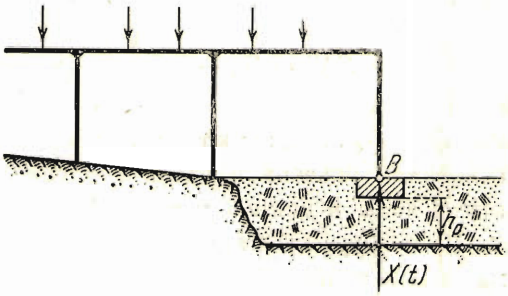
Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

К ИССЛЕДОВАНИЮ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ С ОПОРАМИ, СМЕЩАЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Н. Х. Арутюнян

(Ереван)

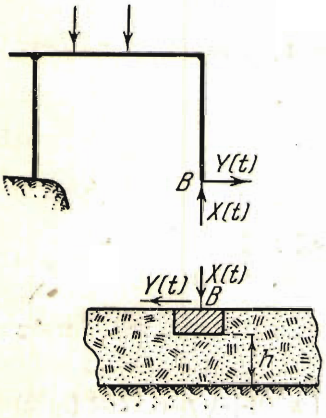
1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим n раз статически неопределимую стержневую систему (фиг. 1) с опорой B, расположенной на водонасыщенном сжимаемом слое грунта толщиной h, значительно распространенном в стороны и залегающем на несжимаемом водонепроницаемом основании. Пусть в некоторый момент времени к системе приложена внешняя нагрузка.



Фиг. 1

Чтобы найти усилия в стержнях системы как функции времени t, нужно определить переменную реакцию в опоре B.

Обозначим вертикальную составляющую реакции опоры B в начальный момент через X_0; она может быть определена известными методами строительной механики.



Фиг. 2

Действие силы X_0 вызовет процесс уплотнения слоя грунта, а следовательно, осадку опоры B.

Под влиянием осадки опоры B, затухающей со временем, значение вертикальной составляющей реакции опоры B будет изменяться. Обозначим ее через $X = X(t)$, полагая $X(0) = X_0$.

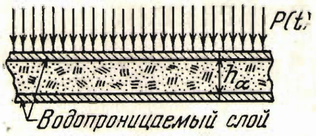
Для определения $X(t)$ рассмотрим в качестве основной $n-1$ раз статически неопределимую систему, полученную из заданной путем удаления вертикальной связи опоры B (фиг. 2). За основную неизвестную примем силу X.

Обозначим через Δ перемещение точки B основной системы в направлении усилия $X(t)$ от действия только внешней нагрузки, а через δ — перемещение той же точки B основной системы в направлении неизвестного усилия $X(t)$, вызываемого единичной силой, приложенной в точке B по направлению $X(t)$. Очевидно, что величины Δ и δ не зависят от времени t и могут быть определены методами теории расчета рам.

Условие совместности деформаций для заданной статически неопределимой системы может быть записано в виде

$$\Delta + \delta X(t) + S[t, X(t)] = 0 \tag{1.1}$$

где $S(t, X(t)]$ есть некоторая, пока неизвестная функция, характеризующая закон изменения осадки опоры B.



Фиг. 3

Для определения этой функции заметим, что величина осадки (или разбухания) слоя грунта равняется *изменению* количества воды, содержащейся в вертикальной призме рассматриваемого слоя грунга с площадью основания, равной единице.

Принимая обычную схему нагрузки грунта[1], представленную на фиг. 3, для S можно написать

$$S(t) = Q_h - Q_0 = -k\int_0^t \left\{\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]_{x=h} - \left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]_{x=0}\right\} dt \tag{1.2}$$

где Q_h и Q_0 обозначают объемы воды, прошедшие через верхние и нижние основания указанной призмы с единичным основанием. $H = H(x, t)$ — напор воды в данной точке грунта, k — коэффициент фильтрации.

Пусть $p_x(t)$ — напряжение в направлении X в скелете грунтовой массы, возникшее вследствие приложения внешнего давления $p(t)$, а γ — объемный вес воды. Тогда

$$p_x(t) + \gamma H(t) = p(t) \tag{1.3}$$

При этом с течением времени $p_x(t)$ на данной глубине будет увеличиваться, а $H(t)$ уменьшаться.

Определение напряжения $p_x(t)$ в скелете грунта, как известно[1], приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = c\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} \tag{1.4}$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} &p_x = 0 && \text{для} \quad t = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant h \\ &p_x = X(t)/F && \text{для} \quad t > 0 \quad x = 0, \ x = h \end{aligned} \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.3) при этих условиях, как известно, имеет вид

$$p_x(t) = p(t) - \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{\nu}\exp(-\lambda_\nu^2 t)\sin\frac{\nu\pi x}{h}\left[p(0) + \int_0^t p'(\xi)\exp(\lambda_k^2\xi)\, d\xi\right] \tag{1.6}$$

Здесь

$$\lambda_\nu^2 = \frac{\nu^2\pi^2}{h^2}c^2, \qquad c = \frac{k(1+\mu)}{\gamma a} \tag{1.7}$$

при этом c — коэффициент консолидации грунта, k — коэффициент фильтрации, μ — коэффициент пористости грунта, a — коэффициент уплотнения или сжимаемости грунта.

Пользуясь зависимостями (1.3) и (1.6), находим

$$H = \frac{1}{\gamma}\left[p(t) - p_x(t)\right] =$$

$$= \frac{4}{\gamma\pi} \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{\nu} \exp(-\lambda_\nu^2 t) \sin\frac{\nu\pi x}{h} \left[p(0) - \int_0^t p'(\xi)\exp(\lambda_\nu^2 \xi)\,d\xi\right] \quad (1.8)$$

Отсюда, дифференцируя, получим

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{4}{\gamma h}\left[p(0) \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \exp(-\lambda_\nu^2 t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \exp(-\lambda_\nu^2 t) \int_0^t p'(\xi)\exp(\lambda_\nu^2 \xi)\,d\xi\right] \quad (1.9)$$

Интегрируя по частям последний интеграл, имеем

$$\int_0^t p'(\xi)\exp(\lambda_\nu^2 \xi)\,d\xi = p(t)\exp(\lambda_\nu^2 t) - p(0) - \lambda_\nu^2 \int_0^t p(\xi)\exp(\lambda_\nu^2 \xi)\,d\xi \quad (1.10)$$

После подстановки этого выражения в (1.9) находим

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{4}{\gamma h}\left[p(t) - \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \lambda_\nu^2 \exp(-\lambda_\nu^2 t) \int_0^t p(\xi)\exp(\lambda_\nu^2 \xi)\,d\xi\right] \quad (1.11)$$

Подставляя найденное выражение $(\partial H / \partial x)$ в равенство (1.2) и замечая, что в силу условий задачи

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{x=h} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{x=0}$$

получим

$$S(t) = \frac{8k}{\gamma h}\left[\int_0^t p(\tau)\,d\tau - \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \lambda_\nu^2 \int_0^t \exp(-\lambda_\nu^2 \tau)\,d\tau \int_0^\tau p(\xi)\exp(\lambda_\nu^2 \xi)\,d\xi\right] \quad (1.12)$$

Меняя порядок интегрирования в последнем слагаемом, выражение (1.12) после некоторых преобразований приведем к виду

$$S(t) = \frac{8k}{\gamma h}\int_0^t p(\xi) \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \exp\left[-\lambda_\nu^2 (t-\xi)\,d\xi\right] \quad (1.13)$$

Замечая, что $p(t) = X(t)/F$, где F — площадь основания опоры B, окончательно получим

$$S(t) = \frac{8k}{\gamma h F}\int_0^t X(\xi) \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \exp\left[-\lambda_\nu^2 (t-\xi)\right] d\xi \quad (1.14)$$

Подставляя выражение $S(t)$ в уравнение (1.1), находим

$$\Delta + \delta X(t) + \frac{8k}{\gamma h F}\int_0^t X(\xi) \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \exp\left[-\lambda_\nu^2 (t-\xi)\right] d\xi = 0 \quad (1.15)$$

Разделив уравнение (1.15) на δ и замечая, что при $t = 0$

$$-\frac{\Delta}{\delta} = X(0) = X_0 \tag{1.16}$$

получим

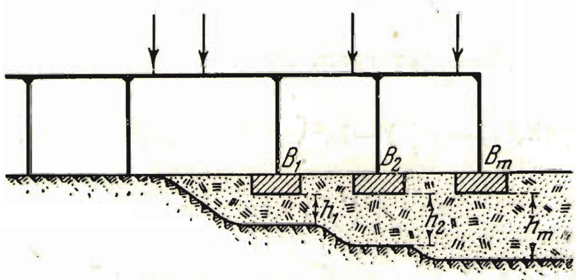
$$X(t) = X_0 - \beta \int_0^t X(\xi) K(t-\xi)\, d\xi \tag{1.17}$$

Здесь введены обозначения

$$K(t-\xi) = \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \exp\left[-\lambda_\nu^2 (t-\xi)\right], \qquad \beta = \frac{8k}{\gamma h \delta F} > 0 \tag{1.18}$$

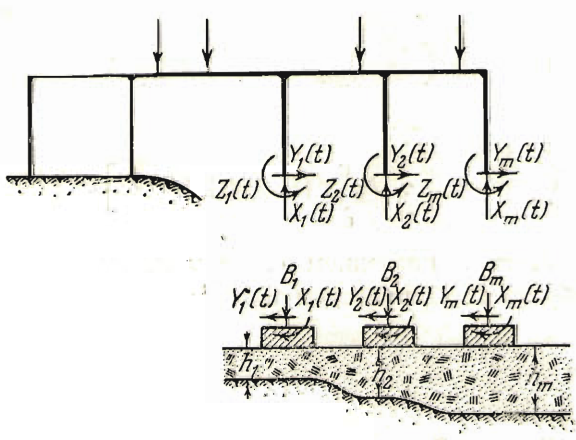
причем λ_ν согласно (1.7).

Таким образом, определение реакции в смещающейся во времени опоре приводится к решению интегрального уравнения Вольтерра вида (1.17) с ядром $K(t-\xi)$, определяемым выражением (1.18).

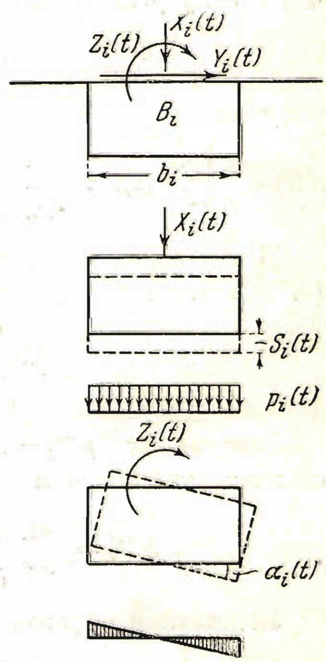


Фиг. 4

Рассмотрим общий случай поставленной задачи. Пусть в n раз статически неопределимой системе часть ее опор



Фиг. 5



Фиг. 6

$B_1, B_2, \ldots, B_m$ (фиг. 4) расположена на водонасыщенных податливых грунтах, причем толщина слоя грунта h_i, коэффициент фильтрации k_i, коэффициент пористости μ_i, коэффициент уплотнения a_i, коэффициент консолидации c_i под каждой опорой, а также площадь F_i каждой опоры предполагаются различными ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Допустим далее, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, в системе приложена внешняя нагрузка.

В качестве основной выберем систему, получаемую из заданной разрывом связей с опорами $B_1, \ldots, B_m$, расположенными на податливых грунтах (фиг. 5). За основные неизвестные примем взаимодействие между стойками системы и соответствующими им опорами. На каждой опоре неизвестными будут вертикальная составляющая реакции $X_i(t)$, горизонтальная составляющая реакции $Y_i(t)$ и пара $Z_i(t)$.

Так как массив фундаментов опор $B_1, \ldots, B_m$ по сравнению с самой конструкцией обычно обладает весьма большой жесткостью, то можно считать, что напряжения в основании фундаментов этих опор будут распределяться по линейному закону, деформации же самих фундаментов можно не учитывать. Пусть $S_i(t)$ определяет закон изменения во времени осадки основания i-й опоры от действия вертикальной реакции $X_i(t)$, а $\alpha_i(t)$ — закон изменения во времени угла поворота этой же опоры от воздействия опорного момента $Z_i(t)$ (фиг. 6).

Будем предполагать скольжение фундаментов невозможным. Таким образом, мы считаем, что горизонтальные составляющие реакций $Y_i(t)$ не вызывают смещений в основании опоры. Аналогично (1.1) имеем

$$\Delta_{xi} + \sum_{j=1}^{m} [(\delta_{xi})_{xj} X_j(t) + (\delta_{xi})_{yj} Y_j(t) + (\delta_{xi})_{zj} Z_j(t)] + S_i(t) = 0$$

$$\Delta_{zi} + \sum_{j=1}^{m} [(\delta_{zi})_{xj} X_j(t) + (\delta_{zi})_{yj} Y_j(t) + (\delta_{zi})_{zj} Z_j(t)] + \alpha_i(t) = 0 \quad (1.19)$$

$$\Delta_{yi} + \sum_{j=1}^{m} [(\delta_{yi})_{xj} X_j(t) + (\delta_{yi})_{yj} Y_j(t) + (\delta_{yi})_{zj} Z_j(t)] = 0$$

где Δ_{xi}, Δ_{yi}, Δ_{zi} — перемещения по направлению неизвестных усилий $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $Z_i(t)$, вызываемые в основной системе только внешней нагрузкой, $(\delta_{xi})_{yj}$ — перемещение точки приложения силы X_i, вызванное единичной силой, действующей по направлению силы Y_j (аналогичный смысл имеют другие комбинации индексов x и y), $(\delta_{xi})_{zj}$ — перемещение точки приложения силы $X_i(t)$ в основной системе по направлению той же силы, вызываемое единичной парой $Z_j = 1$ $(i = 1, \ldots m;\ j = 1, \ldots, m)$.

Пользуясь соотношением (1.14) и обращаясь к фиг. 6, для $S_i(t)$ и $\alpha_i(s)$ находим следующие выражения:

$$S_i(t) = \beta_i \int_0^t X_i(\xi) \sum_{\nu=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \exp[-\lambda_{i\nu}^2 (t-\xi)]\, d\xi$$

$$\alpha_i(t) = \frac{12\beta_i}{b_i^2} \int_0^t Z_i(\xi) \sum_{\nu=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \exp[-\lambda_{i\nu}^2 (t-\xi)]\, d\xi \quad (1.20)$$

где b_i — ширина опоры и

$$\beta_i = \frac{8k_j}{\gamma h_i F_i}, \qquad \lambda_{i\nu}^2 = \frac{\nu^2\pi^2}{h_i^2}\, c_i^2 \qquad \left(c_i = \frac{k_i(1+\mu_i)}{\gamma a_i}\right) \quad (1.21)$$

Подставляя выражения $S_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ согласно (1.20) в уравнения (1.19), получим

$$\Delta_{xi} + \sum_{j=1}^{m} [(\delta_{xi})_{xj} X_j(t) + (\delta_{xi})_{yj} Y_j(t) + (\delta_{xi})_{zj} Z_j(t)] +$$
$$+ \beta_i \int_0^t X_i(\xi) \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \exp[-\lambda_{i\nu}^2 (t-\xi)]\, d\xi = 0$$
$$\Delta_{zi} + \sum_{j=1}^{m} [(\delta_{zi})_{xj} X_j(t) + (\delta_{zi})_{yj} Y_j(t) + (\delta_{zi})_{zj} Z_j(t)] + \tag{1.22}$$
$$+ \frac{12\beta_i}{b_i^2} \int_0^t Z_i(\xi) \sum_{\nu=1,3,5,\ldots} \exp[-\lambda_{i\nu}^2 (t-\xi)]\, d\xi = 0$$
$$\Delta_{yi} + \sum_{j=1}^{m} [(\delta_{yi})_{xj} X_j(t) + (\delta_{yi})_{yj} Y_j(t) + (\delta_{yi})_{zj} Z_j(t)] = 0$$

Таким образом, в общем случае рассматриваемая задача приводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра вида (1.22), ядра которых определяются рядами вида (1.18).

2. Решение интегрального уравнения задачи в случае одной смещающейся опоры. Введем обозначение

$$z = \left(\frac{c}{h}\right)^2 (t - \xi) \tag{2.1}$$

Тогда ядро $K(t-\xi)$ уравнения (1.17) можно представить согласно (1.18) и (1.7) в виде

$$K(t-\xi) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \exp\left[-n^2\pi^2 \left(\frac{c}{h}\right)^2 (t-\xi)\right] =$$
$$= \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \exp(-n^2\pi^2 z) = K(z) \tag{2.2}$$

Для тета-функции Якоби $\theta_3(\nu;\ z)$ известно представление рядом Фурье

$$\theta_3(\nu;\ z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2\pi^2 z) \cos 2n\pi\nu \tag{2.3}$$

Этот ряд сходится равномерно относительно z во всяком конечном интервале $0 \leqslant z \leqslant l$, лежащем правее нуля.

Положив в соотношении (2.3) $\nu = 0$, имеем

$$\theta_3(0;\ z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2\pi^2 z) \tag{2.4}$$

Аналогично имеем

$$\theta_3(0;\ 4z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(2n)^2 \pi^2 z] \tag{2.5}$$

Пользуясь соотношениями (2.4) и (2.5), выражение (2.2) для $K(z)$ представим в виде

$$K(z) = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \exp(-n^2\pi^2 z) = \frac{1}{2}[\theta_3(0;\ z) - \theta_3(0;\ 4z)] \tag{2.6}$$

или

$$K(t-\xi) = \frac{1}{2}\{\theta_3[0;\ (t-\xi)] - \theta_3[0;\ 4(t-\xi)]\} \tag{2.7}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.17), получим

$$X(t) = X_0 - \beta\int_0^t X(\xi)\frac{1}{2}\{\theta_3[0;\ (t-\xi)] - \theta_3[0;\ 4(t-\xi)]\}\,d\xi \tag{2.8}$$

Заметим, что ядро $K(t-\xi)$ и свободный член X_0 уравнения (2.8) такие, что функции

$$K(t-\xi)\,e^{-s(t-\xi)}, \quad X_0 e^{-s(t-\xi)} \tag{2.9}$$

остаются ограниченными по абсолютной величине при любых значениях $t-\xi>0$. Применяя к обеим частям уравнения (2.8) одностороннее преобразование Лапласа, получим

$$\int_0^\infty X(t)\,e^{-st}dt = X_0\int_0^\infty e^{-st}dt - \beta\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t X(\xi)\,K(t-\xi)\,d\xi \tag{2.10}$$

Преобразуем второй интеграл в правой части (2.10) по формуле Дирихле преобразования двойных интегралов:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t X(\xi)\,K(t-\xi)\,d\xi = \int_0^\infty e^{-st}X(t)\,dt\int_0^\infty e^{-sz}K(z)\,dz \tag{2.11}$$

Тогда уравнение (2.10) приведем к виду

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1+\beta L(s)} \tag{2.12}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi(s) = \int_0^\infty X(t)\,e^{-st}dt, \quad F(s) = \int_0^\infty X_0 e^{-st}dt, \quad L(s) = \int_0^\infty K(z)\,e^{-sz}\,dz \tag{2.13}$$

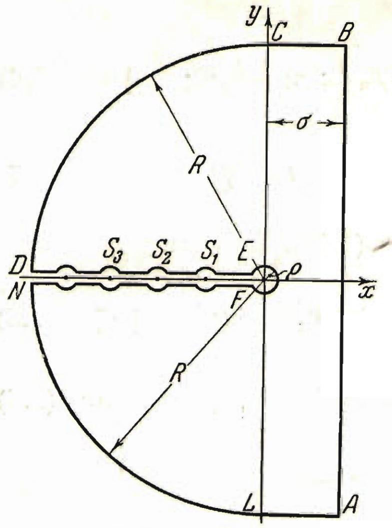
Из второго соотношения (2.13) непосредственно имеем

$$F(s) = \frac{X_0}{s} \tag{2.14}$$

Для определения $L(s)$ предварительно заметим, что

$$L(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{c}\right)^2\int_0^\infty [\theta_3(0;\ z) - \theta_3(0;\ 4z)]\exp\frac{-sh^2z}{c^2}\,dz \tag{2.15}$$

Вычисление определенных интегралов дает



Фиг. 7

$$\int_0^\infty \theta_3(0;\ z) \exp \frac{-sh^2 z}{c^2} dz = \frac{c}{h\sqrt{s}} \operatorname{cth} \frac{h\sqrt{s}}{c}$$
$$\int_0^\infty \theta_3(0;\ 4z) \exp \frac{-sh^2 z}{c^2} dz = \frac{c}{2h\sqrt{s}} \operatorname{cth} \frac{h\sqrt{s}}{2c} \tag{2.16}$$

Подставляя значение этих интегралов в (2.15), находим

$$L(s) = \frac{h}{4c\sqrt{s}} \operatorname{th} \frac{h\sqrt{s}}{2c} \tag{2.17}$$

Пользуясь формулами (2.14) и (2.17), из соотношения (2.12) имеем)

$$\Phi(s) = \frac{X_0}{s}\left[1 + \frac{\beta h}{4c\sqrt{s}} \operatorname{th} \frac{h\sqrt{s}}{2c}\right]^{-1} \tag{2.18}$$

Совершая обращение Римана-Меллина над первой из формул (2.13) и пользуясь для $\Phi(s)$ выражением (2.18), получим решение интегрального уравнения (2.8) в виде следующего контурного интеграла

$$X(t) = \frac{X_0}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{-st}}{s}\left[1 + \frac{\beta h}{4c\sqrt{s}} \operatorname{th} \frac{h\sqrt{s}}{2c}\right]^{-1} ds \tag{2.19}$$

При этом интегрирование ведется по любой прямой, параллельной мнимой оси и расположенной справа ($\sigma > 0$) от всех особых точек подинтегральной функции (фиг. 7).

Для определения искомого интеграла (2.19) предварительно заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{st}}{s} ds = 1 \quad \text{при} \quad t > 0,\ \sigma > 0 \tag{2.20}$$

Пользуясь этим равенством, выражения (2.19) для $X(t)$ приведем к виду

$$X(t) = X_0\left[1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{st} \operatorname{th} l\sqrt{s}}{s[m\sqrt{s} + \operatorname{th} l\sqrt{s}]} ds\right] \tag{2.21}$$

где

$$l = \frac{h}{2c}, \qquad m = \frac{2}{\beta l} \tag{2.22}$$

Обозначим

$$I_0(t) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{st} \operatorname{th} l\sqrt{s}}{s\left[m\sqrt{s} + \operatorname{th} l\sqrt{s}\right]} ds \tag{2.23}$$

и займемся вычислением значения этого интеграла. Контуром интеграции, как уже указывалось, служит прямая, параллельная мнимой оси и расположенная справа от всех особых точек функции:

$$\frac{f(s)}{s}=\frac{\operatorname{th} l\sqrt{s}}{s\left[m\sqrt{s}+\operatorname{th} l\sqrt{s}\right]} \tag{2.24}$$

Из выражения (2.24) одновременно следует, что

$$\frac{f(s)}{s}\to 0 \qquad \text{при} \quad |s|\to\infty \tag{2.25}$$

равномерно относительно аргумента комплексного числа в правой полуплоскости. В силу этого выражение (2.21) будет представлять единственное решение интегрального уравнения (2.8).

Из соотношения (2.24) для подинтегральной функции $f(s)/s$ также следует, что условие (2.25) имеет место не только в правой полуплоскости, но и в левой. Поэтому в формуле (2.23) контур интеграции можно дополнить дугой бесконечно удаленной окружности с центром в точке $s=0$, охватывающей эту точку слева и замыкающей концы той прямой (фиг. 7), по которой вначале велось интегрирование, и применить теорию вычетов.

Функция $f(s)/s$, стоящая под знаком интеграла (2.23), имеет особую точку (точку разветвления) $s=0$. Будем рассматривать ту ветвь многозначной функции $f(s)/s$, для которой значения аргумента комплексного числа s заключаются в интервале $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, т. е. проводим разрез вдоль отрицательной части действительной оси.

В правой полуплоскости, включая и мнимую ось, функция $f(s)/s$ не имеет нулей. Следовательно, прямая AB может быть проведена на сколь угодно близком расстоянии от мнимой оси при $\sigma>0$.

Для определения полюсов подинтегральной функции, приравнивая нулю знаменатель выражения (2.24), имеем

$$\operatorname{th} z=-\frac{z}{b} \qquad \left(z=l\sqrt{s}, \quad b=\frac{\beta h_0^2}{8c^2}\right) \tag{2.26}$$

Отсюда, полагая $z=i\lambda$, находим

$$\operatorname{th} i\lambda=-\frac{i\lambda}{b} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\lambda=-\frac{\lambda}{b} \tag{2.27}$$

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ этого известного в математической физике уравнения обычно определяются графически построением тангенсоид $y=\operatorname{tg}\lambda$ и прямой $y=-\lambda/b$. Так как $z=l\sqrt{s}=i\lambda$, то все значения

$$s_k=-\frac{\lambda_k^2}{l^2} \tag{2.28}$$

будут вещественными отрицательными.

Таким образом, все особые точки подинтегральной функции $f(s)/s$ расположены на отрицательной части действительной оси, что дает возможность выбрать контуры интегрирования, как показано на фиг. 7. Радиус R дуг CD и LN будет при этом стремиться к бесконечности.

Интеграл по этому контуру равен нулю, поскольку внутри этого контура подинтегральная функция регулярна и поэтому интеграл по искомому пути оказывается равным взятому со знаком минус интегралу по контуру $BCDEFNLA$. Интегралы по дугам CD и LN согласно лемме Жордана равны нулю, так же как и интегралы по отрезкам BC и AL; интеграл по бесконечно малому кругу радиуса ρ, охватывающему начало координат, равен $-2\pi ib/(1+b)$. Таким образом, имеем

$$I_0(t)+\text{v. p.}\int\limits_{DEFN}\frac{e^{st}f(s)}{s}\,ds-2\pi i\,\frac{b}{1+b}=0 \tag{2.29}$$

где по линиям разреза DE и FN берутся главные значения интегралов. Учитывая, что на линии DE будет $s=|s|\,e^{i\pi}=-|s|$, согласно теореме Коши имеем

$$\text{v. p.}\int\limits_{DE}\frac{e^{st}f(s)}{s}\,ds=\int\limits_{\infty}^{0}\frac{\operatorname{th} il\sqrt{|s|}}{-|s|\,[m\sqrt{}+\operatorname{th} li\sqrt{|s|}]}\,e^{-|s|t}\,ds-$$

$$-\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\lim\frac{(s-s_n)\,e^{st}\operatorname{th} l\sqrt{s}}{s\,[m\sqrt{s}+\operatorname{th} l\sqrt{s}]} \tag{2.30}$$

Замечая, что для верхней части разрева, т. е. для линий DE,

$$l\sqrt{s_k}=i\lambda_k \tag{2.31}$$

получим

$$\text{v. p.}\int\limits_{DE}\frac{e^{st}f(s)}{s}\,ds=-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{-\chi t}\operatorname{tg} l\sqrt{\chi}}{\chi\,[m\sqrt{\chi}+\operatorname{th} l\sqrt{\chi}\,]}\,d\chi+ \tag{2.32}$$

$$+\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{il^2\operatorname{tg}\lambda_n}{\lambda_n^{\,2}}\left[\frac{1}{\beta i\lambda_n}+\frac{l^2}{2i\lambda_n\cos^2\lambda_n}\right]^{-1}\exp\frac{-\lambda_n^{\,2}}{l^2}\qquad\text{при }\chi,>0,\ t>0$$

Подставляя сюда $b=\beta l^2/2$, окончательно находим

$$\text{v. p.}\int\limits_{DE}\frac{e^{st}f(s)}{s}\,ds=-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{-\chi t}\operatorname{tg} l\sqrt{x}}{\chi\,[m\sqrt{\chi}+\operatorname{tg} l\sqrt{\chi}]}\,d\chi-$$

$$-\pi ib\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\,\frac{\sin 2\lambda_n}{\cos^2\lambda_n+b}\exp\frac{-\lambda_n^{\,2}t}{l^2} \tag{2.33}$$

Аналогичным образом, замечая, что на нижней части разреза, т. е. по линии FN, будет $s=|s|\,e^{-i\pi}$ и имеет место

$$\sqrt{s}=-i\sqrt{|s|},\quad l\sqrt{s_k}=-i\lambda_k \tag{2.34}$$

для второго интеграла в зависимости (2.29) получим

$$\text{v. p.}\int\limits_{FN}\frac{e^{st}f(s)}{s}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{-\chi t}\operatorname{tg} l\sqrt{\chi}}{\chi\,[m\sqrt{\lambda}+\operatorname{tg} l\sqrt{\chi}]}\,d\chi-$$

$$-\pi ib\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\,\frac{\sin 2\lambda_n}{\cos^2\lambda_n+b}\exp\frac{-\lambda_n^{\,2}t}{l^2}\qquad\left(b=\frac{\beta l}{2}\right) \tag{2.35}$$

Пользуясь значениями интегралов (2.33) и (2.35) из (2.29), находим

$$I_0(t) = 2\pi i b \left[\frac{1}{1+b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\sin 2\lambda_n}{\cos^2\lambda_n + b} \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{l^2}\right] \tag{2.36}$$

Подставляя контурный интеграл $I_0(t)$ согласно (2.36) в соотношение (2.21), окончательно получим для $X(t)$ следующую формулу:

$$X(t) = X_0 \left[\frac{1}{1+b} - b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\sin 2\lambda_n}{\cos^2\lambda_n + b} \exp \frac{-\lambda_n^2 t}{l^2}\right] \tag{2.37}$$

где X_0 — начальное значение вертикальной реакции опоры B, определяемой равенством (1.16), λ_n — корни уравнения (2.27), b — некоторая положительная постоянная, равная

$$b = \frac{\beta}{2}\left(\frac{h}{2c}\right)^2$$

Решение системы интегральных уравнений (1.22), к которой приводится случай нескольких смещающихся опор, проводится аналогично.

Применяя к обеим частям соотношения (1.22) одностороннее преобразование Лапласа, получим

$$\int_0^\infty \Delta_{xi} e^{-st} dt + \sum_{j=1}^{m} \Big[(\delta_{xi})_{xj} \int_0^\infty X_j(t) e^{-st} dt + (\delta_{xi})_{yj} \int_0^\infty Y_j(t) e^{-st} dt +$$

$$+ (\delta_{xi})_{zj} \int_0^\infty Z_j(t) e^{-st} dt\Big] + \beta_i \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t X_i(\xi) K_i(t-\xi)\, d\xi = 0$$

$$\int_0^\infty \delta_{zi} e^{-st} dt + \sum_{j=1}^{m} \Big[(\delta_{zi})_{xj} \int_0^\infty X_j(t) e^{-st} dt + (\delta_{zi})_{yj} \int_0^\infty Y_j(t) e^{-st} dt +$$

$$+ (\delta_{zi})_{zj} \int_0^\infty Z_j(t) e^{-st} dt\Big] + \gamma_i \int_0^\infty e^{-st} dt \int Z_i(\xi) K_i(t-\xi)\, d\xi = 0$$

$$\int^\infty \Delta_{yi} e^{-st} dt + \sum_{j=1}^{m} \Big[(\delta_{yi})_{xj} \int_0^\infty X_j(t) e^{-st} dt + (\delta_{yi})_{yj} \int_0^\infty Y_j(t) e^{-st} dt +$$

$$+ (\delta_{yi})_{zj} \int_0^\infty Z_j(t) e^{-st} dt\Big] \tag{2.38}$$

где $K_i(t-\xi)$, β_i и λ_{in} определяются соответственно формулами (1.18), (1.21), а $\gamma_i = 12\,\beta_i / b_i^2$. Введя обозначения

$$\int_0^\infty X_j(t) e^{-st} dt = \Phi_{j1}(s), \quad \int_0^\infty Y_j(t) e^{-st} dt = \Phi_{j2}(s), \quad \int_0^\infty Z_j(t) e^{-st} dt = \Phi_{j3}(s) \tag{2.39}$$

и преобразуя посредством формулы Дирихле двойные интегралы, входящие в уравнение (2.38), получим

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t X_j(\xi)\,K_j(t-\xi)\,d\xi=\int_0^\infty X_j(t)\,e^{-st}dt\int_0^\infty e^{-sz}K_j(z)\,dz\\
&\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t Z_j(\xi)\,K_j(t-\xi)\,d\xi=\int_0^\infty Z_j(t)\,e^{-st}dt\int_0^\infty e^{-sz}K_j(z)\,dz
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Обозначив

$$
\int_0^\infty e^{-sz}K_j(z)\,dz=L_j(s)
\tag{2.41}
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t X_j(\xi)\,K_j(t-\xi)\,d\xi=\Phi_{j1}(s)\,L_j(s)\\
&\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^\infty Z_j(\xi)\,K_j(t-\xi)\,d\xi=\Phi_{j3}(s)\,L_j(s)
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Подставляя двойные интегралы (2.42) в (2.38) и используя обозначения (2.39), после некоторых преобразований приведем систему интегральных уравнений (1.22) к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{j1}(s)\,L_j(s)+\sum_{r=1}^{m}[(\delta_{xj})_{xr}\,\Phi_{r1}(s)+(\delta_{xj})_{yr}\,\Phi_{r2}(s)+(\delta_{xj})_{zr}\,\Phi_{r3}(s)]=-\frac{\Delta_{xj}}{s}\\
&\Phi_{j3}(s)\,L_j(s)+\sum_{r=1}^{m}[(\delta_{zj})_{xr}\,\Phi_{r1}(s)+(\delta_{zj})_{yr}\,X_{r2}(s)+(\delta_{yj})_{zr}\,\Phi_{r3}(s)]=-\frac{\Delta_{zj}}{s}\\
&\sum_{r=1}^{m}[(\delta_{yj})_{xr}\,\Phi_{r1}(s)+(\delta_{yj})_{yr}\,\Phi_{r2}(s)+(\delta_{yj})_{zr}\,\Phi_{r3}(s)]=0
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

$$(j=1,\ldots,m)$$

Решая эту систему линейных уравнений первой степени, определим значения $\Phi_{j1}(s)$, $\Phi_{j2}(s)$, $\Phi_{j3}(s)$ и затем, пользуясь формулой обращения Римана-Меллина, из соотношения (2.39) найдем значения неизвестных усилий $X_j(t)$, $Y_j(t)$ и $Z_j(t)$ в виде контурных интегралов, которые вычисляются аналогично приведенному выше:

$$
X_j(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi_{j1}(s)\,e^{-st}ds,\quad Y_j(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi_{j2}(s)\,e^{-st}ds\quad(j=1,\ldots,m)
$$

$$
Z_j(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi_{j3}(s)\,e^{-st}ds
$$

Поступила в редакцию
14 VI 1949

Академия Наук
Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат. 1948.