Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

О РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ИНТЕГРАЛ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ МНИМОГО ЗНАЧКА И АРГУМЕНТА

Н. Н. Лебедев

(Ленинград)

1. В работе [1] было показано [1], что функция $f(x)$, определенная на промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяющая некоторым ограничениям общего характера, может быть представлена при помощи интегрального разложения

$$f(x) = \frac{2}{x\pi^2} \int_0^\infty K_{i\tau}(x)\, \tau \operatorname{sh} \pi\tau \, d\tau \int_0^\infty f(\xi) K_{i\tau}(\xi)\, d\xi \tag{1.1}$$

где $K_{i\tau}(x)$ — цилиндрическая функция Макдональда с мнимым значком и $x > 0$.

Условия, которые налагались на функцию $f(x)$, были следующие:

(a) $f(x)$ и $f'(x)$ ограничены и непрерывны на $(0, \infty)$

(b) $x^2 f(x) \in L(0, \infty)$, $\quad xf'(x) \in L(0, \infty)$

Формула (1.1) и ее различные модификации играют важную роль в решении проблем математической физики, связанных с интегрированием уравнения Лапласа и волнового уравнения при граничных условиях, заданных на поверхности двугранного угла или конуса, в теории сингулярных интегральных уравнений некоторого класса и т. д. [2–6].

Поэтому желательно установить более общие условия, расширяющие класс функций, для которого справедливо разложение (1.1), тем более, что ограничения, первоначально наложенные на функцию $f(x)$, не лежат в существе самой проблемы, а связаны лишь с методом доказательства. Результаты исследования могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема I. Пусть $f(x)$ — функция вещественного переменного, определенная на интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяющая условиям:

1° вариация функции $f(x)$ ограничена во всяком конечном промежутке (a, b), $0 < a < b$;

2° $\quad f(x) \lg x \in L\left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad f(x)\sqrt{x} \in L\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

---

[1] Указанная работа содержит опечатки. Наиболее существенными из этих опечаток являются очевидная опечатка в формулировке теоремы и набор символа $I_n(x)$ вместо $J_n(x)$.

Тогда для всякого $a<x<b$ справедливо разложение вида [1]

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=\frac{2}{x\pi^2}\int\limits_0^\infty K_{i\tau}(x)\,\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\,d\tau\int\limits_0^\infty f(\xi)K_{i\tau}(\xi)\,d\xi \tag{1.2}$$

Теорема II. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° и сверх того непрерывна на (a, b), то справедливо разложение (1.1). В этом случае интеграл, стоящий в правой части (1.2), сходится к $f(x)$ равномерно относительно x во всяком интервале, внутреннем к (a, b).

Формуле (1.1) можно придать более симметричную форму, если положить $f(x)\sqrt{x}=g(x)$. Тогда разложение (1.1) принимает вид

$$g(x)=\int\limits_0^\infty p(x,\tau)\,d\tau\int\limits_0^\infty p(\xi,\tau)\,g(\xi)\,d\xi \tag{1.3}$$

где

$$p(x,\tau)=\frac{(2\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau)^{\frac{1}{2}}}{\pi}\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} \tag{1.4}$$

На основании теоремы II разложение (1.3) верно при условии, что

1° функция $g(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на (a, b), $0<a<b$

2° $\qquad g(x)\dfrac{\lg x}{\sqrt{x}}\in L\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right),\qquad g(x)\in L\left(\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$

Если $g(x)$ не непрерывна, то левая часть формулы (1.3) должна быть заменена полусуммой $\frac{1}{2}[g(x-0)+g(x+0)]$.

Полагая в (1.3)

$$\int\limits_0^\infty p(x,\tau)\,g(x)\,dx=G(\tau) \tag{1.5}$$

получаем формулу обращения

$$g(x)=\int\limits_0^\infty p(x,\tau)\,G(\tau)\,d\tau \tag{1.6}$$

В работе [2] показывается (в несколько измененных обозначениях), что при некоторых ограничениях, наложенных на функцию $G(\tau)$, из формулы (1.6) в свою очередь вытекает формула (1.5).

Теория преобразований (1.5) — (1.6), основанная на сходимости в среднем и аналогичная теории Планшереля для преобразований Фурье [7], здесь не рассматривается.

Ниже в параграфах 2, 3 и 4 дано доказательство теорем I — II, причем параграф 3 содержит доказательство вспомогательного предложения; в параграфе 5 приведены различные примеры разложений рассматриваемого типа.

---

[1] Теорема I допускает еще некоторые обобщения; например, нет необходимости, чтобы $f(x)$ имела ограниченную вариацию во всяком конечном промежутке. В этом случае формула (1.2) верна для точки x, вблизи которой $f(x)$ имеет ограниченную вариацию.

2. Для доказательства теоремы I заметим предварительно, что из оценки[1] $|K_{i\tau}(x)| \leqslant K_0(x)$ и условий 1° и 2° вытекает, что внутренний интеграл в (1.2) сходится абсолютно и равномерно относительно τ в любом конечном промежутке $(0, T)$. Отсюда, на основании известной теоремы следует, что этот интеграл представляет непрерывную в этом промежутке функцию параметра τ. Повторный интеграл, взятый в конечных пределах

$$J(T, x) = \frac{2}{x\pi^2}\int\limits_0^T K_{i\tau}(x)\,\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\,d\tau \int\limits_0^\infty f(\xi)\,K_{i\tau}(\xi)\,d\xi \qquad (a < x < b) \qquad (2.1)$$

поэтому существует.

Ввиду равномерного характера сходимости порядок интегрирования в (2.1) может быть изменен, так что

$$J(T, x) = \frac{2}{x\pi^2}\int\limits_0^\infty f(\xi)\,d\xi \int\limits_0^T K_{i\tau}(x)\,K_{i\tau}(\xi)\,\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\,d\tau$$

или, если ввести новое переменное интегрирование θ, положив $\xi = xe^\theta$,

$$J(T, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(xe^\theta)\,e^\theta\,G(x, \theta, T)\,d\theta \qquad (2.2)$$

где

$$G = G(x, \theta, T) = \frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^T K_{i\tau}(x)\,K_{i\tau}(xe^\theta)\,\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\,d\tau \qquad (2.3)$$

Доказательство теоремы I равносильно доказательству существования предела

$$\lim_{T\to\infty} J(T, x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] \qquad (2.4)$$

Для достижения этой цели удобно представить функцию G в другой форме, воспользовавшись формулой [8]

$$\frac{2}{\pi}K_\mu(x)\,K_\mu(xe^\theta)\sin\mu\pi = \int\limits_{|\theta|}^\infty J_0(xe^{\theta/2}u)\,\mathrm{sh}\,\mu\alpha\,d\alpha \qquad (2.5)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя и

$$u = \sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\alpha - 2\,\mathrm{ch}\,\theta}, \qquad |R(\mu)| < \frac{1}{4}$$

[1] Эта оценка следует из интегрального представления

$$K_{i\tau}(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}\cos\tau t\,dt \qquad (x > 0)$$

Последняя формула показывает также, что $K_{i\tau}(x)$ есть вещественная функция параметра τ, ограниченная и непрерывная вместе со своей производной.

При $\mu = i\tau$ интеграл (2.5) сходится равномерно относительно τ на любом промежутке[1]. Поэтому можно, заменяя в (2.3) произведение цилиндрических функций интегралом (2.5), переставить затем порядок интегрирования. Тогда получим

$$G = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\theta|}^{\infty} J_0 (xe^{\theta/2} u) \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha T}{\alpha} d\alpha \tag{2.6}$$

Формула (2.6) может быть преобразована посредством интегрирования по частям, что дает

$$G = \frac{1}{\pi} \frac{\sin T\theta}{\theta} - R \tag{2.7}$$

где

$$R = R(\theta, T, x) = \frac{x}{\pi} e^{\theta/2} \int\limits_{|\theta|}^{\infty} J_1 (xe^{\theta/2} u) u_\alpha \frac{\sin \alpha T}{\alpha} d\alpha \tag{2.8}$$

причем $J_1(x)$ — функция Бесселя и

$$u_\alpha = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}}$$

Доказательство теоремы I приводится теперь к доказательству существования предела

$$\lim_{T \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{\theta}) e^{\theta} R(\theta, T, x) d\theta = 0 \tag{2.9}$$

Действительно, из условий, наложенных на $f(x)$, следует, что $f(x) \in L(0, \infty)$, поэтому $f(xe^{\theta}) e^{\theta} \in L(-\infty, +\infty)$ и в соответствии с интегралом Дирихле существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{\theta}) e^{\theta} \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)] \tag{2.10}$$

Из (2.2), (2.7), (2.9) и (2.10) вытекает существование требуемого предела (2.4).

Доказательство равенства (2.9) представляет основную трудность проблемы, обусловленную, главным образом, неабсолютной сходимостью интеграла (2.8), служащего для определения R. (Сходимость интеграла R является следствием сходимости интеграла G.)

В работе [1] связанные с этим затруднения были преодолены косвенным путем, потребовавшим дополнительных ограничений для рассматриваемого класса функций. Доказательство теоремы без этих ограничений может быть получено посредством детального изучения структуры формулы (2.8), позволяющего установить оценки для R, достаточные для доказательства равенства (2.9).

---

[1] Так как $J_0(x)\sqrt{x}$ ограничено и $(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta)^{-\frac{1}{2}} \in L(|\theta|, \infty)$

3. Докажем предварительно лемму.

Лемма. Для всякого $x \in (a, b)$ существуют два положительных независящих от x числа θ_1 и T_1, таких, что

$$|R|_{|\theta| \geqslant \theta_1,\, T \geqslant T_1} < \varepsilon e^{(\theta + |\theta|)/4}, \qquad |R|_{|\theta| \leqslant \theta_1,\, T \geqslant T_1} < \varepsilon \tag{3.1}$$

где ε — заданное произвольно малое положительное число.

Доказательство опирается на следующие свойства функций u и u_α:

1) при $\alpha \geqslant |\theta| + 2\lg 3$ величины u, u_α, $u_\alpha / \sqrt{u}$ суть монотонно возрастающие функции α;

2) при $\alpha \geqslant |\theta| + 2\lg 3$ справедливы неравенства

$$u_\alpha \geqslant \sqrt{2}\sqrt{e^{|\theta|}}, \qquad u \geqslant u_\alpha \sqrt{2} \geqslant 2\sqrt{e^{|\theta|}} \tag{3.2}$$

3) при $|\theta| + 2\lg 3 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2$ справедливо неравенство

$$(\sqrt{u})_{\alpha=\alpha_2} - (\sqrt{u})_{\alpha=\alpha_1} \leqslant \frac{2^{1/4}}{(u_\alpha)^{1/2}_{\alpha=\alpha_1}} \left[(u_\alpha)_{\alpha=\alpha_2} - (u_\alpha)_{\alpha=\alpha_1}\right] \tag{3.3}$$

Свойства 1) доказываются элементарно. Первое из неравенств (3.2) вытекает непосредственно из свойства 1), второе является следствием первого и тождества

$$u = \sqrt{u_\alpha^2 - e^{-|\theta|}} + \sqrt{u_\alpha^2 - e^{|\theta|}} \tag{3.4}$$

Неравенство (3.3) получается из формулы конечных приращений, если принять во внимание (3.4) и доказанные свойства 1) и 2).

Для доказательства леммы представим R в виде суммы

$$R = R_1 + R_2$$

интегралов

$$R_1 = \frac{x}{\pi} e^{\theta/2} \int\limits_{|\theta|}^{|\theta|+\beta} J_1(x e^{\theta/2} u)\, u_\alpha \frac{\sin \alpha T}{\alpha}\, d\alpha \tag{3.5}$$

$$R_2 = \frac{x}{\pi} e^{\theta/2} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{\infty} J_1(x e^{\theta/2} u)\, u_\alpha \frac{\sin \alpha T}{\alpha}\, d\alpha \tag{3.6}$$

где $\beta > 2\lg 3$ — положительное число, не зависящее от x, θ, T, значение которого будет фиксировано ниже.

Для оценки интеграла R_2 рассмотрим сначала интеграл с конечными пределами

$$L = \frac{x}{\pi} e^{\theta/2} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{|\theta|+B} J_1(x e^{\theta/2} u)\, u_\alpha \frac{\sin \alpha T}{\alpha}\, d\alpha \qquad (B > \beta) \tag{3.7}$$

Условимся в дальнейшем обозначать через A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ положительные постоянные, не зависящие от значений величин x, θ, T, β, B.

Интеграл (3.7) можно представить в виде

$$L = M + P - Q \tag{3.8}$$

где

$$M = \frac{x}{\pi} e^{\theta/2} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{|\theta|+B} \left[J_1(xe^{\theta/2}u) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\sin(xe^{\theta/2}u - \pi/4)}{e^{\theta/4}\sqrt{u}} \right] u_\alpha \frac{\sin \alpha T}{\alpha} d\alpha \tag{3.9}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}e^{\theta/4}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{|\theta|+B} \frac{u_\alpha}{\alpha\sqrt{u}} \cos\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} - \alpha T\right) d\alpha \tag{3.10}$$

$$Q = \frac{\sqrt{x}e^{\theta/4}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{|\theta|+B} \frac{u_\alpha}{\alpha\sqrt{u}} \cos\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} + \alpha T\right) d\alpha \tag{3.11}$$

Так как величина

$$\left[J_1(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sqrt{x^3}$$

ограничена при $x \geqslant 0$, то, принимая во внимание 1) и 2), из (3.9) имеем

$$|M| \leqslant \frac{A_1}{\sqrt{x}e^{\theta/4}\beta} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{|\theta|+B} \frac{u_\alpha}{\sqrt{u^3}} d\alpha = \frac{2A_1}{\sqrt{x}e^{\theta/4}\beta} \left[\frac{1}{(\sqrt{u})_{\alpha=|\theta|+\beta}} - \frac{1}{(\sqrt{u})_{\alpha=|\theta|+B}} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A_1}{\sqrt{x}e^{\theta/4}\beta} \frac{1}{(\sqrt{u})_{\alpha=|\theta|+\beta}} \leqslant \frac{\sqrt{2}A_1}{\sqrt{a}\beta} e^{-(\theta+|\theta|)/4} \leqslant \frac{A_2}{\beta} \tag{3.12}$$

Для оценки интеграла Q выражение (3.11) представим в виде

$$Q = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\sqrt{x}e^{\theta/4}} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{|\theta|+B} \left[\frac{1}{\alpha\sqrt{u}} - \frac{1}{\alpha\sqrt{u}} \frac{T}{(xe^{\theta/2}u_\alpha + T)} \right] \times$$

$$\times \cos\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} + \alpha T\right) d\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} + \alpha T\right)$$

В квадратных скобках стоит разность двух монотонно убывающих функций. Представив это выражение в виде разности двух интегралов и применяя к каждому из них вторую теорему о среднем, получаем [1]

$$|Q| \leqslant \frac{2}{\pi\sqrt{2\pi}\sqrt{x}e^{\theta/4}\beta} \frac{1}{(\sqrt{u})_{\alpha=|\theta|+\beta}} \left[1 + \frac{T}{xe^{\theta/2}(u_\alpha)_{\alpha=|\theta|+\beta} + T}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi\sqrt{2\pi}\sqrt{x}e^{\theta/4}\beta} \frac{1}{(\sqrt{u})_{\alpha=|\theta|+\beta}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi^3 a}\beta} e^{-(\theta+|\theta|)/4} \leqslant \frac{A_3}{\beta} \tag{3.13}$$

Оценка интеграла P является более сложной, так как в выражении (3.10) величина $xe^{\theta/2}u_\alpha - T$ может обращаться в нуль в интервале $(|\theta| + \beta, |\theta| + B)$. Примем в дальнейшем $T \geqslant 4b$.

---

[1] Так как

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \cos t \, dt \right| \leqslant 2$$

Исследование протекает несколько различным образом в зависимости от того, какой из следующих трех случаев имеет место

$$e^{\theta/2}(u_\alpha)_{\alpha=|\theta|+\beta} < \frac{T}{x}\left(1-\sqrt{\frac{x}{T}}\right) \tag{3.14}$$

$$\frac{T}{x}\left(1-\sqrt{\frac{x}{T}}\right) \leqslant e^{\theta/2}(u_\alpha)_{\alpha=|\theta|+\beta} \leqslant \frac{T}{x}\left(1+\sqrt{\frac{x}{T}}\right) \tag{3.15}$$

$$\frac{T}{x}\left(1+\sqrt{\frac{x}{T}}\right) < e^{\theta/2}(u_\alpha)_{\alpha=|\theta|+\beta} \tag{3.16}$$

Предположим, что имеет место случай (3.14).

Тогда в силу монотонности u_α каждое из уравнений

$$xe^{\theta/2}u_\alpha = T\left(1-\sqrt{\frac{x}{T}}\right), \qquad xe^{\theta/2}u_\alpha = T\left(1+\sqrt{\frac{x}{T}}\right)$$

будет иметь единственный корень.

Эти корни (будем их обозначать соответственно через α_1 и α_2 при этом $\alpha_1 < \alpha_2$) принадлежат интервалу $(|\theta|+\beta, \infty)$.

Примем в дальнейшем, что в интеграле (3.7) B выбрано настолько большим, что $|\theta| + B > \alpha_2$. Тогда интеграл P можно представить в виде суммы трех интегралов $P_1 + P_2 + P_3$, аналогичных (3.10) в пределах от $|\theta|+\beta$ до α_1, от α_1 до α_2 и от α_2 до $|\theta|+B$.

Первый из этих интегралов P_1 можно представить в виде

$$P_1 = \frac{\sqrt{x}\,e^{\theta/4}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|\theta|+\beta}^{\alpha_1} \frac{u_\alpha}{\alpha\sqrt{u}\,(xe^{\theta/2}u_\alpha - T)} \cos\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} - \alpha T\right) d\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} - \alpha T\right) \tag{3.17}$$

На основании свойства 1) функция

$$\frac{u_\alpha}{\sqrt{u}}\,\frac{1}{T - xe^{\theta/2}u_\alpha} \tag{3.18}$$

монотонно возрастает в промежутке интегрирования. Поэтому, применяя к (3.17) вторую теорему о среднем, находим

$$P_1 = -\frac{\sqrt{x}}{\pi\sqrt{2\pi}}\,e^{\theta/4}\left\{\frac{u_\alpha}{\sqrt{u}\,(T - xe^{\theta/2}u_\alpha)}\right\}_{\alpha=\alpha_1} \int\limits_{\xi}^{\alpha_1} \frac{1}{\alpha}\cos\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} - \alpha T\right) \times$$
$$\times d\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} - \alpha T\right) \tag{3.19}$$

где $|\theta| + \beta \leqslant \xi \leqslant \alpha_1$, или после повторного применения теоремы

$$P_1 = -\frac{\sqrt{x}}{\pi\sqrt{2\pi}}\,e^{\theta/4}\left\{\frac{u_\alpha}{\sqrt{u}\,(T - xe^{\theta/2}u_\alpha)}\right\}_{\alpha=\alpha_1} \frac{1}{\xi} \int\limits_{\xi}^{\xi_1} \cos\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} - \alpha T\right) \times$$
$$\times d\left(xe^{\theta/2}u - \frac{\pi}{4} - \alpha T\right) \tag{3.20}$$

где $\xi \leqslant \xi_1 \leqslant \alpha_1$.

Из последнего равенства, если принять во внимание условие (3.2)[1] вытекает оценка

$$|P_1| \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{\pi\sqrt{2\pi\beta}}\, e^{\theta/4}\left\{\frac{u_\alpha}{\sqrt{u}\,(T - xe^{\theta/2}u_\alpha)}\right\}_{\alpha=\alpha_1} \leqslant \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi^3\beta}}\,\frac{(\sqrt{xe^{\theta/2}u_\alpha})_{\alpha=\alpha_1}}{T-(xe^{\theta/2}u_\alpha)_{\alpha=\alpha_1}} =$$

$$= \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi^3\beta}}\,\frac{(1-\sqrt{x/T})^{1/2}}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi^3}\,\beta\,\sqrt{a}} = \frac{A_4}{\beta} \tag{3.21}$$

Далее воспользовавшись неравенством (3.3), получаем

$$|P_2| \leqslant \frac{\sqrt{x}\,e^{\theta/4}}{\pi\sqrt{2\pi\beta}}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{u_\alpha d\alpha}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{2}\,e^{\theta/4}}{\sqrt{\pi^3\beta}}\sqrt{x}\left[(\sqrt{u})_{\alpha=\alpha_2}-(\sqrt{u})_{\alpha=\alpha_1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi^3\beta}}\,\frac{(xe^{\theta/2}u_\alpha)_{\alpha=\alpha_2}-(xe^{\theta/2}u_\alpha)_{\alpha=\alpha_1}}{(\sqrt{xe^{\theta/2}u_\alpha})_{\alpha=\alpha_1}} = \frac{2^{7/4}}{\sqrt{\pi^3\beta}}\,\frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x/T})^{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{7/4}}{\sqrt{\pi^3\beta}}\,\frac{\sqrt{b}}{(1-\sqrt{b/T})^{1/2}} \leqslant \frac{2^{9/4}\sqrt{b}}{\sqrt{\pi^3\beta}} = \frac{A_5}{\beta} \tag{3.22}$$

Наконец, интеграл P_3 может быть записан в форме

$$P_3 = \frac{\sqrt{x}\,e^{\theta/4}}{\pi\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha_2}^{|\theta|+B}\frac{u_\alpha}{\alpha\sqrt{u}\,(xe^{\theta/2}u_\alpha - T)}\cos\left(xe^{\theta/2}u-\frac{\pi}{4}-\alpha T\right)\times$$

$$\times\, d\left(xe^{\theta/2}u-\frac{\pi}{4}-\alpha T\right)$$

Множитель при косинусе представляет монотонно убывающую функцию. Применяя вторую теорему о среднем, получаем, также как и выше

$$|P_3| \leqslant \frac{2\sqrt{x}\,e^{\theta/4}}{\pi\sqrt{2\pi}\,\beta}\left\{\frac{u_\alpha}{\sqrt{u}\,(xe^{\theta/2}u_\alpha - T)}\right\}_{\alpha=\alpha_2} \leqslant \frac{2^{1/4}}{\beta\sqrt{\pi^3}}\,\frac{(\sqrt{xe^{\theta/2}u_\alpha})_{\alpha=\alpha_2}}{(xe^{\theta/2}u_\alpha)_{\alpha=\alpha_2}-T} =$$

$$= \frac{2^{1/4}}{\beta\sqrt{\pi^3}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{\frac{x}{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2^{3/4}}{\beta\sqrt{\pi^3}\sqrt{a}} = \frac{A_6}{\beta} \tag{3.23}$$

Из (3.21) — (3.23) следует

$$|P| = |P_1+P_2+P_3| \leqslant \frac{A_7}{\beta} \qquad (A_7 = A_4 + A_5 + A_6) \tag{3.24}$$

Исследование двух других случаев может быть выполнено аналогичным образом и приводит к той же оценке (3.24).

---

[1] Именно, условие $u \geqslant u_\alpha\sqrt{2}$, из которого следует

$$\frac{1}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{1}{2^{1/4}}\,\frac{1}{\sqrt{u_\alpha}}$$

Соединяя вместе результаты оценок (3.12), (3.13) и (3.24), получаем согласно (3.8), что для всех B, начиная с некоторого,

$$|L| \leqslant \frac{A_8}{\beta} \tag{3.25}$$

Так как интеграл R_2 сходится, отсюда следует, что

$$|R_2| \leqslant \frac{A_8}{\beta} \tag{3.26}$$

Взяв достаточно большое $\beta = \beta(\varepsilon)$, будем иметь

$$|R_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.27}$$

где ε — заданное произвольное малое положительное число.

Считая, что β фиксировано таким образом, что неравенство (3.27) выполнено, рассмотрим теперь интеграл R_1, определенный формулой (3.5).

Так как произведение $\sqrt{x}\, J_1(x)$ ограничено при $x \geqslant 0$, то при любом значении T

$$|R_1| \leqslant \frac{A_9\sqrt{x}}{|\theta|} e^{\theta/4} \int\limits_{|\theta|}^{|\theta|+\beta} \frac{u\alpha}{\sqrt{u}}\, d\alpha = \frac{2A_9\sqrt{x}}{|\theta|} e^{\theta/4}[2\operatorname{ch}(|\theta|+\beta) - 2\operatorname{ch}\theta]^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A_9\sqrt{x}}{|\theta|} e^{(\theta+|\theta|+\beta)/4} \leqslant \frac{2A_9\sqrt{b}}{|\theta|} e^{(\theta+|\theta|+\beta)/4} = \frac{A_{10}}{|\theta|} e^{\beta/4} e^{(\theta+|\theta|)/4} \tag{3.28}$$

Очевидно всегда можно выбрать такое достаточно большое $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon)$, что

$$|R_1|_{|\theta| \geqslant \theta_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e^{(\theta+|\theta|)/4} \tag{3.29}$$

Принимая в дальнейшем, что θ_1 выбрано так, что (3.29) имеет место и $T \geqslant 4b$, для $R = R_1 + R_2$ находим согласно (3.5), (3.6) и оценок (3.27), (3.29), что

$$|R|_{|\theta| \geqslant \theta_1,\ T \geqslant 4b} < \varepsilon e^{(\theta+|\theta|)/4} \tag{3.30}$$

Зафиксировав θ_1, воспользуемся для оценки интеграла R_1 при $|\theta| \leqslant \theta_1$ формулой интегрирования по частям. Таким образом, исходя из представления (3.5), получим

$$R_1 = -\frac{xe^{\theta/2}}{\pi T} \int\limits_{|\theta|}^{|\theta|+\beta} J_1(xe^{\theta/2}u) \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha u}\, d\cos\alpha T = \tag{3.31}$$

$$= \frac{xe^{\theta/2}}{\pi T}\left\{\frac{1}{2} xe^{\theta/2} \frac{\operatorname{sh}|\theta|}{|\theta|}\cos T\theta - \left[J_1(xe^{\theta/2}u)\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha u}\cos\alpha T\right]_{\alpha=|\theta|+\beta} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|\theta|}^{|\theta|+\beta} \cos\alpha T\left[\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\alpha} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha^2}\right)\frac{1}{u} J_1(xe^{\theta/2}u) - \frac{xe^{\theta/2}}{u^2} J_2(xe^{\theta/2}u)\frac{\operatorname{sh}^2\alpha}{\alpha}\right]d\alpha\right\}$$

где $J_2(x)$ — функция Бесселя.

Принимая во внимание ограниченность функций

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x}e^{-x}, \quad \left(\frac{\operatorname{ch} x}{x}-\frac{\operatorname{sh} x}{x^2}\right)e^{-x}, \quad \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x}e^{-2x}, \quad \frac{J_1(x)}{x}, \quad \frac{J_2(x)}{x^2}$$

при любом $x \geqslant 0$, имеем

$$|R_1| \leqslant \frac{1}{T}\left\{A_{11}x^2e^{\theta+|\theta|} + A_{12}x^2e^{\theta+|\theta|+\beta} + \int\limits_{|\theta|}^{|\theta|+\beta}[A_{13}x^2e^{\theta+\alpha} + A_{14}x^4e^{2\theta+2\alpha}]d\alpha\right\} =$$

$$= \frac{1}{T}\left\{(A_{11}+A_{12}e^{\beta})x^2e^{\theta+|\theta|} + A_{13}(e^{\beta}-1)x^2e^{\theta+|\theta|} + A_{14}\frac{(e^{2\beta}-1)}{2}x^4e^{2\theta+2|\theta|}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b^2}{T}e^{2\theta+2|\theta|+2\beta}\{A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}b^2\} = \frac{A_{15}}{T}e^{2\theta+2|\theta|+2\beta}$$

Если теперь $|\theta| \leqslant \theta_1$, то из последней оценки следует

$$|R_1|_{|\theta|\leqslant\theta_1} \leqslant \frac{A_{15}}{T}e^{4\theta_1+2\beta} \tag{3.32}$$

Очевидно всегда можно выбрать такое достаточно большое $T_1 = T_1(\varepsilon) > 4b$, что будет выполнено неравенство

$$|R_1|_{|\theta|\leqslant\theta_1, T\geqslant T_1} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.33}$$

Следовательно, для $R = R_1 + R_2$ согласно (3.5), (3.6) и оценок (3.27), (3.33) имеем

$$|R|_{|\theta|\leqslant\theta_1, T\geqslant T_1} < \varepsilon \tag{3.34}$$

Это неравенство и неравенство (3.30) доказывают лемму.

4. После того как лемма доказана, доказательство существования предела (2.9), а тем самым и доказательство теоремы I, представляется уже сравнительно простым делом. Полагая, что θ_1 и T_1 выбраны в соответствии с предыдущим параграфом имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{\theta})e^{\theta}R\,d\theta\right|_{T\geqslant T_1} \leqslant \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\theta_1}|f(xe^{\theta})|e^{\theta}d\theta + \varepsilon\int\limits_{\theta_1}^{+\infty}|f(xe^{\theta})|e^{3\theta/2}\,d\theta =$$

$$= \frac{\varepsilon}{x}\int\limits_{0}^{x\exp\theta_1}|f(\xi)|\,d\xi + \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^3}}\int\limits_{x\exp\theta_1}^{\infty}|f(\xi)|\sqrt{\xi}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left\{\frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty}|f(\xi)|\,d\xi + \frac{1}{\sqrt{a^3}}\int\limits_0^{\infty}|f(\xi)|\sqrt{\xi}\,d\xi\right\} \leqslant A_{16}\varepsilon \tag{4.1}$$

так как по условию 2° теоремы I

$$f(x) \in L(0,\infty), \qquad f(x)\sqrt{x} \in L(0,\infty)$$

Неравенство (4.1) показывает, что при возрастании T рассматриваемый интеграл стремится к нулю, что и доказывает теорему I.

Теорема II является следствием теоремы I. Равномерный характер сходимости вытекает из равномерности оценки (4.1) относительно x и известного факта равномерности предельного перехода (2.10) для непрерывной функции (см., например,[7] стр. 21).

В заключение приведем формулировку теоремы, которая в известной степени может рассматриваться как обратная теореме II.

Теорема III. Пусть $F(\mu/i)$ произвольная четная аналитическая функция комплексного переменного $\mu = \sigma + i\tau$, голоморфная в полосе $-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta$ и удовлетворяющая условиям

$$1)\qquad F\left(\frac{\sigma+i\tau}{i}\right)(\sigma+i\tau)\,e^{\frac{1}{2}\pi|\tau|} \in L(-\infty,\infty)$$

при любых $-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta$,

$$2)\qquad \left|F\left(\frac{\sigma+i\tau}{i}\right)(\sigma+i\tau)\right| e^{\frac{1}{2}\pi|\tau|} \to 0$$

равномерно относительно σ внутри рассматриваемой полосы при $\tau \to \infty$.

Тогда, полагая для всякого $x > 0$

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}\pi\tau F(\tau) K_{i\tau}(x)\,d\tau \tag{4.2}$$

имеем обратно для любого вещественного τ

$$F(\tau) = \int_0^\infty f(x) K_{i\tau}(x)\,dx \tag{4.3}$$

Доказательство теоремы в основных чертах совпадает с доказательством аналогичной теоремы работы [2].

5. Примерами на формулы (1.1)—(1.2) могут служить следующие представления:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi x}\int_0^\infty K_{i\tau}(x)\tau^2 d\tau \tag{5.1}$$

$$K_0(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty K_{i\tau}(x)\,\tau \operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau \tag{5.2}$$

$$K_{is}(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty K_{i\tau}(x)\,\tau\,\frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi s + \operatorname{ch}\pi\tau}\,d\tau \qquad (-\infty < s < \infty) \tag{5.3}$$

$$e^{-x^2} = \frac{e^{1/8}}{x\sqrt{\pi^3}}\int_0^\infty K_{i\tau}(x) K_{\frac{1}{2}i\tau}\left(\frac{1}{8}\right)\tau \operatorname{sh}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{\pi x}\int_0^\infty K_{i\tau}(x) S_{i\tau}(1)\,\tau \operatorname{sh}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau \tag{5.5}$$

где

$$S_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x\operatorname{sh}t}\operatorname{ch}t\nu\,dt \tag{5.6}$$

Функция $S_\nu(x)$ может быть выражена через функции Бесселя и Ангера. Имеем (см.[9] стр. 308—315)

$$S_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} [\boldsymbol{J}_\nu(x) - \boldsymbol{J}_{-\nu}(x) + J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)] \tag{5.7}$$

где $\boldsymbol{J}_\nu(x)$ — функция Ангера

$$\boldsymbol{J}_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(\nu\theta - x \sin\theta)\, d\theta \tag{5.8}$$

Вычисление интеграла

$$\int\limits_0^\infty f(\xi) K_{i\tau}(\xi)\, d\xi$$

в этих примерах легко выполняется путем замены функции $K_{i\tau}(\xi)$ одним из ее интегральных представлений.

В отношении приложений рассматриваемых формул (1.1) — (1.2) и их различных модификаций к проблемам математической физики сошлемся на цитированные выше работы[2—6].

Поступила в редакцию
11 II 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н. Об одной формуле обращения. ДАН. 1946. Т. 52. № 8. Стр. 661.
2. Конторович М. И., Лебедев Н. Н. Об одном методе решения некоторых задач теории диффракции и родственных ей проблем. ЖЭТФ. 1938. Т. 8. Вып. 10—11. Стр. 1192.
3. Лебедев Н. Н., Конторович М. И. О применении формул обращения к решению некоторых задач электродинамики. ЖЭТФ. 1939. т. 9. Вып. 6, стр. 729—741.
4. Гринберг Г. А. О решении определенного класса электростатических и родственных им проблем. ЖЭТФ. 1940. Т. 10. Вып. 9—10. Стр. 1087.
5. Гринберг Г. А. Интегральные преобразования в электростатике и теории распространения электромагнитных волн. Изв. АН СССР, сер. физ. 1943. Т. 7. № 1—2. Стр. 20.
6. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН. СССР. 1948.
7. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ. 1948.
8. Dixon A. L. Ferrar F. L. Quarterly J. Math. 1933. Vol. 4. p. 193, 297.
9. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge. 1922.