Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

К ВОПРОСУ О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ БЕСКОНЕЧНОЙ РЕШЕТКИ ГАЗОМ В ПРИБЛИЖЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ С. А. ЧАПЛЫГИНА

Г. А. Бугаенко

(Молотов)

1. Приведем предварительно некоторые известные результаты С. А. Чаплыгина [1]. При адиабатном законе состояния газа, когда $p = k\rho^\gamma$ имеют место соотношения

$$p = p_0\left(1 - \frac{V^2}{2\alpha}\right)^{\beta+1}, \qquad \rho = \rho_0\left(1 - \frac{V^2}{2\alpha}\right)^{\beta} \tag{1.1}$$

где p — давление газа, а ρ — плотность его, V — модуль скорости, p_0 и ρ_0 — значения p и ρ в критической точке потока, в которой скорость обращается в нуль, k — коэффициент пропорциональности, γ — отношение теплоемкостей, α и β — постоянные

Если ввести в рассмотрение угол θ между скоростью и осью x и величину τ, равную $V^2/2\alpha$, то, как показал Чаплыгин, уравнения движения газа представляются в виде

$$\frac{\partial\tau}{\partial\psi} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = -\frac{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}{1-(2\beta+1)\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\psi} \tag{1.2}$$

где φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока.

Чаплыгин привел эти уравнения к очень простой форме:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\psi} = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = -\frac{1}{K}\frac{\partial\theta}{\partial\psi} \tag{1.3}$$

Введенная им новая переменная σ и величина K определяются формулами

$$\sigma = \int\limits_{\tau_{\infty 2}}^{\tau}\frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau}\,d\tau, \qquad K = \frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}} \tag{1.4}$$

С. А. Чаплыгин указал, что при скоростях, далеких от скорости звука, величина K близка к единице и интегрирование уравнений (1.3) можно вести, полагая K равным 1.

Уравнения (1.3) при $K = 1$ переходят в условия Коши-Римана. Следовательно, $\omega = \theta + i\sigma$ будет аналитической функцией от комплексного переменного $f = \varphi + i\psi$.

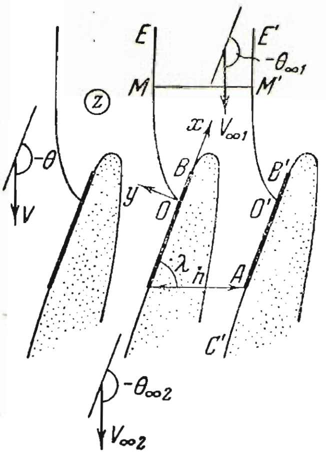
Формула для элементарного вектора вдоль линии тока в приближенной постановке имеет, как известно[3], вид

$$dz = (ae^{i\omega} + be^{i\bar\omega})\,d\varphi \qquad \left(a = \frac{1+(1-\tau_{\infty 2})^{-\beta}}{2\sqrt{2\alpha\tau_{\infty 2}}},\ b = \frac{1-(1-\tau_{\infty 2})^{-\beta}}{2\sqrt{2\alpha\tau_{\infty 2}}}\right) \tag{1.5}$$

Комплексное давление представляется формулой [3]

$$Y + iX = \frac{\rho_0 V_{\infty 2}}{2}\int(e^{-i\bar\omega} - e^{-i\omega})\,d\varphi + p_0(1-\tau_{\infty 2})^{\beta+1}\int d\bar z \tag{1.6}$$

2. Будем рассматривать установившееся потенциальное течение газа через бесконечную решетку по известной схеме Кирхгофа со срывами струй. Перья решетки предполагаются плоскими (фиг. 1).



Фиг. 1

Обозначим скорость газа на бесконечности в потоке через $V_{\infty 1}$ и ее угол с осью x через $\theta_{\infty 1}$, скорость в струе на бесконечности через $V_{\infty 2}$ и угол с осью x через $\theta_{\infty 2}$; при этом угол θ между вектором скорости и осью x заключен в пределах $-2\pi < \theta \leqslant 0$.

Поле скоростей потока повторяется каждый раз при смещении на шаг решетки, т. е. на вектор $he^{-i\lambda}$.

Условие постоянства расхода при установившемся течении газа дает

$$Q = -\rho_{\infty 1} V_{\infty 1} h \sin(\lambda + \theta_{\infty 1}) = \rho_{\infty 2} V_{\infty 2}\, n \qquad (2.1)$$

где $\rho_{\infty 1}$ — плотность газа на бесконечности в потоке, $\rho_{\infty 2}$ — плотность газа на бесконечности в струе, n — ширина газовой струи на бесконечности.

Пользуясь выражением (1.1) для ρ, равенство (2.1) представим в виде

$$-V_{\infty 1}\, h \left(1 - \frac{V_{\infty 1}{}^2}{2\alpha}\right)^{\beta} \sin(\lambda + \theta_{\infty 1}) = V_{\infty 2}\, n \left(1 - \frac{V_{\infty 2}{}^2}{2\alpha}\right)^{\beta} \qquad (2.2)$$

Рассмотрим теперь поведение функции $f = \varphi + i\psi$ в z-плоскости газового потока. Для простоты будем считать, что в критической точке O потока (фиг. 1) функция f равна нулю. Из соотношения

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds = V_s\, ds$$

следует, что при перемещении по линии тока $\psi = 0$ функция φ изменяется монотонно от $-\infty$ в точке E (бесконечность в потоке) до $+\infty$ в точке C (на бесконечности в струе), проходя через нулевое значение в критической точке O, где линия тока раздваивается. Найдем значение потенциала $f = \varphi + i\psi$ в критической точке O', смещенной на период $he^{-i\lambda}$ относительно точки O. Имеем (фиг. 1)

$$\varphi(O') = \int\limits_{OMM'O'} V_s\, ds = \int\limits_{OM} V_s\, ds + \int\limits_{MM'} V_s\, ds + \int\limits_{M'O'} V_s\, ds$$

где MM' — отрезок, параллельный оси решетки.

Первый и последний интегралы взаимно сокращаются и, следовательно, устремляя MM' на бесконечность в потоке, получим

$$\varphi(O') = V_{\infty 1}\, h \cos(\lambda + \theta_{\infty 1}) \qquad (2.3)$$

Дальше, из соотношения

$$d\psi = \frac{dQ}{\rho_0}$$

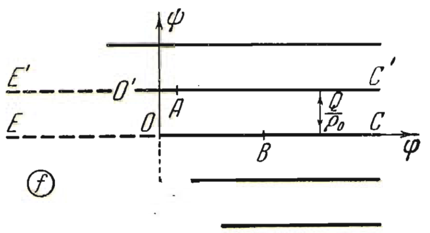
где dQ — количество газа, протекающего в единицу времени между бесконечно близкими линиями тока, следует, что при смещении на шаг решетки функция ψ получает приращение, равное Q / ρ_0. Поэтому

$$\psi(O') = \frac{Q}{\rho_0} = -\left(1 - \frac{V_{\infty 1}{}^2}{2\alpha}\right)^{\beta} h V_{\infty 1} \sin(\lambda + \theta_{\infty 1}) \qquad (2.4)$$

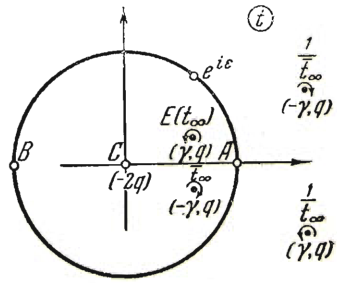
Таким образом, области газового потока (фиг. 1) соответствует f-плоскость с двухбереговыми разрезами вдоль полупрямых, параллельных вещественной оси (фиг. 2), причем в силу правильной структуры решетки все разрезы получаются из основного (положительная ось φ) путем одновременного смещения по вертикали и горизонтали соответственно на расстояния, кратные количествам Q/ρ_0 и $V_{\infty 1} h \cos(\lambda + \theta_{\infty 1})$.

Так как $\omega = \theta + i\sigma$ есть аналитическая функция от $f = \varphi + i\psi$, то для решения задачи достаточно связать эти функции при помощи параметра, изменяющегося в верхнем полукруге единичного радиуса, как в методе Леви-Чивита.

Принимая во внимание прямолинейность разрезов в плоскости f, найдем аналитическую функцию $f(t)$, осуществляющую конформное преобразование f-плоскости на полукруг t. Построим в t-плоскости течение идеальной жидкости, обтекающее границу полукруга. Разместим для этого в симметричных относительно окружности точках t_∞ и $\bar{t}_\infty^{-1}$ и в зеркальных изображениях этих точек относи-



Фиг. 2



Фиг. 3

тельно диаметра, т. е. в точках $\bar{t}_\infty$ и t_∞^{-1}, источники с обильностями и вихри с интенсивностями такими, как указано на фиг. 3. В начале координат помещаем сток с расходом $2q$ (на бесконечности — такой же сток).

В построенном течении на плоскости t верхняя полуокружность единичного радиуса и диаметр полукруга являются, очевидно, линиями тока, так что функция тока ψ будет сохранять постоянное значение на границе верхнего полукруга t, и в f-плоскости этой границе будут соответствовать прямолинейные разрезы. Комплексный потенциал построенного течения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\Big[(\gamma + iq)\log(t - t_\infty) + (-\gamma + iq)\log\Big(t - \frac{1}{t_\infty}\Big) +$$

$$+ (-\gamma + iq)\log(t - \bar{t}_\infty) + (\gamma + iq)\log\Big(t - \frac{1}{\bar{t}_\infty}\Big) - 2iq\log t\Big] + \text{const}$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\Big[(\gamma + iq)\log\Big(t + \frac{1}{t} - 2M\Big) -$$

$$- (\gamma - iq)\log\Big(t + \frac{1}{t} - 2\overline{M}\Big)\Big] + \text{const} \qquad (2.5)$$

где γ — интенсивность вихрей, q — обильность источников,

$$M = \frac{1}{2}\Big(t_\infty + \frac{1}{t_\infty}\Big)$$

Произвольную постоянную в формуле (2.5) выберем так, чтобы $f(t)$ обращалась в нуль в некоторой точке $t = e^{\varepsilon i}$, положение которой будет определено в дальнейшем.

Ввиду многозначности логарифма границе верхнего полукруга t-плоскости будет соответствовать f-плоскость с бесчисленным количеством прямолинейных разрезов $\psi = kq$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), причем φ изменяется от $k\gamma$ до $+\infty$, как это легко следует из (2.5), после подстановки $t = e^{i\theta}$ (дуга полуокружности) и подстановки $t = t_1$ где t_1 — вещественное количество из интервала $(-1, +1)$, — диаметра полукруга.

Таким образом, функция (2.5) устанавливает конформное отображение верхнего полукруга t-плоскости на f-плоскость с двухбереговыми разрезами, представленными на фиг. 2.

Функция (2.5) встречается в работе Н. И. Ахиезера [2], где она получена путем последовательных конформных отображений: f-плоскости на полуплоскость, последней на единичный круг и, наконец, круг на верхнюю полуокружность.

Точка $t = 0$ переводится преобразованием (2.5) в $f = +\infty$, так что радиусы AC и BC переходят в бесконечные отрезки (фиг. 2 и 3). Конформность преобразования нарушается в точках $t = -1$, $t = +1$ и $t = e^{i\varepsilon}$ (точка $e^{i\varepsilon}$ отвечает началу двухберегового разреза в f-плоскости). Условие $df / dt = 0$ при $t = e^{i\varepsilon}$ дает

$$\frac{\gamma + iq}{\cos\varepsilon - M} = \frac{\gamma - iq}{\cos\varepsilon - \overline{M}} \tag{2.6}$$

Для нахождения элементов движения нам потребуется в дальнейшем выражение производной df / dt, которую представим в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{q}{\pi}\, \frac{(t - e^{i\varepsilon})(t - e^{-i\varepsilon})(t - t^{-1})}{(t - t_\infty)(t - t_\infty^{-1})(t - \overline{t}_\infty)(t - \overline{t}_\infty^{-1})} \tag{2.7}$$

Найдем теперь γ и q; когда точка в z-плоскости газового потока смещается на шаг решетки $he^{-i\lambda}$, соответствующая ей точка t переходит с одного листа римановой поверхности на следующий, обойдя один раз вокруг точки E $(t = t_\infty)$, в результате чего, как следует из (2.5), функция $f(t)$ получает приращение $\gamma + iq$. Так как соответствующие приращения функций φ и ψ равны соответственно $V_{\infty 1} h \cos(\lambda + \theta_{\infty 1})$ и Q / ρ_0, то получаем

$$\gamma = V_{\infty 1}\, h \cos(\lambda + \theta_{\infty 1}), \qquad q = -\left(1 - \frac{V_{\infty 1}^2}{2\varkappa}\right)^{\beta} V_{\infty 1}\, h \sin(\lambda + \theta_{\infty 1}) \tag{2.8}$$

Из выражения для γ видим, между прочим, что $\gamma = 0$ соответствует случаю, когда набегающий поток имеет в бесконечности перпендикулярную в оси решетки скорость.

3. Перейдем к определению функции $\omega(t)$. Функция $\omega = \theta + i\sigma$ является регулярной внутри полукруга t и обладает следующими свойствами.

1. В точке O $(t = e^{i\varepsilon})$ действительная часть функции ω имеет разрыв, равный π, ввиду разветвления линии тока. На дуге AO угол θ равняется $-\pi$, а на дуге OB нулю.

2. На действительном диаметре полукруга функция $\omega(t) = \theta + i\sigma$ действительна, так как ее мнимая часть $\sigma = 0$ на свободных струях, где $\tau = \tau_{\infty 2}$.

3. В начале координат $t = 0$ функция $\omega(t)$ равна $\theta_{\infty 2}$, так как на бесконечности в струе $\sigma = 0$, а $\theta = \theta_{\infty 2}$.

Отсюда следует, что функция $\omega(t)$ допускает аналитическое продолжение в нижний полукруг и может быть найдена по формуле Шварца. Имеем

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \theta\, \frac{e^{i\varphi} + t}{e^{i\varphi} - t}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\pi\, \frac{e^{i\varphi} + t}{e^{i\varphi} - t}\, d\varphi = i \log \frac{e^{i\varepsilon} - t}{1 - te^{i\varepsilon}} \tag{3.1}$$

При этом выбирается та ветвь логарифма, которая равна $i\varepsilon$ при $t=0$. Пользуясь третьим свойством, из (3.1), при $t=0$, находим, что $\varepsilon = -\theta_{\infty 2}$. Величину t_∞ найдем по (3.1), использовав значение скорости на бесконечности в потоке

$$\omega(t_\infty) = \theta_{\infty 1} + i\sigma_{\infty 1} = i\log\frac{1 - t_\infty \exp i\theta_{\infty 2}}{\exp i\theta_{\infty 2} - t_\infty}$$

Отсюда [2]

$$|t_\infty| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\sigma_{\infty 1} - \cos(\theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2})}{\operatorname{ch}\sigma_{\infty 1} - \cos(\theta_{\infty 1} + \theta_{\infty 2})}}$$

$$\arg t_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sh}\sigma_{\infty 1}\sin\theta_{\infty 2}}{\operatorname{ch}\sigma_{\infty 1}\cos\theta_{\infty 2} - \cos\theta_{\infty 1}} \tag{3.2}$$

Займемся теперь подсчетом давления газа на перо решетки. На переднюю сторону пластинки, являющуюся линией тока, давление найдется по формуле (1.6), где под $V_{\infty 2}$ следует понимать скорость на струе.

Задняя сторона пластинки находится в покоящемся газе, где давление постоянно и равно

$$p = p_0(1 - \tau_{\infty 2})^{\beta + 1}$$

Если учесть еще, что вдоль линии тока $d\varphi = df$, то получим формулу для комплексного давления в виде

$$Y + iX = \frac{\rho_0 V_{\infty 2}}{2}\int (e^{-i\bar{\omega}} - e^{-i\omega})\, df$$

или

$$Y - iX = \frac{\rho_0 V_{\infty 2}}{2}\int (e^{i\omega} - e^{i\bar{\omega}})\frac{df}{dt}dt \tag{3.3}$$

Здесь интегрирование производится по верхней полуокружности t-плоскости по часовой стрелке. Учитывая теперь, что после аналитического продолжения в нижний полукруг функция $\omega(t)$ в сопряженных точках принимает сопряженные значения, получим

$$Y - iX = -\frac{\rho_0 V_{\infty 2}}{2}\int\limits_{|t|=1} e^{i\omega(t)}\frac{df}{dt}dt \tag{3.4}$$

где интегрирование производится по полной дуге единичной окружности против часовой стрелки.

Подставляя в формулу (3.4) значение df/dt из (2.7), имеем

$$Y - iX = -\frac{\rho_0 q V_{\infty 2}}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} e^{i\omega(t)}\frac{(t - e^{i\varepsilon})(t - e^{-i\varepsilon})(t - t^{-1})\,dt}{(t - t_\infty)(t - t_\infty^{-1})(t - \bar{t}_\infty)(t - \bar{t}_\infty^{-1})} \tag{3.5}$$

Подинтегральная функция в (3.5) имеет три полюса $t = t_\infty$, $\bar{t} = t_\infty$, $t=0$, которые все лежат внутри единичного круга. Вычеты подпитегральной функции в этих точках равны соответственно

$$\frac{(t_\infty - e^{i\varepsilon})(t_\infty - e^{-i\varepsilon})}{(t_\infty - \bar{t}_\infty)(t_\infty - \bar{t}_\infty^{-1})}\exp i\omega_{\infty 1}, \qquad \frac{(\bar{t}_\infty - e^{i\varepsilon})(\bar{t}_\infty - e^{-i\varepsilon})}{(\bar{t}_\infty - t_\infty)(\bar{t}_\infty - t_\infty^{-1})}\exp i\bar{\omega}_{\infty 1}, \qquad -\exp i\theta_{\infty 2}$$

Но из (2.6) следует, что

$$\frac{(t_\infty - e^{i\varepsilon})(t_\infty - e^{-i\varepsilon})}{(t_\infty - \bar{t}_\infty)(\bar{t}_\infty - \bar{t}_\infty^{-1})} = \frac{\gamma + iq}{2iq}$$

Поэтому вычеты можно представить в виде

$$\frac{\gamma + iq}{2iq} \exp(i\theta_{\infty 1} - \sigma_{\infty 1}), \qquad -\frac{\gamma - iq}{2iq} \exp(i\theta_{\infty 1} + \sigma_{\infty 1}), \qquad -\exp i\theta_{\infty 2}$$

Из формулы (3.5), применяя теорему о вычетах, имеем

$$Y - iX = -\frac{\rho_0 V_{\infty 2}}{2} [-2iq \exp i\theta_{\infty 2} +$$
$$+ (\gamma + iq) \exp(i\theta_{\infty 1} - \sigma_{\infty 1}) - (\gamma - iq) \exp(i\theta_{\infty 1} + \sigma_{\infty 1})]$$

Отделяя реальную и мнимую части, получим

$$Y = -\frac{\rho_0 V_{\infty 2}}{2} [2q \sin\theta_{\infty 2} + (\gamma \cos\theta_{\infty 1} - q \sin\theta_{\infty 1}) \exp(-\sigma_{\infty 1}) -$$
$$- (\gamma \cos\theta_{\infty 1} + q \sin\theta_{\infty 1}) \exp\sigma_{\infty 1}] \tag{3.6}$$

$$X = -\frac{\rho_0 V_{\infty 2}}{2} [-2q \cos\theta_{\infty 2} + (\gamma \sin\theta_{\infty 1} + q \cos\theta_{\infty 1}) \exp(-\sigma_{\infty 1}) -$$
$$- (\gamma \sin\theta_{\infty 1} - q \cos\theta_{\infty 1}) \exp\sigma_{\infty 1}] \tag{3.7}$$

Будем предполагать, что скорость на контуре пера остается конечной; тогда полная сила давления на перо должна быть перпендикулярной к перу, а следовательно, $X = 0$, т. е.

$$(\gamma \sin\theta_{\infty 1} + q \cos\theta_{\infty 1}) \exp(-\sigma_{\infty 1}) -$$
$$- (\gamma \sin\theta_{\infty 1} - q \cos\theta_{\infty 1}) \exp\sigma_{\infty 1} = 2q \cos\theta_{\infty 2} \tag{3.8}$$

Таким образом, сила давления газа на перо решетки по (3.6) и (2.8) оказывается равной

$$Y = -\frac{\rho_0 V_{\infty 1} V_{\infty 2}}{2} h \left\{ -2 \left(1 - \frac{V_{\infty 1}^2}{2\alpha}\right)^\beta \sin(\lambda + \theta_{\infty 1}) \sin\theta_{\infty 2} + \right.$$
$$+ \left[\cos(\lambda + \theta_{\infty 1}) \cos\theta_{\infty 1} + \left(1 - \frac{V_{\infty 1}^2}{2\alpha}\right)^\beta \sin(\lambda + \theta_{\infty 1}) \sin\theta_{\infty 1}\right] \exp(-\sigma_{\infty 1}) -$$
$$\left. - \left[\cos(\lambda + \theta_{\infty 1}) \cos\theta_{\infty 1} - \left(1 - \frac{V_{\infty 1}^2}{2\alpha}\right)^\beta \sin(\lambda + \theta_{\infty 1}) \sin\theta_{\infty 1}\right] \exp\sigma_{\infty 1} \right\} \tag{3.9}$$

Если в этой формуле положить $\beta = 0$ и соответственно этому величину $\sigma_{\infty 1}$, определенную по (1.4), заменить на

$$\sigma_{\infty 1} = \int_{\tau_{\infty 2}}^{\tau_{\infty 1}} \frac{d\tau}{2\tau} = \frac{1}{2} \log \frac{\tau_{\infty 1}}{\tau_{\infty 2}} = \log \frac{V_{\infty 1}}{V_{\infty 2}}$$

то получится формула для силы давления в случае идеальной жидкости [2].

Чтобы определить входящий в (3.9) угол λ между осью решетки и осью x, составим производную пропорцию от (2.6) и воспользуемся значениями γ и q по (2.8). Получим

$$\operatorname{ctg}(\lambda + \theta_{\infty 1}) = i \left(1 - \frac{v_{\infty 1}^2}{2\alpha}\right)^\beta \frac{2\cos\varepsilon - (M + \overline{M})}{M - \overline{M}} \tag{3.10}$$

Чтобы подсчитать длину пера решетки, возьмем формулу (1.5). Заменяя $d\varphi$ на df, имеем

$$dz = \frac{q}{\pi} \left(a \frac{1 - te^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - t} + b \frac{t - e^{i\varepsilon}}{te^{i\varepsilon} - 1}\right) \frac{(t - e^{i\varepsilon})(t - e^{-i\varepsilon})(t - t^{-1})\, dt}{(t - t_\infty)(t - \overline{t}_\infty)(t - t_\infty^{-1})(t - \overline{t}_\infty^{-1})}$$

Это выражение можно представить в виде

$$dz = \frac{qa}{\pi} g_1(t)\,dt + \frac{qb}{\pi} g_2(t)\,dt \tag{3.11}$$

Здесь

$$g_1(t) = \frac{e^{i\varepsilon}(t - e^{-i\varepsilon})^2 (t - t^{-1})}{(t - t_\infty)(t - t_\infty{}^{-1})(t - \bar{t}_\infty)(t - \bar{t}_\infty{}^{-1})},$$

$$g_2(t) = \frac{e^{-i\varepsilon}(t - e^{i\varepsilon})^2 (t - t^{-1})}{(t - t_\infty)(t - t_\infty{}^{-1})(t - t_\infty)(t - \bar{t}_\infty{}^{-1})}$$

Разложения $g_1(t)$ и $g_2(t)$ на сумму простых дробей имеют вид

$$g_\nu(t) = \frac{A_\nu}{t - t_\infty} + \frac{B_\nu}{t - \bar{t}_\infty} + \frac{C_\nu}{t - t_\infty{}^{-1}} + \frac{D_\nu}{t - \bar{t}_\infty{}^{-1}} + \frac{E_\nu}{t} \qquad (\nu = 1, 2)$$

где

$$A_1 = C_2 = \frac{\gamma + iq}{2iq} \exp(i\theta_{\infty 1} - \sigma_{\infty 1})$$

$$B_1 = D_2 = \frac{iq - \gamma}{2iq} \exp(i\theta_{\infty 1} + \sigma_{\infty 1}), \qquad E_1 = -e^{-i\varepsilon}$$

$$C_1 = A_2 = \frac{\gamma + iq}{2iq} \exp(\sigma_{\infty 1} - i\theta_{\infty 1})$$

$$D_1 = B_2 = \frac{iq - \gamma}{2iq} \exp(-i\theta_{\infty 1} - \sigma_{\infty 1}), \qquad E_2 = -e^{i\varepsilon}$$

Эти выражения для коэффициентов получаются, если воспользоваться соотношениями

$$\exp i\omega_{\infty 1} = \frac{1 - t_\infty e^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - t_\infty}, \qquad \frac{(t_\infty - e^{i\varepsilon})(t_\infty - e^{-i\varepsilon})}{(t_\infty - \bar{t}_\infty)(t_\infty - \bar{t}_\infty{}^{-1})} = \frac{\gamma + iq}{2iq}$$

$$\exp i\bar{\omega}_{\infty 1} = \frac{1 - \bar{t}_\infty e^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - \bar{t}_\infty}, \qquad \frac{(\bar{t}_\infty - e^{-i\varepsilon})(\bar{t}_\infty - e^{i\varepsilon})}{(\bar{t}_\infty - t_\infty)(\bar{t}_\infty - t_\infty{}^{-1})} = \frac{iq - \gamma}{2iq}$$

Интегрируя равенство (3.11) по верхней полуокружности в t-плоскости против часовой стрелки и пользуясь соотношением $z(-1) - z(1) = l$, получим выражение для длины пера решетки

$$\begin{aligned}
l = {} & \frac{qa}{\pi}\Big[A_1 \lg \frac{-1 - t_\infty}{1 - t_\infty} + B_1 \lg \frac{-1 - \bar{t}_\infty}{1 - \bar{t}_\infty} + C_1 \lg \frac{-1 - t_\infty{}^{-1}}{1 - t_\infty{}^{-1}} + \\
& + D_1 \lg \frac{-1 - \bar{t}_\infty{}^{-1}}{1 - \bar{t}_\infty{}^{-1}} + E_1 \lg(-1)\Big] + \\
& + \frac{qb}{\pi}\Big[A_2 \lg \frac{-1 - t_\infty}{1 - t_\infty} + B_2 \lg \frac{-1 - \bar{t}_\infty}{1 - \bar{t}_\infty} + C_2 \lg \frac{-1 - t_\infty{}^{-1}}{1 - t_\infty{}^{-1}} + \\
& + D_2 \lg \frac{-1 - \bar{t}_\infty{}^{-1}}{1 - \bar{t}_\infty{}^{-1}} + E_2 \lg(-1)\Big] = \\
= {} & \frac{qa}{\pi}\Big[(A_1 + C_1) \lg \frac{t_\infty{}^{-1} + 1}{t_\infty - 1} + (B_1 + D_1) \lg \frac{\bar{t}_\infty{}^{-1} + 1}{\bar{t}_\infty{}^{-1} - 1} + \\
& + (A_1 + B_1 + E_1) \lg(-1)\Big] + \frac{qb}{\pi}\Big[(A_2 + C_2) \lg \frac{t_\infty{}^{-1} + 1}{t_\infty{}^{-1} - 1} + \\
& + (B_2 + D_2) \lg \frac{\bar{t}_\infty{}^{-1} + 1}{t_\infty{}^{-1} - 1} + (A_2 + B_2 + E_2) \lg(-1)\Big]
\end{aligned}$$

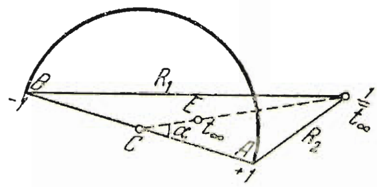
$$l = \frac{qa}{\pi}\Big[(A_1 + B_1 + C_1 + D_1)\lg\frac{R_1}{R_2} +$$
$$+ i\alpha(A_1 + C_1 - B_1 - D_1) + (A_1 + B_1 + E_1)\pi i\Big] +$$
$$+ \frac{qb}{\pi}\Big[(A_1 + B_1 + C_1 + D_1)\lg\frac{R_1}{R_2} +$$
$$+ i\alpha(A_1 + C_1 - B_1 - D_1) + (C_1 + D_1 + E_2)\pi i\Big]$$

Входящие сюда величины R_1, R_2 и α показаны на фиг. 4. Подставляя значение коэффициентов и пользуясь равенством (3.8), получим для длины пера решетки следующую формулу:

$$l = + \frac{2q}{\pi}(a + b)\cos\theta_{\infty 2}\lg\frac{R_1}{R_2} +$$
$$+ \frac{\alpha}{\pi}(a + b)\,[(\gamma\cos\theta_{\infty 1} - q\sin\theta_{\infty 1})\exp(-\sigma_{\infty 1}) +$$
$$+ (\gamma\cos\theta_{\infty 1} + q\sin\theta_{\infty 1})\exp\sigma_{\infty 1}] + \frac{a-b}{2}[(\gamma\cos\theta_{\infty 1} - q\sin\theta_{\infty 1})\exp(-\sigma_{\infty 1}) -$$
$$-(\gamma\cos\theta_{\infty 1} + q\sin\theta_{\infty 1})\exp\sigma_{\infty 1}] + qa\sin\theta_{\infty 2}$$

Формула для длины пера в случае обтекания решетки идеальной жидкостью [2] получается отсюда при $\beta = 0$, если положить

$$a = \frac{1}{V_{\infty 2}}, \qquad b = 0$$
$$q = -V_{\infty 1}h\sin(\lambda + \theta_{\infty 1})$$
$$\gamma = V_{\infty 1}h\cos(\lambda + \theta_{\infty 1}),$$
$$\sigma_{\infty 1} = \lg\frac{V_{\infty 1}}{V_{\infty 2}}$$



Фиг. 4

Поступила в редакцию
20 X 1948

Молотовский государственный
педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Ученые записки Московского университета (отдел физико-математический). 1904. Вып. 21.
2. Ахиезер Н. И. О плоско-параллельном потоке через бесконечную решетку. Научные записки Харьковского авиаинститута. 1934. Вып. 2.
3. Слезкин Н. А. К вопросу о плоском движении газа. Ученые записки Московского университета. 1937. Вып. 7.