

ЗАМЕТКИ

БЕЗОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ДУЖЕК ЗАДАННОЙ ФОРМЫ

Н. Ф. Сахарный

(Москва)

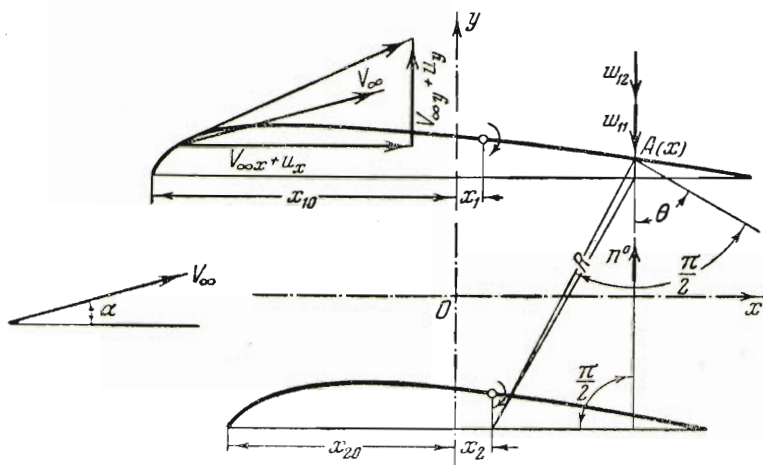
В работе решается задача о построении плоско-параллельного потока несжимаемой жидкости, обтекающего систему двух тонких дужек заданной формы.

Метод решения задачи основывается на замене дужек системой присоединенных вихрей, непрерывно распределенных по хордам. Это дает представление о механизме взаимного влияния дужек системы.

Задача приводится к системе двух интегральных уравнений. Решение проводится приближенным методом.

1. Рассмотрим систему двух тонких дужек произвольной формы (с параллельными хордами  $b_1$  и  $b_2$ ) в безвихревом установившемся плоско-параллельном потоке несжимаемой жидкости, обладающей основной скоростью  $V_\infty$ , направленной к дужкам под некоторым достаточно малым углом атаки  $\alpha$ .

Введем неподвижную прямоугольную систему координат так, как это показано на фиг. 1. Пусть уравнения, определяющие форму верхней и нижней дужек, соответственно будут  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ .



Фиг. 1

Кроме первоначальной скорости  $V_\infty (V_\infty x, V_\infty y)$ , около верхней дужки частицы жидкости обладают добавочной скоростью  $U (u_x, u_y)$ , вызванной влиянием верхнего крыла, работающего как изолированное, и влиянием нижнего крыла во взаимодействии с верхним. Аналогично около нижней дужки частицы жидкости будут обладать добавочной скоростью  $v (v_x, v_y)$ .

Скорости  $u$  и  $v$  будем считать малыми по сравнению со скоростью потока  $V_\infty$ .

Так как рассматривается безотрывное обтекание, то для вертикальной составляющей скорости частицы жидкости около верхней дужки получим (фиг. 1)

$$u_y = (V_\infty \cos \alpha + u_x) \frac{df_1}{dx} - V_\infty \sin \alpha$$

или, ограничиваясь членами первого порядка малости, имеем

$$u_y = V_\infty \left( \frac{df_1}{dx} \cos \alpha - \sin \alpha \right) \quad (1.1)$$

$$v_y = V_\infty \left( \frac{df_2}{dx} \cos \alpha - \sin \alpha \right) \quad (1.2)$$

Приведенное здесь выражение для  $v_y$  получается аналогично.

Пусть  $\omega_1(x)$  и  $\omega_2(x)$  интенсивности вихревых слоев, которыми можно заменить соответственно верхнюю и нижнюю дужки.

Обратимся к верхней дужке. Пусть  $w_{11}$  скорость, индуцируемая вихрями верхней дужки,  $w_{12}$  скорость, индуцируемая в той же точке вихрями нижней дужки. Для нижней дужки скорость, индуцируемую ее вихрями, обозначим через  $w_{22}$ , а индуцируемую в той же точке вихрями верхней — через  $w_{21}$ .

Тогда в некоторой точке  $A_1(x)$  имеем

$$w_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_{-x_{10}}^{b_1 - x_{10}} \frac{\omega_1(x_1)}{x_1 - x} dx_1 \quad (1.3)$$

где  $x_{10}$  есть координата передней кромки.

Для определения  $w_{12}$  согласно фиг. 1 имеем, полагая  $R^2 = h^2 + (x - x_2)^2$ ,

$$dw_{12} = \text{пр}_n \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{\omega_2 dx_2}{R} \right) = -\frac{\omega_2(x_2) dx_2}{2\pi R} \cos \theta = -\frac{\omega_2(x_2)(x - x_2)}{2\pi R^2} dx_2$$

$$w_{12} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-x_{20}}^{b_2 - x_{20}} \frac{\omega_2(x_2)(x - x_2)}{h^2 + (x - x_2)^2} dx_2 \quad (1.4)$$

Таким образом, нормальная индуцированная скорость  $W(x)$  в некоторой точке  $A_1(x)$  верхней дужки будет

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x_{10}}^{b_1 - x_{10}} \frac{\omega_1(x_1)}{x_1 - x} dx_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-x_{20}}^{b_2 - x_{20}} \frac{\omega_2(x_2)(x_2 - x)}{h^2 + (x_2 - x)^2} dx_2 \quad (1.5)$$

Для нижней дужки аналогично получим

$$W_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x_{20}}^{b_2 - x_{20}} \frac{\omega_2(x_2)}{x_2 - x} dx_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-x_{10}}^{b_1 - x_{10}} \frac{\omega_1(x_1)(x_1 - x)}{h^2 + (x_1 - x)^2} dx_1 \quad (1.6)$$

В дальнейшем, не нарушая общности, примем  $b_1 = b_2 = b$ .

Приравнивая выражения (1.1) и (1.5), а также (1.2) и (1.6), получаем

$$\int_{-x_{10}}^{b - x_{10}} \frac{\omega_1(x_1)}{x_1 - x} dx_1 + \int_{-x_{20}}^{b - x_{20}} \frac{\omega_2(x_2)(x_2 - x)}{h^2 + (x_2 - x)^2} dx_2 = 2\pi V_\infty \left( \frac{df_1}{dx} \cos \alpha - \sin \alpha \right) \quad (1.7)$$

$$\int_{-x_{20}}^{b - x_{20}} \frac{\omega_2(x_2)}{x_2 - x} dx_2 + \int_{-x_{10}}^{b - x_{10}} \frac{\omega_1(x_1)(x_1 - x)}{h^2 + (x_1 - x)^2} dx_1 = 2\pi V_\infty \left( \frac{df_2}{dx} \cos \alpha - \sin \alpha \right) \quad (1.8)$$

2. Решение системы интегральных уравнений (1.7), (1.8) можно получить с большой степенью точности<sup>1</sup>, заменяя ядро

$$K_\nu = \frac{x_\nu - x}{h^2 + (x_\nu - x)^2} \quad \text{на} \quad K_\nu^* = \beta_1(x_\nu - x) + \beta_2(x_\nu - x)^3 \quad (\nu = 1, 2) \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  подбираются таким образом, чтобы уклонение  $K_\nu$  от  $K_\nu^*$  было наименьшим. Для этого потребуем, чтобы

$$\int_{-h}^h (K_\nu - \beta_1 t - \beta_2 t^3)^2 dt \quad (x_\nu - x = t)$$

имел минимальное значение. Следуя известному правилу, для определения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  получим систему уравнений:

$$\int_{-h}^h (K_\nu - \beta_1 t - \beta_2 t^3) t dt = 0, \quad \int_{-h}^h (K_\nu - \beta_1 t - \beta_2 t^3) t^3 dt = 0$$

Отсюда легко найдем, что

$$\beta_1 = 0.93 h^{-2}, \quad \beta_2 = -0.48 h^{-4}$$

Интенсивности  $\omega_1(x)$  и  $\omega_2(x)$  в уравнениях (1.7) и (1.8) будем искать в виде

$$\omega_1(x) = 2V_\infty \left( A_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin k\varphi \right) \quad (2.3)$$

$$\omega_2(x) = 2V_\infty \left( B_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k\varphi \right) \quad (2.4)$$

Введем также переменную  $\varphi_0$ , связанную с  $x$  зависимостью

$$x + x_{\nu 0} = \frac{b}{2} (1 - \cos \varphi_0) \quad (\nu = 1, 2) \quad (2.5)$$

При этом  $x$  изменяется от  $-x_{\nu 0}$  до  $b - x_{\nu 0}$  при изменении  $\varphi_0$  от 0 до  $\pi$ . С помощью (2.3) и (2.5) можно найти интеграл

$$J_1 = \int_{-x_{\nu 0}}^{b-x_{\nu 0}} \frac{\omega_1(x_1)}{x_1 - x} dx_1 = 2\pi V_\infty \left( -A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\varphi_0 \right) \quad (2.6)$$

Заменяя во втором интеграле  $J_2$  уравнения (1.7) ядро выражением (2.1) и выполняя элементарные вычисления, получим

$$J_2 = 2\pi V_\infty (c_1 B_0 + c_2 B_0 \cos \varphi_0 + c_3 B_0 \cos 2\varphi_0 + c_4 B_0 \cos 3\varphi_0 + c_5 B_1 \cos \varphi_0 + c_6 B_1 \cos 3\varphi_0 + c_7 B_2 + c_8 B_2 \cos 2\varphi_0 + c_9 B_3 \cos \varphi_0 + c_{10} B_4) \quad (2.7)$$

где

$$c_1 = -\left( \frac{1}{8} b^2 \beta_1 + \frac{9}{128} b^4 \beta_2 \right), \quad c_2 = \frac{1}{4} b^2 \beta_1 + \frac{9}{64} b^4 \beta_2, \quad c_3 = -\frac{3}{64} b^4 \beta_2$$

$$c_4 = \frac{1}{64} b^4 \beta_2, \quad c_5 = \frac{1}{8} b^2 \beta_1 + \frac{3}{64} b^4 \beta_2, \quad c_7 = -\left( \frac{1}{16} b^2 \beta_1 + \frac{1}{32} b^4 \beta_2 \right)$$

$$c_6 = \frac{1}{128} b^4 \beta_2, \quad c_8 = -\frac{3}{128} b^4 \beta_2, \quad c_9 = \frac{3}{128} b^4 \beta_2, \quad c_{10} = -\frac{1}{256} b^4 \beta_2$$

<sup>1</sup> Решение можно было бы провести и точно. Вторые интегралы в уравнениях (1.7), (1.8) берутся в замкнутой форме. Однако это приводит к весьма сложным вычислениям, которые, как будет видно ниже, оказываются не нужными.

Далее, правые части уравнений (1.7) представим с помощью ряда Фурье в виде

$$2\pi V_\infty \left( \frac{a_{v0}}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_{vk} \cos k\varphi_0 - \sin \alpha \right) \left( a_{vk} = \frac{2}{\pi} \cos \alpha \int_0^\pi \frac{df_v}{dx} \cos k\varphi d\varphi \right)$$

Теперь, подставляя эти выражения ( $v=1,2$ ), а также (2.6) и (2.7) в уравнение (1.7), и сравнивая коэффициенты при косинусах одинаковой кратности, получим систему уравнений для определения коэффициентов,  $A_k$  и  $B_k$ :

$$\begin{aligned} -A_0 + c_1 B_0 + c_7 B_2 + c_{10} B_4 &= 1/2 a_{10} - \sin \alpha, & c_3 A_0 + c_8 A_2 + B_2 &= a_{22} \\ c_1 A_0 + c_7 A_2 + c_{10} A_4 - B_0 &= 1/2 a_{20} - \sin \alpha, & A_3 + c_4 B_0 + c_6 B_1 &= a_{13} \\ A_1 + c_2 B_0 + c_5 B_1 + c_9 B_3 &= a_{11}, & c_4 A_0 + c_6 A_1 + B_3 &= a_{23} \\ c_2 A_0 + c_5 A_1 + c_9 A_3 + B_1 &= a_{21}, & A_4 &= a_{14} \\ A_2 + c_3 B_0 + c_8 B_2 &= a_{12}, & B_4 &= a_{24}, \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Заметим, что все коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$ , начиная с  $k=4$ , будут непосредственно определяться через коэффициенты ряда Фурье с тем же индексом  $k$ . Для дальнейшего достаточно ограничиться системой уравнений (2.9).

3. Для вычисления подъемной силы согласно формуле Жуковского имеем

$$P = \rho V_\infty (\Gamma_1 + \Gamma_2), \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \int_{-x_{10}}^{b-x_{10}} \omega_1(x) dx + \int_{-x_{20}}^{b-x_{20}} \omega_2(x) dx \quad (3.1)$$

Подставляя сюда выражения для  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также  $dx$ , согласно формуле (2.5) и интегрируя, получим

$$P = \rho b V_\infty^2 \pi \left( A_0 + B_0 + \frac{A_1 + B_1}{2} \right) \quad (3.2)$$

Для определения коэффициентов  $A_0, B_0, A_1, B_1$  из системы уравнений (2.9), исключая остальные коэффициенты, легко получить систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} (c_8 - c_1) A_0 + (1 + c_3 c_7 - c_1 c_8) B_0 &= (1 + c_8) \sin \alpha - 1/2 a_{20} - \\ &\quad - 1/2 a_{10} c_8 + a_{12} c_7 + a_{14} c_{10} + a_{24} c_{10} c_8 \\ (1 + c_3 c_7 - c_1 c_8) A_0 + (c_8 - c_1) B_0 &= (1 + c_8) \sin \alpha - 1/2 a_{10} - \\ &\quad - 1/2 a_{20} c_8 + a_{22} c_7 + a_{24} c_{10} + a_{14} c_{10} c_8 \\ c_4 c_9 A_0 - c_2 B_0 + (c_6 c_9 - 1) A_1 - c_5 B_1 &= a_{23} c_9 - a_{11} \\ -c_2 A_0 + c_4 c_9 B_0 - c_5 B_1 + (c_6 c_9 - 1) B_1 &= a_{13} c_9 - a_{21} \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. В качестве примера рассмотрим течение, обтекающее две равные параллельные пластинки длиной  $b$ , удаленные одна от другой на расстояние  $h$ :

Из теории крыльев в плоско-параллельном потоке известно, что в этом случае величина подъемной силы определяется формулой  $P = 2\rho V_\infty b \sin \alpha B$ , где  $B$  зависит только от  $h/b$ . При  $h/b = 1$  будет  $B \approx 0.855$ , и, следовательно

$$P = 1.71\pi\rho V_\infty b \sin \alpha \quad (4.4)$$

В данном случае система (3.3) упрощается. Принимая  $h=b$  и пользуясь (2.8) и (2.2), найдем

$$A_0 = B_0 = 0.925 \sin \alpha, \quad A_1 = B_1 = -0.14 \sin \alpha$$

Подстановка в формулу (3.2) дает совпадение с формулой (4.4).

Поступила в редакцию

20 VIII 1948