Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВУХ КОРНЕЙ С НУЛЕВЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧАСТЯМИ

И. М. Волк

(Свердловск)

1. Допустим, что правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения, число которых обозначим через $n+2$, являются не зависящими от времени голоморфными[1] функциями отклонений, причем соответствующая система линейных уравнений первого приближения удовлетворяет условию: среди корней характеристического уравнения имеются два с нулевыми и n с отрицательными вещественными частями. При этих допущениях всегда существует однородное, линейное, с постоянными вещественными коэффициентами, неособенное преобразование, приводящее уравнения возмущенного движения к виду

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y;\ x_1, \ldots, x_n), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y;\ x_1, \ldots, x_n)$$

$$\frac{dx_\nu}{dt} = p_{\nu 1} x_1 + \ldots + p_{\nu n} x_n + p_\nu x + q_\nu y + X_\nu(x, y;\ x_1, \ldots, x_n) \qquad (1.1)$$

$$(\nu = 1, \ldots, n)$$

где правые части являются не зависящими от t голоморфными функциями величин $x, y, x_1, \ldots, x_n$, обращающимися в нуль при $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$; в разложениях X_ν члены первого измерения отсутствуют, а в разложениях X и Y, если такие члены и присутствуют, то не содержат переменных $x_1, \ldots, x_n$ и при наличии в характеристическом уравнении корней $\mp k\sqrt{-1}$ $(k \neq 0)$ имеют соответственно вид ky и $-kx$; величины $p_{\nu j}$ таковы, что все корни уравнения

$$D(\lambda) = \| p_{\nu j} - \delta_{\nu j}\lambda \| = 0$$

имеют отрицательные вещественные части. Кроме того, не умаляя общности решаемой здесь задачи об устойчивости невозмущенного движения, можно полагать, что $p_\nu = q_\nu = 0$ в уравнениях (1.1) и функции X, Y, X_ν таковы, что наинизший порядок членов в разложениях $X(x, y;\ 0, \ldots, 0)$ и $Y(x, y;\ 0, \ldots, 0)$, который обозначим через m (а совокупность членов порядка m в этих разложениях — соответственно через $X^{(m)}(x, y)$ и $Y^{(m)}(x, y)$), не выше наинизшего порядка членов в разложениях $X_\nu(x, y;\ 0, \ldots, 0)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, ибо в противном случае этого добьемся при помощи преобразования[2]

$$x_\nu = y_\nu + u_\nu(x, y) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

где $y_1, \ldots, y_\nu$ — новые переменные, а $u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)$ — голоморфные функции от x и y, обращающиеся в нуль при $x = y = 0$, которые единственным образом определяются системой соотношений:

$$p_{\nu 1} u_1 + \ldots + p_{\nu n} u_n + p_\nu x + q_\nu y + X_\nu(x, y;\ u_1, \ldots, u_n) = 0$$

$$(\nu = 1, \ldots, n)$$

---

[1] Говоря о голоморфности функций относительно некоторых величин, имеем каждый раз в виду какую-либо окрестность нулевых значений этих величин.

[2] Аналогичное преобразование применено И. Г. Малкиным в работе [1].

В предположении, что система (1.1) уже приведена к указанному виду, имеет место следующее предложение.

Теорема. Если форма $xY^{(m)}(x,y)-yX^{(m)}(x,y)$ *знакоопределенна и система* (1.1) *допускает не зависящий от* t *голоморфный интеграл* H $(x,\ y;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *такой, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H(\varepsilon x,\ \varepsilon y;\ \varepsilon^m x_1,\ \ldots,\ \varepsilon^m x_n)}{H(\varepsilon x,\ \varepsilon y;\ 0,\ \ldots,\ 0)}=1$$

и член наинизшего порядка в разложении функции $H(x,\ y;\ 0,\ \ldots,\ 0)$ *в ряд по степеням* $x,\ y$ *есть знакоопределенная форма от этих переменных, то:*

а) *невозмущенное движение устойчиво;*

б) *при любых численно достаточно малых начальных значениях* x_0 *и* y_0 *переменных* x *и* y *система* (1.1) *допускает периодическое решение, устойчивое притом; оно содержит две произвольные постоянные*

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2},\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0}$$

непрерывно относительно этих постоянных и t, *обращается в* $x=y=x_1=\ldots$ $\ldots=x_n=0$ *при* $x_0=y_0=0$, *имеет период, для* $m>1$, *неограниченно возрастающий при* $(x_0^2+y_0^2)\to 0$, *и может быть приближенно построено способом, указываемым ниже.*

2. Докажем это. Форму $xY^{(m)}(x,y)-yX^{(m)}(x,y)$ обозначим через $G(x,\ y)$ и заметим, что при условии теоремы эту форму, не умаляя общности теоремы, можно считать знакоопределенной положительной, ибо в противном случае этого добьемся, поменяв ролями переменные x и y; заметим еще, что при том же условии m есть число нечетное и если среди корней характеристического уравнения содержатся нулевые, то необходимо имеет место $m>1$. Заметим, кроме того, что в силу существования интеграла $H(x,\ y;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\text{const}=A$ и условия, наложенного на последний в теореме, между величинами $r,\ \vartheta,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$, связанными с величинами $x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ равенствами

$$x=r\cos\vartheta,\qquad y=r\sin\vartheta,\qquad x_\nu=z_\nu r^m\qquad(\nu=1,\ \ldots,\ n)\tag{2.1}$$

необходимо существует зависимость

$$r=\mu q\left[1+\mu F(\mu;\ \vartheta;\ z_1,\ \ldots,\ z_n)\right]\tag{2.2}$$

где μ — произвольная постоянная (причем произвольной постоянной A распорядимся так, чтобы при $\vartheta=\vartheta_0$ было $r=\mu$), F — голоморфная функция величин $\mu,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$, а q — непрерывная функция от ϑ, ограниченная и сверху и снизу отличными от нуля величинами, имеющими одинаковый знак; правая часть относительно ϑ является периодической, с периодом 2π.

Система (1.1) эквивалентна системе, состоящей из соотношения (2.2) и дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_\nu}{d\vartheta}=\mu^{1-m}K\left[p_{\nu 1}z_1+\ldots+p_{\nu n}z_n+P_\nu+\mu Z_\nu(\mu;\ \vartheta;\ z_1,\ \ldots,\ z_n)\right]\tag{2.3}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\mu^{m-1}q^{m-1}\left[g+\mu\theta(\mu;\ \vartheta;z_1,\ldots,z_n)\right]\qquad(\nu=1,\ \ldots,\ n)\tag{2.4}$$

которые получим из системы (1.1) после подстановки (2.1) и последующего исключения переменной r при помощи соотношения (2.2). Здесь $g=G(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta)$ (ограничена и сверху и снизу положительными величинами), $K=g^{-1}q^{m-1}$, а Z_ν и θ суть функции, разложения которых в ряды по степеням $\mu,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$ не содержат членов ниже нулевого измерения, причем коэффициенты этих разложений так же, как и величины P_ν, суть непрерывные периодические функции от ϑ с периодом 2π.

Из вида подстановки (2.1), соотношения (2.2) и уравнения (2.4) (с учетом отмеченных свойств величин $g,\ q$ и m) следует, что первая часть теоремы будет доказана, если докажем, что в силу уравнений (2.3) найдутся такие не зависящие от ϑ положительные числа $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$, что при любых $|\mu| \leqslant \rho$ и любых начальных (при $\vartheta = \vartheta_0$) значениях $a_1, \ldots, a_n$, переменных $z_1, \ldots, z_n$, удовлетворяющих условию $|a_j| \leqslant \rho_j$, будет выполняться требование $|z_j|$ ограничено для любого $\vartheta \geqslant \vartheta_0$.

К системе (2.3) приложим основные предложения работ автора [2] и [3]. По отношению к этой системе, удовлетворяющей всем требованиям, наложенным на «основные»[3] системы, рассматриваемые в упомянутых работах, «упрощенной» системой является

$$\frac{dz_\nu^\circ}{d\vartheta} = \mu^{1-m} K (p_{\nu 1} z_1^\circ + \cdots + p_{\nu n} z_n^\circ + P_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Она допускает периодическое решение $u_1(\mu, \vartheta), \ldots, u_n(\mu, \vartheta)$, удовлетворяющее всем требованиям работы [2] которому соответствует «приводимая по параметру» «определяющая» система

$$\frac{dr_\nu}{d\vartheta} = \mu^{1-m} K (p_{\nu 1} r_1 + \cdots + p_{\nu n} r_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Характеристические показатели последней суть $\mu^{1-m}\alpha\lambda_1, \ldots, \mu^{1-m}\alpha\lambda_n$, где

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K d\vartheta > 0$$

и $\lambda_1, \ldots, \lambda_u$ — корни уравнения $D(\lambda) = 0$, которые по условию имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, выполняются, во-первых, все условия основного предложения работы [2], согласно которому существует некоторый отрезок $|\mu| \leqslant L$, во всех точках которого система (2,3) допускает непрерывное периодическое решение $z_1^*(\vartheta), \ldots, z_n^*(\vartheta)$, удовлетворяющее условию $\lim_{\mu \to 0} z_j^*(\vartheta) = u_j(0, \vartheta)$ $(j = 1, \ldots, n)$; во-вторых, выполняются все условия пункта „a“ основного предложения работы [3], согласно которому существует некоторый отрезок $|\mu| \leqslant l$, во всех точках которого упомянутое периодическое решение асимптотически устойчиво.

Итак, для всякого положительного η, как бы мало оно ни было, найдутся такие не зависящие от ϑ положительные числа $h, h_1, \ldots, h_n$, что при любых $|\mu| \leqslant h$ и $|a_j - z_j^*(\vartheta_0)| \leqslant h$ в силу дифференциальных уравнений (2.3) имеет место $|z_j - z_j^*(\vartheta)| < \eta$ при любом $\vartheta \geqslant \vartheta_0$. Отсюда, учитывая еще, что $\lim_{\mu \to 0} z_j^*(\vartheta) = u_j(0, \vartheta)$, наконец, заключаем, что упомянутые выше числа $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$ действительно существуют. А это, как ранее установлено, доказывает первую часть теоремы.

Как следует из работы [2], допускаемое системой (2.3) в отрезке $|\mu| \leqslant l$ асимптотически устойчивое периодическое решение $z_1^*(\vartheta), \ldots, z_n^*(\vartheta)$ может быть построено под видом абсолютно сходящихся рядов

$$z_j^* = u_j^0 + \mu u_j^{(1)} + \mu^2 u_j^{(2)} + \cdots \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

в которых u_j^0 — «главная часть» величины $u_j(\mu, \vartheta)$, а величины $u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, \ldots$ суть непрерывные относительно μ и ϑ функции, последовательно (сначала $u_j^{(1)}$, затем $u_j^{(2)}$ и т. д.) определяемые как периодические решения линейных систем дифференциальных уравнений

$$\frac{du_\nu^{(\sigma)}}{d\vartheta} = \mu^{1-m} K (p_{\nu 1} u_1^{(\sigma)} + p_{\nu n} u_n^{(\sigma)} + L_\nu^{(\sigma)}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots)$$

составляемых установленным в упомянутой работе способом.

---

[3] Здесь и далее в слова, взятые в кавычки, вкладываются значения, определенные в работе [2].

Заметим, что величинам $z_1^*, \ldots, z_n^*$ соответствует величина r^*, определяемая равенством

$$r^* = \mu q \left[1 + \mu F(\mu; \vartheta; z_1^*, \ldots, z_n^*)\right] \tag{2.6}$$

и что из (2.4)

$$\mu^{m-1}(t - t_0) = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} q^{1-m}[g + \mu\theta(\mu; \vartheta; z_1^*, \ldots, z_n^*)]^{-1}\, d\vartheta$$

Отсюда устанавливаем, что

$$\vartheta + \mu f(\mu, \vartheta) = \mu^{m-1}\omega(\mu)(t - t_0) + \vartheta_0 + \mu f(\mu, \vartheta_0) \tag{2.7}$$

где $\omega(\mu)$ — положительная в отрезке $|\mu| \leqslant l$ непрерывная функция от μ, а $f(\mu, \vartheta)$ — непрерывная в том же отрезке функция от μ и ϑ, периодическая (с периодом 2π) относительно ϑ, и что, следовательно, система (1.1) допускает периодическое относительно t решение

$$x^* = r^* \cos\vartheta, \quad y^* = r^* \sin\vartheta, \; x_\nu^* = z_\nu^*(r^*)^m \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

с периодом

$$T = \mu^{1-m} \int\limits_0^{2\pi} q^{1-m}[g + \mu\theta(\mu; \vartheta; z_1^*, \ldots, z_n^*)]^{-1}\, d\vartheta$$

где z_ν^* и r^* определяются соответственно рядами (2.5) и равенством (2.6), а ϑ связано с t соотношением (2.7).

Как непосредственно следует из вида полученного решения системы (1.1), установленных свойств функций $z_1^*(\vartheta), \ldots, z_n^*(\vartheta)$, соотношений (2.6), (2.2) и (2.1), выражения для периода T и установленного смысла параметра μ, это периодическое решение существует при любых достаточно малых значениях величины $x_0^2 + y_0^2$, и обладает следующими свойствами: оно содержит две произвольные постоянные

$$\mu = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \qquad \vartheta_0 = \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}$$

непрерывно относительно этих постоянных и t, обращается в $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$ при $x_0 = y_0 = 0$ и имеет период, для $m > 1$ неограниченно возрастающий при $(x_0^2 + y_0^2) \to 0$, и устойчиво. Следовательно, теорема доказана [4].

Поступила в редакцию
17 III 1949

Уральский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. Математический сборник. 1938. Т. 3. (45). № 1.
2. Волк И. М. О периодических решениях неавтономных систем, зависящих от малого параметра. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6.
3. Волк И. М. Об устойчивости движения в случае, когда уравнения и их периодическое решение заданы лишь приближенно. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
4. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в одном особенном случае. Сборник трудов КАИ. 1939. Вып. 4.

[4] Критический случай двух корней с нулевыми вещественными частями рассмотрен в работах [1] и [4]. Доказанная здесь теорема существенно дополняет эти исследования.