = 0$

$$Q^\circ(R, 0) = -\frac{pR}{2} - 4D\sum_0^\infty 2n(2n+1)\, b_{2n} R^{2n-1} - \frac{8D}{R^3}\sum_0^\infty (-1)^n c_{2n} \tag{1.18}$$

При $c_4 = c_6 = \ldots = 0$ в первом приближении из (1.14) и (1.17) имеем

$$M^-_{\max} = -0.07317\, pR^2, \qquad Q^-_{\max} = -0.49836\, pR$$

Во втором приближении полагаем $c_6 = c_8 = \ldots = 0$, тогда

$$M^-_{\max} = -0.07312\, pR^2, \qquad Q^-_{\max} = -0.49716\, pR$$

Пользуясь третьим приближением ($c_8 = c_{10} = \ldots = 0$), найдем

$$M^-_{\max} = -0.07312\, pR^2, \qquad Q^-_{\max} = -0.49705\, pR$$

Первое приближение по сравнению со вторым дает погрешность 0.08% для момента $M^-_{\max}$ и 0.26% для опорной реакции $Q^-_{\max}$. Полагая $c_6 = c_8 = \ldots = 0$, из (1.15) и (1.18) найдем

$$M^\circ(R, 0) = -0.05845\, pR^2, \qquad Q^\circ(R, 0) = -0.41787\, pR$$

а при $c_8 = c_{10} = \ldots = 0$ получим

$$M^\circ(R, 0) = -0.05842\, pR^2, \qquad Q^\circ(R, 0) = -0.41230\, pR$$

Первый результат по сравнению со вторым дает погрешность 0.05% для момента $M^\circ(R, 0)$ и 1.4% для опорной реакции $Q^\circ(R, 0)$.

Наконец, из (1.13) найдем прогиб в точке $r = {}^1/_2 R$, $\theta = 0$.

В первом приближении ($c_4 = c_6 = \ldots = 0$) имеем

$$w\left(\frac{R}{2}, 0\right) = 0.001997 \frac{pR^4}{D}$$

При втором приближении ($c_6 = c_8 = \ldots = 0$)

$$w\left(\frac{R}{2}, 0\right) = 0.002021 \frac{pR^4}{D}$$

Погрешность равна 1.2%.

Для случая полукруглой плиты, заделанной по дуговому краю и опертой по прямолинейному краю, Б. Г. Галеркин [3] нашел

$$M^\circ(R, 0) = -0.0756\, pR^2, \quad Q^\circ(R, 0) = -0.424\, pR, \quad w\left(\frac{R}{2}, 9\right) = 0.0034 \frac{pR^4}{D}$$

§ 2. Изгиб полукруглой плиты свободной (от опор) по прямолинейному краю. Рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки p по всей площади полукруга и равномерно распределенных вдоль прямолинейного края изгибающих моментов m и поперечных сил q. Задачу решаем также с помощью вспомогательной круглой плиты. В этом случае, кроме дополнительных поперечных сил q, приходится вдоль линии $\theta = \pm {}^1/_2 \pi$ приложить изгибающие моменты. Это приводит к двум совместным системам бесконечных уравнений относительно параметров поперечных сил и изгибающих моментов, т. е. приводит к усложнению решения.

Однако эффективное решение задачи можно получить следующим путем. Примем, что при переходе из области $-{}^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$ в область $^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^3/_2\pi$ через линии $\theta = \pm {}^1/_2\pi$ угол наклона упругой поверхности

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

претерпевает разрыв, который представим в виде

$$\sum_0^\infty \beta_{2n} y^{2n}$$

Далее будем предполагать, что при том же переходе через линию $\theta = \pm {}^1/_2\pi$ обобщенная перерезывающая сила

$$Q = -D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + (1-\sigma)\left(-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\theta}\right)\right]$$

претерпевает разрыв на величину $2q$, а изгибающий момент

$$(M^-)_{\theta=\pm\frac{1}{2}\pi} = -D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]_{\theta=\pm\frac{1}{2}\pi}$$

принимает значение m.

Для простоты положим, что $q = \text{const}$ и $m = \text{const}$. Тогда для прогиба вспомогательной круглой плиты при действии p, $2q$ и при условии, что в сечении $\theta = \pm {}^1/_2\pi$ изгибающий момент имеет заданное значение m, получим

$$w = \frac{pr^4}{64D}\left(1 + \frac{1+3\sigma}{3\sigma}\cos 2\theta\right) + \frac{mr^2}{2D(1+\sigma)} \pm \frac{qr^3}{8D}\left(\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right) +$$
$$+ \sum_0^\infty a_{2n} r^{2n}\left[\cos 2n\theta + \frac{(1-\sigma)n}{(n-1)(1-\sigma)-1-\sigma}\cos(2n-2)\theta\right] \mp$$
$$\mp \sum_0^\infty (-1)^n \frac{[4+(1-\sigma)(2n+1)]\beta_{2n}}{8(2n+1)} r^{2n+1}\left[\cos(2n+1)\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\sigma)(2n+1)}{4+(1-\sigma)(2n-1)}\cos(2n-1)\theta\right] \qquad (2.1)$$

где из двойных знаков верхние относятся к области $-{}^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$, а нижние к области $^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^3/_2\pi$.

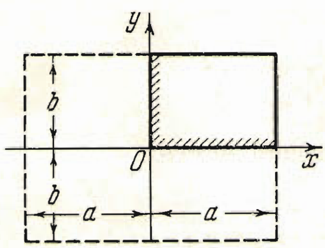
Полученное решение вспомогательного круга распадается на два решения, одно из которых соответствует правому полукругу, а другое левому, при этом на прямолинейных краях обоих полукругов действуют заданные изгибающие моменты m и поперечные силы $\pm q$, где плюс относится к правому, а минус к левому полукругу.

Подчинив решение (2.1) на окружности вспомогательного круга контурным условиям на дуговом крае, найдем коэффициенты a_{2n} и β_{2n}, а следовательно, и решение рассматриваемой полукруглой плиты. Заметим, что при подходящем выборе разрывных величин можно решить задачу об изгибе полукруглой плиты при любых условиях на контуре.

§ 3. Изгиб равномерно нагруженной прямоугольной плиты, заделанной по двум смежным краям и опертой по двум другим. Пусть плита (фиг. 2), опертая по краям $x=a$ и $y=b$ и заделанная по краям $x=0$ и $y=0$, находится под действием равномерной нагрузки p.

Рассмотрим вспомогательную прямоугольную плиту (фиг. 2) со сторонами $2a$ и $2b$ под действием равномерно распределенной нагрузки p и дополнительных поперечных сил $q_1(y)$ и $q_2(x)$ соответственно вдоль отрезков $x=0, -b \leqslant y \leqslant b$ и $y=0, \ -a \leqslant x \leqslant a$. При этом положим

$$q_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi}{2b}y, \qquad q_2(x)=\sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos\frac{m\pi}{2a}x \qquad (n, m=1, 3, \ldots) \tag{3.1}$$



Фиг. 2

Полагая вспомогательную плиту опертой по всему контуру, воспользуемся решением Навье. Для упругой поверхности имеем

$$w=\frac{1}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\right]^{-2}\times$$

$$\left[\frac{C_n}{a}+\frac{D_m}{b}-\frac{16(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{\pi^2 mn}p\right]\cos\frac{m\pi}{2a}x\cos\frac{n\pi}{2b}y$$

$$(n, m=1, 3, \ldots) \tag{3.2}$$

Чтобы получить решение нашей задачи, надо подчинить w условиям

$$w(0, y)=0, \qquad w(x, 0)=0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \tag{3.3}$$

Последние два условия в силу симметрии удовлетворяются тождественно, а первые два дают

$$\frac{2b^3}{\pi^3 n^3}\left[\operatorname{th}(a\lambda_n)-\frac{a\lambda_n}{\operatorname{ch}^2(a\lambda_n)}\right]C_n+\frac{1}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_m}{(\nu_m{}^2+\lambda_n{}^2)^2}=$$

$$=-\frac{64b^2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi}p\left\{\frac{b^2}{n^2}\left[1-\frac{1}{\operatorname{ch}(a\lambda_n)}\right]-\frac{\pi a^2}{4}\frac{\operatorname{th}(a\lambda_n)}{\operatorname{ch}(a\lambda_n)}\right\}(n, m=1, 3, \ldots) \tag{3.4}$$

$$\frac{2a^3}{\pi^3 m^3}\left[\operatorname{th}(b\nu_m)-\frac{b\nu_m}{\operatorname{ch}^2(b\nu_m)}\right]D_m+\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{(\nu_m{}^2+\lambda_n{}^2)^2}=$$

$$=-\frac{64a^2(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi}p\left\{\frac{a^2}{m^2}\left[1-\frac{1}{\operatorname{ch}(b\nu_m)}\right]-\frac{\pi b^2}{4}\frac{\operatorname{th}(b\nu_m)}{\operatorname{ch}(b\nu_m)}\right\}(n, m=1, 3, \ldots) \tag{3.5}$$

где

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{2b}, \qquad \nu_m=\frac{m\pi}{2a}$$

В случае квадратной плиты ($a=b$) имеем $D_m=C_m$ и (3.6)

$$\frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[\operatorname{th}\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{2\operatorname{ch}^2\frac{1}{2}n\pi}\right]C_n+\frac{2}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m}{(m^2+n^2)^2}=$$

$$=-\frac{8a(-1)^{(n-1)/2}}{\pi}p\left[\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}n\pi}\right)-\frac{\pi}{4}\frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}n\pi}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}n\pi}\right]$$

Последняя система регулярна; действительно, отделяя n-й член ряда, получим

$$C_n + 2\alpha_n \sum_{\substack{m=1,3,\ldots \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{C_m}{(m^2+n^2)^2} = \beta_n$$

где

$$\alpha_n = \frac{4n^3}{\pi}\left[\operatorname{th}\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} - \frac{n\pi}{2\operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} n\pi}\right]^{-1}$$

Известно, что

$$\sum_{\substack{m=1,3,\ldots \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} - \frac{1}{4n^4} = \frac{\pi}{8n^3}\operatorname{th}\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16n^2}\operatorname{sech}^2\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4n^4}$$

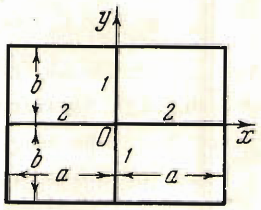
$$(n = 1, 3, \ldots)$$

Поэтому

$$2\alpha_n \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} = \frac{\operatorname{th}\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi} - \frac{n\pi}{2}\operatorname{sech}^2\frac{n\pi}{2}}{\operatorname{th}\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} - \frac{n\pi}{2}\operatorname{sech}^2\frac{n\pi}{2}} < 1$$

и стремится к единице при $n \to \infty$. Таким образом, система регулярна.

Отметим, что формулой (3.2) решается также задача об изгибе опертой по всему контуру прямоугольной плиты со сторонами $2a$ и $2b$ (фиг. 3), опирающейся вдоль осей симметрии прямоугольника на упругие балки при действии равномерно распределенной нагрузки. Принципиально решение этой задачи ничем не отличается от предыдущей задачи; надо только условия (3.3) заменить следующими:



Фиг. 3

$$w(0, y) = w_1, \qquad w(x, 0) = w_2 \tag{3.7}$$

где w_1 и w_2 представляют прогибы соответственно первой и второй балок при действии сил $-q_1(y)$ и $-q_2(x)$.

Решая уравнения упругих линий первой и второй балок, получим

$$w_1 = -\frac{16b^4}{E_1J_1\pi^4}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{C_n}{n^4}\cos\frac{n\pi}{2b}y, \qquad w_2 = -\frac{16a^4}{E_2J_2\pi^4}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{D_m}{m^4}\cos\frac{m\pi}{2a}x$$

Внеся эти выражения и (3.2) в условия (3.7), получим систему бесконечных уравнений относительно коэффициентов C_n и D_m. В частности, для квадратной плиты при $E_1J_1 = E_2J_2$ получим

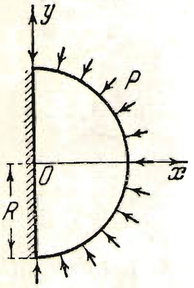
$$\frac{1}{4\pi^2 n^3}\left[\operatorname{th}\frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2}\operatorname{sech}^2\frac{n\pi}{2} + \frac{8aD}{E_1J_1 n}\right]C_n +$$

$$+\frac{2}{\pi^4}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{C_m}{(m^2+n^2)^2} = -\frac{8a(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi}p\left[\frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}n\pi}\right) - \frac{\pi}{4}\frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}n\pi}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}n\pi}\right]$$

Эта система также регулярна.

§ 4. Решение плоской задачи для полукруга. Эту задачу решаем также с помощью вспомогательного круга, полагая, что при переходе из области $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ в область $\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$ напряжения R_r и R_θ претерпевают разрыв, а напряжение θ_θ и перемещения u и v остаются непрерывными. При таких условиях функция напряжения плоской задачи вспомогательного круга представится в виде

$$\Phi = \sum_0^\infty (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos n\theta + \sum_1^\infty (a_n' r^n + b_n' r^{n+2}) \sin n\theta \pm \tag{4.1}$$



Фиг. 4

$$\pm \sum_0^\infty \left\{ C_{2n+1} r^{2n+3} \left[\frac{\cos(2n+3)\theta}{2n+3} + \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2+\varkappa} \right] + \right.$$

$$\left. + C_{2n} r^{2n+2} \left[\frac{\sin(2n+2)\theta}{2n+2} + \frac{\sin 2n\theta}{2n+1+\varkappa} \right] \right\} \pm$$

$$\pm \sum_0^\infty \left\{ D_{2n} r^{2n+2} \left[\frac{\cos(2n+2)\theta}{2n+2} + \frac{\cos 2n\theta}{2n+1-\varkappa} \right] + \right.$$

$$\left. + D_{2n+1} r^{2n+3} \left[\frac{\sin(2n+3)\theta}{2n+3} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+2-\varkappa} \right] \right\}$$

где $\varkappa = 3 - 4\sigma$ при плоской деформации, $\varkappa = (3-\sigma)/(1+\sigma)$ при плоском напряженном состоянии, σ — коэффициент Пуассона. Здесь последние два ряда дают соответственно разрыв напряжений R_θ и R_r.

При построении решения (4.1) мы пользовались формулами:

для напряжений

$$R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad \theta_\theta = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad R_\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) \tag{4.2}$$

для перемещений [4]

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \tag{4.3}$$

где $\mu = E/[2(1+\sigma)]$, а $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ входят в выражение бигармонической функции

$$2\Phi = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \overline{\chi}(\bar{z}) \tag{4.4}$$

Подчинив выражение (4.1) на окружности вспомогательного круга контурным условиям дугового края полукруга, а на диаметре $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ условиям прямолинейного края, найдем окончательное решение.

Пример. Полукруг равномерно сжат по дуговому краю, смещения на прямолинейном крае равны нулю (фиг. 4).

Решение для этого случая мы получим, полагая в (4.1)

$$a_{2n+1} = a_n' = b_{2n+1} = b_n' = C_{2n} = D_{2n} = D_{2n+1} = 0$$

Тогда

$$\Phi = \sum_0^\infty (a_{2n} r^{2n} + b_{2n} r^{2n+2}) \cos 2n\theta \pm$$

$$\pm \sum_0^\infty C_{2n+1} r^{2n+3} \left[\frac{\cos(2n+3)\theta}{2n+3} + \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2+\varkappa} \right] \tag{4.5}$$

Коэффициенты a_{2n}, B_{2n} и C_{2n+1} определяем из условий

$$(R_r)_{r=R} = -p, \qquad (\theta_r)_{r=R} = 0, \qquad (u)_{\theta=\pm 1/2\pi} = (v)_{\theta=\pm 1/2\pi} = 0$$

Пользуясь этими условиями и формулами (4.2) — (4.5), найдем решение рассматриваемой задачи при $-1/2\pi \leqslant \theta \leqslant 1/2\pi$,

$$\Phi = \sum_{1}^{\infty} B_{2n} r^{2n} \left[\frac{\cos 2n\theta}{2n} + \frac{\cos (2n-2)\theta}{2n-1-\varkappa} \right] + \\ + \sum_{0}^{\infty} C_{2n+1} r^{2n+3} \left[\frac{\cos (2n+3)\theta}{2n+3} + \frac{\cos (2n+1)\theta}{2n+2+\varkappa} \right] \tag{4.6}$$

где

$$B_2 = -\frac{2(\varkappa-1)}{\pi} \sum_{0}^{\infty} (-1)^k (k+1) R^{2k+1} C_{2k+1} \left[\frac{1}{2k+3} - \right. \\ \left. - \frac{2k-1}{(2k+1)(2k+2+\varkappa)} \right] + \frac{\varkappa-1}{2} p \tag{4.7}$$

$$B_{2n} = \frac{8(-1)^n n}{\pi(2n- \ )R^{2n-2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) R^{2k+1} C_{2k+1} \left[\frac{2k-2n+5}{(2k+3)^2-4n^2} - \right. \\ \left. - \frac{2k+1}{(2k+2n+1)(2k+2+\varkappa)} \right] \tag{4.8}$$

При этом соответствующая бесконечная система имеет вид

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^k (k+1) R^{2k+1} C_{2k+1} \left[\frac{\varkappa-1}{2k+3} - \frac{(\varkappa-1)(2k-1)}{(2k+1)(2k+2+\varkappa)} + \right. \\ \left. + \frac{4(2k+3)}{(2k+1)(2k+5)} - \frac{4(2k+1)}{(2k+3)(2k+2+\varkappa)} \right] = -\frac{\pi(\varkappa-1)p}{4} \tag{4.9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) R^{2k+1} C_{2k+1} \left[\frac{2n+1-\varkappa}{2k+2n+3} - \frac{(2k+1)(2k-2n-1)(2k+1-\varkappa)}{[(2k+1)^2-4n]^2 (2k+2+\varkappa)} - \right. \\ \left. - \frac{2(n+1)(2k-2n+3)}{(2k+3)^2-4(n+1)^2} + \frac{2(n+1)(2k+1)}{(2k+2n+3)(2k+2+\varkappa)} \right] = 0 \tag{4.10}$$

Пользуясь (4.2), (4.6) — (4.10), найдем главные напряжения:

$$\theta_\theta\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} B_2, \qquad \theta_\theta(0, 0) = -\frac{3-\varkappa}{\varkappa-1} B_2 \tag{4.11}$$

Примем $\sigma = 0.25$ ($\varkappa = 2$). Тогда, полагая в первом приближении $C_3 = C_5 = \cdots = 0$, найдем

$$\theta_\theta\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1.170\, p, \qquad \theta_\theta(0, 0) = -0.390\, p$$

Во втором приближении полагаем $C_5 = C_7 = \cdots = 0$

$$\theta_\theta\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1.177\, p, \qquad \theta_\theta(0, 0) = -0.392\, p$$

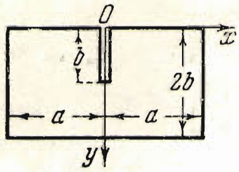
Для крайних случаев вычисления дают

$$\theta_\theta\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4p}{3}, \quad \theta_\theta(0, 0) = 0 \quad \text{при } \sigma = 0 \quad (\varkappa = 3)$$

$$\theta_\theta\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \theta_\theta(0, 0) = -p \qquad \text{при } \sigma = 0.5 \ (\varkappa = 1)$$

§ 5. Кручение призматического стержня прямоугольного сечения с вырезом вдоль половины одной из осей симметрии сечения (фиг. 5).

Рассмотрим вспомогательную область, представленную на фиг. 6. Для этой области функцию напряжения представим в виде



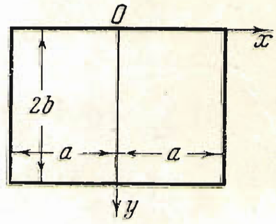
Фиг. 5

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_1^\infty \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{2b} x + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2b} x \right) \sin \frac{n\pi}{2b} y \pm$$

$$\pm \sum_1^\infty \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{2b} x + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2b} x \right) \sin \frac{n\pi}{2b} y \qquad (5.1)$$

где верхние знаки относится к области $0 \leqslant x \leqslant a$, а нижние знаки к области $-a \leqslant x \leqslant 0$. Функция Φ_0 есть известное решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения. Полагая, что при переходе из области $x > 0$ в область $x < 0$ через линию $x = 0$ функция Φ остается непрерывной, из (5.1) получим $C_n = 0$, чем и обеспечивается непрерывность напряжения X_z в том же переходе. Напряжение же Y_z в указанном переходе претерпеавет разрыв:

$$Y_z^+ - Y_z^- = -\sum_1^\infty \frac{n\pi}{b} D_n \sin \frac{n\pi}{2b} y \qquad (5.2)$$



Фиг. 6

Подчинив выражение (5.1) на сторонах прямоугольника условию $\Phi = 0$, имеем

$$B_n = 0, \qquad A_n = -D_n \operatorname{th} \frac{n\pi}{2b} a$$

Внеся значения C_n, B_n и A_n в (5.1), получим

$$\Phi = \Phi_0 - \sum_1^\infty D_n \operatorname{th} \frac{n\pi}{2b} a \operatorname{ch} \frac{n\pi}{2b} x \sin \frac{n\pi}{2b} y \pm \sum_1^\infty D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2b} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2b} y \qquad (5.3)$$

Таким образом, решение (5.3) на сторонах прямоугольника обращается в нуль, а вдоль линии $x = 0$ дает для напряжения Y_z разрыв непрерывности.

Искусственное введение дополнительных напряжений

$$-\sum_1^\infty \frac{n\pi}{b} D_n \sin \frac{n\pi}{2b} y$$

дает возможность выбрать коэффициент D_n так, чтобы на линии $x = 0$ удовлетворялось заданное условие. Для этого достаточно подчинить решение (5.3) еще следующим условиям:

$$\Phi(0, y) = 0 \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant y \leqslant b \qquad (5.4)$$

$$Y_z^+ - Y_z^- = 0 \qquad \text{при} \quad b \leqslant y \leqslant 2b \qquad (5.5)$$

Представим функции $\Phi(0, y)$ и $Y_z^+ - Y_z^-$ в интервалах $0 \leqslant y \leqslant b$ и $b \leqslant y \leqslant 2b$ соответственно в виде

$$\Phi(0, y) = \frac{2}{b} \sum_1^\infty \left[\int_0^b \Phi(0, y) \sin \frac{k\pi}{b} y dy \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \tag{5.6}$$

$$(Y_z)^+ - (Y_z)^- = \frac{2}{b} \sum_1^\infty \left\{ \int_b^{2b} [Y_z^+ - Y_z^-] \sin \frac{k\pi}{b} (y-b) dy \right\} \sin \frac{k\pi}{b} (y-b) \tag{5.7}$$

Тогда условия (5.4) и (5.5) можно, за исключением быть может точки $y = b$, заменить соответственно следующими:

$$\int_0^b \Phi(0, y) \sin \frac{k\pi}{b} y dy = 0, \qquad \int_b^{2b} [Y_z^+ - Y_z^-] \sin \frac{k\pi}{b} (y-b) dy = 0 \tag{5.8}$$

Последнее согласно (5.2) можно привести к виду

$$\sum_{n=1}^\infty nD_n \int_b^{2b} \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{b} (y-b) dy = 0 \tag{5.9}$$

Внеся (5.3) в первое условие (5.8), получим

$$\beta_{2k} \operatorname{th} \frac{k\pi}{b} a + \frac{8k(-1)^k}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \beta_{2n+1}}{(2n+1-2k)(2n+1+2k)} \operatorname{th} \frac{2n+1}{2b} \pi =$$

$$= -\frac{8k(-1)^k}{\pi} \sum_{n=1,3,\ldots}^\infty \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3(n^2-4k^2)} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(n\pi a/2b)}\right) \tag{5.10}$$

где

$$\beta_k = -\frac{\pi^3 D_k}{32\, G\tau b^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Из (5.9) имеем

$$\beta_{2k} = \frac{4(-1)^k}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n+1)(-1)^n \beta_{2n+1}}{(2n+1-2k)(2n+1+2k)} \tag{5.11}$$

Исключив β_{2k} из (5.10) и (5.11), получим бесконечную систему

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \beta_{2n+1}}{(2n+1-2k)(2n+1+2k)} \left[(2n+1) \operatorname{th} \frac{k\pi}{b} a + 2k \operatorname{th} \frac{2n+1}{2b} \pi a \right] =$$

$$= -2k \sum_{n=1,3,\ldots}^\infty \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3(n^2-4k^2)} \left(1 - \operatorname{sech} \frac{n\pi}{2b} a\right) \tag{5.12}$$

Эта система при $a \geqslant b$ приводится к регулярному виду.

Покажем это для случая бесконечной полосы $(a/b \to \infty)$. Тогда из (5.12) имеем

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \beta_{2n+1}}{2n+1-2k} = \frac{\pi^3}{32} \left[\frac{1}{2k} + \frac{1-(-1)^k}{\pi^2 k^3} \right] \tag{5.13}$$

Исключив коэффициент β_1 и обозначив

$$4(-1)^n n\beta_{2n+1} = X_{2n+1} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (5.14)$$

приходим к регулярной системе[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n+1}}{(2n-1-2k)(2n+1-2k)} = \qquad (k=1,2,\ldots)$$

$$= \frac{\pi^3}{32}\left\{\frac{1}{2k(k+1)} + \frac{(2k+1)[1+(-1)^k]}{\pi^2(k+1)^3} - \frac{(2k-1)[1-(-1)^k]}{\pi^2 k^3}\right\} \qquad (5.15)$$

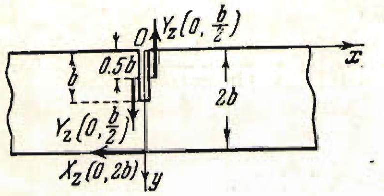
$$\beta_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_{2n+1}}{n(2n-1)} - \frac{\pi^3}{32}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\right) \qquad (5.16)$$

Решение (5.3) в случае бесконечной полосы принимает вид

$$\Phi = G\tau\left(by - \frac{y^2}{2}\right) + \frac{32\,G\tau b^2}{\pi^3}\sum_{1}^{\infty}\beta_n \exp\frac{-n\pi x}{2b}\sin\frac{n\pi}{2b}y \qquad (0 \leqslant x \leqslant \infty) \qquad (5.17)$$

Эта формула показывает, что влияние разреза затухает по мере удаления от места разреза.

Из (5.15) с желаемой точностью можно определить ряд коэффициентов $X_3, X_5, \ldots$; далее, из (5.16), (5.14) и (5.11) найдем β_1, β_{2n+1} и β_{2n}. Внеся значение этих коэффициентов в (5.17), получим окончательное решение для случая бесконечной полосы (фиг. 7). Приводим некоторые вычисленные значения напряжений X_z и Y_z



Фиг. 7

Полагая $X_7 = X_9 = \cdots = 0$, имеем

$$X_z(0,0) = -0.0048\,G\tau b \approx 0$$
$$X_z(0,2b) = -1.6256\,G\tau b,$$
$$Y_z(0,\ b/2) = -1.2121\,G\tau b$$

Полагая $X_9 = X_{11} = \cdots = 0$, найдем

$$X_z(0,\ 2b) = -1.7168\,G\tau b$$
$$Y_z(0, b/2) = -1.2532\,G\tau b$$

Отметим, что в точке $x=0$, $y=b$ напряжения бесконечны.

Значения жесткости при кручении квадратного сечения при наличии разреза будет $C = 0.0837\,(2b)^4 G$, что меньше жесткости квадратного сечения без разреза в 1.7 раза.

Поступила в редакцию
20 V 1949

Ереванский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейман Ю. В. Общий метод расчета тонких плит. Сб. Пластинки и оболочки. Госстройиздат. 1939.
2. Корепев Б. Г. Метод компенсирующих нагрузок в приложении к задачам о равновесии, колебаниях и устойчивости плит и мембран. ПММ. 1940. Т. IV.
3. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат. Л. — М. 1933.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Л. 1933.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. ОНТИ. Л. — М. 1936.