Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСТО ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ

М. И. Жуковский

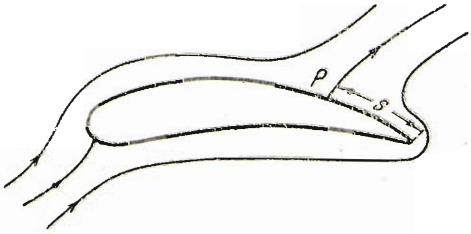
(Ленинград)

Рассмотрим сначала плоское потенциальное обтекание изолированного профиля, представляющееся суммой трех течений: 1) бесциркуляционного, имеющего в бесконечности направление, параллельное оси x; 2) бесциркуляционного, направленного в бесконечности вдоль оси y, и 3) чисто циркуляционного.

Выражение скорости результирующего потока на поверхности профиля может быть записано в виде

$$v(s) = V_\infty [u_x(s) \cos\alpha + u_y(s) \sin\alpha] + \frac{\Gamma}{b} u_\text{г}(s) \tag{1}$$

где V_∞ — скорость в бесконечности, α — угол атаки, b — хорда профиля, Γ — циркуляция скорости по контуру профиля, $u_x(s)$ и $u_y(s)$ — скорости на поверхности профиля соответственно при $V_\infty = 1$, $\alpha = 0$, $\Gamma = 0$, и при $V_\infty = 1$, $\alpha = \pi/2$, $\Gamma = 0$, наконец, $u_\text{г}$ — безразмерная скорость чисто циркуляционного обтекания, выраженная в частях величины Γ/b. Если любую точку профиля P с дуговой координатой s (фиг. 1) рассматривать как возможную точку схода бесциркуляционного потока, то угол атаки такого обтекания α будет функцией s, зависящей только от формы профиля. В этой точке $v(s) = 0$, и угол атаки α, соответствующий этому положению точки схода, найдем из формулы (1) при $\Gamma = 0$, положив $v(s) = 0$. При этом получим



Фиг. 1

$$\alpha(s) = -\operatorname{arc\,tg} \frac{u_x}{u_y} \tag{2}$$

Обозначая через $\varphi_\text{г}$ потенциал чисто циркуляционного потока, получим очевидное равенство

$$\alpha = 2\pi\varphi_\text{г}$$

Отсюда

$$\varphi_\text{г} = \frac{\alpha}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{u_x(s)}{u_y(s)} \tag{3}$$

Заметим, что для профиля, имеющего острую заднюю кромку, соотношение (3) в силу непрерывности $\varphi_\text{г}$ определяет значение потенциала и в самой точке заострения.

Формула (3), позволяющая определить потенциал $\varphi_\text{г}$ через u_x и u_y, может быть обобщена и для случая произвольной решетки профилей. Достаточно это показать для решетки пластин, расположенных на вещественной оси.

Для решетки пластин (фиг. 2) выражения для скоростей, полученные Н. Е. Жуковским,[1] представим в виде,

$$v_{\text{бесц.}} = V_0 \cos \alpha_0 - V_0 \sin \alpha_0 \frac{\sin \pi\xi}{\sqrt{\sin^2 \pi\beta - \sin^2 \pi\xi}} \tag{4}$$

$$v_{\text{цирк.}} = -\frac{\Gamma}{2t} \frac{\cos \pi\xi}{\sqrt{\sin^2 \pi\beta - \sin^2 \pi\xi}} \tag{5}$$

В рассматриваемом случае

$$u_x = 1, \quad u_y = -\frac{\sin \pi\xi}{\sqrt{\sin^2 \pi\beta - \sin^2 \pi\xi}}, \quad u_\text{г} = -\frac{1}{2} \frac{\cos \pi\xi}{\sqrt{\sin^2 \pi\beta - \sin^2 \pi\xi}} \tag{6), (7}$$

где $2b$ — длина пластины, t — шаг решетки, $\xi = x/t$, $\beta = b/t$.

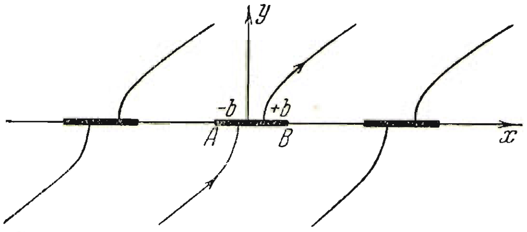
Знак перед корнем меняется на обратный при переходе с верхней стороны разреза AB на нижнюю. Кроме того, знаки изменяются для тех же сторон разрезов при переходе от одного разреза к другому.

Выражение для потенциала $\varphi_\text{г}$ может быть найдено из формулы (7). Имеем

$$\varphi_\text{г}(\xi) = -\frac{1}{2} \int \frac{\cos \pi\xi \, d\xi}{\sqrt{\sin^2 \pi\beta - \sin^2 \pi\xi}} = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{\sin \pi\xi}{\sin \pi\beta} + C \tag{8}$$

Пусть некоторая точка x пластины является точкой схода бесциркуляционного потока, т. е. $v_{\text{бесц.}}(\xi) = 0$. Из формулы (4) получаем при этом

$$\alpha_0(\xi) = -\operatorname{arc\,tg} \frac{u_x}{u_y} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\sin^2 \pi\beta - \sin^2 \pi\xi}}{\sin \pi\xi} \tag{9}$$



Фиг. 2

Пользуясь формулой

$$\arccos q = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1-q^2}}{q}$$

получим из соотношений (8) и (9) с точностью до постоянной следующее равенство:

$$\varphi_\text{г} = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{u_x}{u_y} \tag{10}$$

Значения $\varphi_\text{г}$ находятся по формуле (10) для всех x, включая точки $x = \pm b$.

Таким образом, можно сформулировать предложение: *потенциал чисто циркуляционного обтекания в некоторой точке обтекаемого одиночного профиля или профиля в решетке равен такому углу атаки* (в долях 2π) *бесциркуляционного обтекания, который определяет сход потока в этой точке.*

Дифференцируя выражение (10) для потенциала $\varphi_\text{г}$, получим скорость $u_\text{г}$. Величину циркуляции найдем, как обычно, задавая сход потока в задней кромке.

Если известны скорости u_x и u_y бесциркуляционного потока, то циркуляционное обтекание решетки можно непосредственно определить из формулы (10).

Обычные методы вычисления скоростей при циркуляции, отличной от нуля, заключаются в реализации конформного отображения, даваемого бесциркуляционным обтеканием (которое считается в данном случае известным), что связано с значительными по объему вычислениями.

Полученный результат позволяет, в частности, найти циркуляционное обтекание решетки профилей, используя опытные значения бесциркуляционного потенциала скоростей, определяемого по методу электрогидродинамической аналогии.

Поступила в редакцию
10 V 1949

Центральный котлотурбинный институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Полное собрание сочинений. 1937. Т. VI.