КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

И. Г. Малкин. Методы Ляпунова в теории нелинейных колебаний. (Современные проблемы механики.) Гостехиздат. 1949. Стр. 243.

Книга посвящена изучению периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, к которым приводят многие важные проблемы физики и механики. Первым шагом в этой области был введенный Пуанкаре метод разложения решения по степеням малого параметра. В классической диссертации Ляпунова *Общая задача устойчивости движения* для одного достаточно широкого класса систем дифференциальных уравнений было установлено существование периодических решений и указан метод их приближенного вычисления. Метод малого параметра, начиная с 20-х годов нашего века, прочно укрепился в исследованиях по математической физике, в первую очередь в трудах школы Мандельштама (Мандельштам, Папалекси, Витт, А. А. Андронов и др.). И. Г. Малкин ставит свей целью дать доступное изложение теории нелинейных колебаний, основанных на методах Ляпунова и Пуанкаре; вместе с тем он излагает свои последние исследования, где он получает периодические решения, которые не удалось обнаружить ставшим уже классическим методом исследования квазилинейных систем.

Книга состоит из семи глав. В главе I излагаются теоремы Пуанкаре о периодических решениях системы уравнений, содержащих параметр μ, при малом значении μ, близких к данному периодическому решению при $\mu = 0$. Сообразно плану книги, рассчитанному на читателя-прикладника, в тексте (стр. 14) не доказываются «хорошо известные» теоремы об аналитической зависимости решений от начальных данных и от параметра; но следовало бы дать ссылку на сочинения, где читатель мог бы ознакомиться с этими доказательствами. В главе II сначала излагается теория периодических решений квазилинейного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

где k — постоянная, μ — малый параметр, F аналитична по $x, \dot{x}, \mu$; F и f — периодические функции t периода 2π, разлагающиеся в ряд Фурье. Рассматривается сначала нерезонансный случай, затем резонансный, когда k близко к целому числу n, $n^2 - k^2 = \mu a$, и наконец резонанс n-го рода, когда собственная частота близка к n^{-1} от частоты возмущающей силы. Далее рассматриваются системы с n степенями свободы. Отдельный параграф посвящен автономным (т. е. не содержащим явно времени) системам с одной степенью свободы

$$\frac{dx^2}{dt^2} + k^2x = \mu f(\dot{x}, x, \mu)$$

и еще один раздел автономным системам с n степенями свободы.

В одном параграфе только намечена теория предельных циклов на фазовой плоскости, в противоположность известной книге Андронова и Хайкина. Изложение сопровождается примерами с проведенными вычислениями, так что внимательный читатель может научиться применять общую теорию к конкретным задачам.

Глава III (Устойчивость периодических решений) в основном излагает классические результаты: уравнения в вариациях , уравнения с периодическими коэффициентами, теоремы Ляпунова об устойчивости периодических решений (при помощи квадратической функции в качестве функции Ляпунова из 2-й методы). Приводится также, к сожалению без доказательства, теорема Андронова и Витта об устойчивости периодических движений автономных систем, где один из характеристических показателей необходимо равен нулю; в этом случае, сомнительном с точки зрения теории Ляпунова, если остальные показатели имеют отрицательные действительные части, имеет место устойчивость. Теорема вполне классическая, и следовало бы дать в тексте ее доказательство. В заключительном параграфе главы критерии устойчивости применяются к решениям, найденным во II главе.

Глава IV служит введением к собственным исследованиям автора. Он называет «системами Ляпунова» систему

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{01}x_1 + \ldots + a_{sn} + X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\rho = 1, 2, \ldots n)$$

где коэффициенты a_{js} постоянные, X_s — степенные ряды, начинающиеся с членов не ниже второго порядка, характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и не имеет нулевого корня. Эта система приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y$$

$$\frac{dx_s}{dt} = b_{s,}x_1 + \ldots + b_{sm}x_m + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

где X, Y, X_s не содержат членов первого порядка. Наконец предполагается, что система допускает аналитический первый интеграл вида

$$H = x^2 + y^2 + W(x_1, \ldots, x_m) + S = \text{const}$$

где W-квадратическая форма, S содержит члены третьего и высших порядков.

Для такой системы автор новым способом доказывает теоремы Ляпунова о существовании однопараметрического семейства периодических решений и излагает метод их приближенного нахождения.

В двух последних главах (V, VI) излагается новая построенная теория нахождения периодических решений систем, близких к системам Ляпунова. Обычно рассматривавшиеся до сих пор квазилинейные системы (их теория изложена в главе II) характеризовались тем, что при $\mu = 0$ система обращается в линейную; И. Г. Малкин рассматривает случай, когда система при $\mu = 0$ (порождающая система) есть система Ляпунова в смысле данного выше определения. Изыскиваются для малых значений параметра μ периодические решения, близкие к периодическим решениям системы Ляпунова, если возмущающая сила имеет период 2π.

В случае систем с одной степенью свободы (гл. V) автор для простоты ограничивается случаем, когда система является консервативной ($H = \text{const}$ — интеграл энергии). Существуют периодические решения, близкие к решениям порождающего уравнения периода $2\pi/n$, а также к тривиальному решению $x = y = 0$. Невыясненным теоретически остается вопрос о существовании достаточного малого решения c_n уравнения (30.7) (автор сам отмечает это обстоятельство). Искомые периодические решения представляются рядами по целым степеням μ. В случае резонанса (λ отличается от целого n на величину порядка μ) также находится периодическое решение, — в виде ряда по дробным степеням μ. Автор приводит важный пример, где его метод обнаруживает периодическое решение, ускользающее при трактовке уравнения, как квазилинейного. После анализа устойчивости в последнем параграфе исследуется предложенным методом уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x - \gamma x^3 = \mu\left(a\cos mt + b\cos nt - 2H\frac{dx}{dt}\right) \qquad (\gamma > 0, H > 0, \mu > 0)$$

где m и n-целые числа. Конец этого исследования — вопрос о том, какие из возможных колебаний являются устойчивыми и, следовательно, физически реальными, изложен весьма сжато и в силу этого недостаточно убедительно.

В последней главе (VI) излагается изыскание периодических решений систем с n степенями свободы, близких к системам Ляпунова.

Изложение книги в целом ясное и четкое; при изложении результатов своих предшественников автор почти всюду дает новые оригинальные доказательства. Многочисленные примеры на действительное вычисление приближений показывают в авторе большой вкус к вычислительной математике и могут многому научить читателя. Книга рассчитана на прикладника (механика, физика) с достаточно высоким уровнем математической культуры, и несколько большее углубление чисто теоретической стороны не повредило бы ей.

В. Степанов

11