

О ЛАМИНАРНОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ НАД СТАЦИОНАРНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Л. Н. Гутман

(Москва)

В работе рассматривается движение воздуха, которое возникает над стационарным источником тепла, помещенным в какую-либо точку пространства или же на однородную горизонтальную поверхность¹. Такого рода движения, повидимому, имеют место в облаках при выделении тепла вследствие конденсации водяного пара при термической конвекции над нагретой землей, когда наблюдаются колеблющиеся струйки теплого воздуха; наконец, эта задача может найти применение в технике, так как при горении имеет место также явление термической конвекции.

1. Будем исходить из уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости, упрощенных согласно теории термической конвекции [3]. Кроме того, будем пренебрегать отклоняющей силой вращения земли. Тогда для установившегося осесимметричного движения в цилиндрической системе координат z, r (ось z направлена вверх) будем иметь

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ur)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} + \lambda \vartheta \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial (ur)}{\partial r} + \frac{\partial (wr)}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь u, w — составляющие скорости вдоль осей r, z соответственно, ρ_0 — постоянная статическая плотность воздуха, ϑ и p — отклонения температуры и давления от их значений в спокойном воздухе, ν, k — коэффициенты вязкости и теплопроводности, $\lambda = g\beta$, где g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения воздуха.

Будем предполагать, что ширина струйки нагретого воздуха, возникающей над источником тепла, мала по сравнению с ее длиной. Тогда согласно теории пограничного слоя (пограничный слой здесь направлен

¹ Когда работа была закончена, автор узнал, что еще в 1937 г. Я. Б. Зельдович опубликовал статью [1], в которой указал на возможность получения точных решений в задаче о свободно восходящих конвективных потоках. Я. Б. Зельдович, решая уравнений, ограничился тем, что выписал формулы, вытекающие из оценки размерностей. В 1941 г. В. Шмидт [2] довел до конца вычисления для случая турбулентного движения.

вертикально вверх вдоль струи) вместо уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (1.5)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \lambda \vartheta \quad (1.6)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (1.7)$$

Из уравнения (1.5) имеем $p = \text{const} = 0$, так как $p = 0$ при $r = \infty$.

В качестве краевых условий примем, что общее движение воздуха отсутствует и что температурные возмущения затухают на достаточном расстоянии от источника тепла:

$$\vartheta = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } r = \infty \quad (1.8)$$

Далее, так как движение осесимметричное, то

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (1.9)$$

Легко видеть, что (с точностью теории пограничного слоя) количество тепла, переносимого жидкостью в единицу времени через любую горизонтальную поверхность, будет величиной постоянной, характеризующей сбильность источника тепла. Имеем

$$2\pi c_p \rho_0 Q = C \quad \left(Q = \int_0^{\infty} w \vartheta r dr, \quad C = \text{const} \right) \quad (1.10)$$

где c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении. Величину Q будем считать известной. Это еще одно условие, которому должно удовлетворять решение задачи.

Уравнение неразрывности (1.4) позволяет ввести функцию тока:

$$u = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.11)$$

Тогда уравнения (1.6) и (1.7) примут вид

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = \nu \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right) + \lambda \vartheta \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = k \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (1.13)$$

Рассмотрим случай точечного источника тепла. Поскольку в действительности источник тепла всегда имеет конечные размеры, то наше решение будет справедливым, только начиная с некоторой высоты, где движение становится автомодельным.

Это ограничение позволяет искать решение в форме

$$\psi = 2\nu z F(\eta), \quad \vartheta = \frac{Q}{\nu z} \tau(\eta) \quad \left(\eta = \frac{r^2}{4z} \sqrt{\frac{\lambda Q}{\nu^3}} \right) \quad (1.14)$$

Здесь η , F и τ будут безразмерными величинами; числовые множители введены для удобства дальнейших преобразований.

Тогда вместо (1.12) и (1.13), обозначая штрихом дифференцирование по η , будем иметь

$$-FF'' = (\eta F''')' + \tau, \quad -P(F\tau' + F'\tau) = (\eta\tau')' \quad (1.15)$$

где $P = \nu/k$ — так называемое число Прандтля. Интегрируя уравнение (1.15), получим

$$-PF\tau = \eta\tau' \quad (1.16)$$

При этом постоянная интеграция положена равной нулю. Действительно $\tau(0)$ и $F'(0)$ конечны по смыслу задачи. Эти величины пропорциональны значениям температуры и вертикальной скорости в середине струи. Тогда из очевидных равенств

$$u \Big|_{r=0} = \frac{2\nu}{r} (\eta F' - F) \Big|_{r=0} = \sqrt[4]{\frac{\lambda Q \nu}{z^3}} \left(\sqrt{\eta} F' - \frac{F}{\eta} \right) \Big|_{\eta=0} = 0$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{Q}{\nu} \sqrt[4]{\frac{\lambda Q}{\nu^3}} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{z^3}} \tau' \Big|_{\eta=0} = 0$$

следует, что постоянная интеграция равна нулю, так как

$$\eta\tau' \Big|_{\eta=0} = F(0) = 0 \quad (1.17)$$

Покажем, что если $P = 1$, то систему из уравнений (1.15) первого и (1.16) можно одной квадратурой свести к нелинейному уравнению, которое сравнительно просто решается методом последовательных приближений.

Подставив F из (1.16) в первое уравнение (1.15) и разделив обе части уравнения на τ , получим ($P = 1$)

$$\frac{\tau'}{\tau^3} \eta F'' - \frac{1}{\tau} (\eta F''')' = - \left[\frac{\eta F''}{\tau} \right]' = 1$$

Отсюда, интегрируя, имеем

$$\tau = -F'' \quad (1.18)$$

При этом постоянная интеграции положена равной нулю, как это вытекает из условия

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = \left(\frac{\lambda Q}{\nu^3} \right)^{3/4} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{z}} F'' \Big|_{\eta=0} = 0$$

Наконец, из (1.16) и (1.18) для функции $F(\lambda)$ получаем нелинейное уравнение

$$\eta F'''' + FF'' = 0 \quad (1.19)$$

Для отыскания одного из краевых условий следует использовать выражение (1.10). Заменяя в нем w и ϑ по формулам (1.11) и (1.14), а затем подставляя τ согласно (1.18), последовательно имеем

$$2 \int_0^{\infty} F' \tau d\eta = 1, \quad -2 \int_0^{\infty} F' F'' d\eta = -F'^2(\eta) \Big|_0^{\infty} = 1 \quad (1.20)$$

Так как, согласно (1.8), (1.11) и (1.14)

$$F'(\infty) = 0 \quad (1.21)$$

то из (1.20) получим

$$F'(0) = 1 \quad (1.22)$$

Как легко показать, решения уравнения (1.19), удовлетворяющего условию $F'(0) = -1$, не существует.

Таким образом, решение уравнения (1.19) должно удовлетворять краевым условиям (1.17), (1.21) и (1.22).

Для того чтобы составить интегральное уравнение из дифференциального уравнения (1.19), будем рассматривать (1.19) как линейное уравнение первого порядка относительно F'' . Тогда, считая функцию F при втором члене как бы известной, запишем

$$F'' = C \exp - \int_0^\eta \frac{F}{\eta} d\eta \quad (1.23)$$

где C — постоянная интегрирования.

Интегрируя и удовлетворяя условиям (1.17), (1.21) и (1.22), получим

$$F = C \int_0^\infty \int_\eta^\infty \left(\exp - \int_0^\eta \frac{F}{\eta} d\eta \right) d\eta d\eta \quad \left(\frac{1}{C} = \int_0^\infty \left[\exp - \int_0^\eta \frac{F}{\eta} d\eta \right] d\eta \right) \quad (1.24)$$

Решаем интегральное уравнение (1.24) методом последовательных приближений.

В правую часть вместо F подставляем $F_0 = \eta$; интегрируя, находим $F_1 = 1 - e^{-\eta}$. Затем подставляем F_1 в правую часть (1.24); численной интеграцией находим F_2 . Дальше этот процесс повторяется.

Доказательство сходимости последовательных приближений F_n аналогично доказательству Вейля^[4] для уравнения Блазпуса. Практически при вычислениях удобнее (процесс сходится значительно быстрее) брать F_n по формуле

$$F_n = \frac{1}{2} (F_{n-2} + F_{n-1})$$

Тогда уже пятое приближение оказывается верным с точностью до четвертого знака после запятой.

В табл. 1 приведены результаты вычислений F , F' и F'' . Эти данные позволяют вычислять скорости и температуру по формулам

$$u = \frac{2\nu}{r} (\eta F' - F), \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda Q}{\nu}} F', \quad \vartheta = -\frac{Q}{\nu z} F'' \quad (1.25)$$

которые вытекают из (1.11), (1.14) и (1.18).

Из выражений для ω следует, что профиль вертикальных скоростей с высотой постепенно расширяется; максимальное значение ω (имеющее место на оси струи) на всех высотах имеет одно и то же значение, зависящее только от обильности источника тепла.

Этот результат может объяснить образование так называемого «приземного яруса» (по А. А. Скворцову [5]). Действительно, число Рейнольдса струи

$$R = \frac{z}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda Q}{\nu}}$$

возрастает пропорционально высоте. Следовательно, на какой-то определенной высоте оно достигает своего критического значения и должно произойти разрушение ламинарного потока; в дальнейшем с образованием слоя турбулентности подъем воздуха будет прекращаться.

Таблица 1

| η | F | F' | $-F''$ | η | F | F' | $-F''$ | η | F | F' | $-F''$ |
|--------|------|-------|--------|--------|------|-------|--------|--------|------|-------|--------|
| 0 | 0 | 1.000 | 0.666 | 2.1 | 1.24 | 0.313 | 0.134 | 9.0 | 2.24 | 0.061 | 0.010 |
| 0.1 | 0.10 | 0.937 | 0.604 | 2.2 | 1.27 | 0.330 | 0.127 | 9.5 | 2.27 | 0.056 | 0.009 |
| 0.2 | 0.19 | 0.879 | 0.549 | 2.3 | 1.30 | 0.318 | 0.120 | 10 | 2.30 | 0.052 | 0.008 |
| 0.3 | 0.27 | 0.826 | 0.502 | 2.4 | 1.33 | 0.306 | 0.113 | 11 | 2.35 | 0.045 | 0.006 |
| 0.4 | 0.35 | 0.778 | 0.457 | 2.5 | 1.36 | 0.294 | 0.107 | 12 | 2.39 | 0.039 | 0.005 |
| 0.5 | 0.43 | 0.733 | 0.419 | 2.6 | 1.39 | 0.284 | 0.102 | 13 | 2.43 | 0.034 | 0.004 |
| 0.7 | 0.50 | 0.693 | 0.398 | 2.7 | 1.42 | 0.274 | 0.097 | 14 | 2.46 | 0.030 | 0.003 |
| 0.6 | 0.57 | 0.656 | 0.354 | 2.8 | 1.45 | 0.265 | 0.092 | 15 | 2.50 | 0.027 | 0.002 |
| 0.8 | 0.64 | 0.623 | 0.327 | 2.9 | 1.48 | 0.256 | 0.087 | 16 | 2.52 | 0.024 | 0.002 |
| 0.9 | 0.70 | 0.591 | 0.303 | 3.0 | 1.50 | 0.247 | 0.082 | 17 | 2.54 | 0.022 | 0.001 |
| 1.0 | 0.75 | 0.561 | 0.280 | 3.5 | 1.61 | 0.210 | 0.055 | 18 | 2.56 | 0.020 | 0 |
| 1.1 | 0.80 | 0.533 | 0.258 | 4.0 | 1.71 | 0.181 | 0.052 | 19 | 2.57 | 0.017 | |
| 1.2 | 0.86 | 0.508 | 0.239 | 4.5 | 1.80 | 0.158 | 0.043 | 20 | 2.58 | 0.016 | |
| 1.3 | 0.92 | 0.484 | 0.225 | 5.0 | 1.87 | 0.138 | 0.035 | 30 | 2.71 | 0.008 | |
| 1.4 | 0.96 | 0.462 | 0.219 | 5.5 | 1.94 | 0.123 | 0.018 | 40 | 2.29 | 0.006 | |
| 1.5 | 1.00 | 0.442 | 0.196 | 6.0 | 2.00 | 0.109 | 0.024 | 50 | 2.83 | 0.004 | |
| 1.6 | 1.05 | 0.423 | 0.183 | 6.5 | 2.05 | 0.097 | 0.021 | 60 | 2.87 | 0.004 | |
| 1.7 | 1.08 | 0.405 | 0.172 | 7.0 | 2.10 | 0.088 | 0.018 | 70 | 2.90 | 0.003 | |
| 1.8 | 1.13 | 0.388 | 0.160 | 7.5 | 2.14 | 0.080 | 0.016 | 80 | 2.92 | 0.002 | |
| 1.9 | 1.17 | 0.374 | 0.152 | 8.0 | 2.18 | 0.073 | 0.013 | 90 | 2.94 | 0.001 | |
| 2.0 | 1.20 | 0.385 | 0.143 | 8.5 | 2.21 | 0.067 | 0.011 | 100 | 2.95 | 0 | |

В то же время наличие такого яруса позволяет утверждать, что, несмотря на пульсирующий характер струек, это движение по существу ламинарно.

Другая особенность явления та, что поток массы воздуха через любую горизонтальную плоскость не зависит от обильности источника:

$$2\pi\rho_0 \int_0^{\infty} \omega r dr = 4\pi\rho_0 \nu F(\infty) z \approx 12\pi\nu\rho_0 z$$

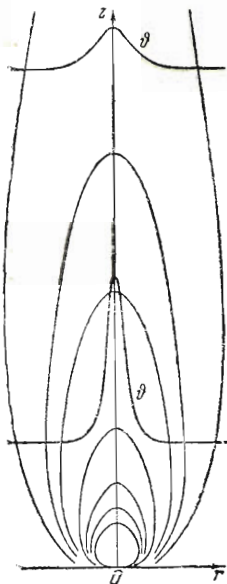
Кинетическая энергия потока для сечения z будет

$$K = \pi\rho_0 \int_0^{\infty} \omega^2 r dr = 4\pi\rho_0 \nu \sqrt{Q\lambda} z \int_0^{\infty} F'^2 d\eta \approx 4\pi\rho_0 \nu \sqrt{\lambda Q} z \quad (1.26)$$

Знак приближенного равенства поставлен здесь потому, что численное интегрирование дает

$$\int_0^{\infty} F'^2 d\eta \approx 1,04$$

Для иллюстрации решения на фиг. 1, пользуясь данными табл. 1, построены линии пересечения изоповерхностей температур с вертикальной плоскостью; картина изотерм напоминает очертания пламени при горении свечи. Это объясняется некоторой аналогией процессов, — при горении обильность источника тепла Q пропорциональна скорости подачи горючего материала к горелке. На фиг. 1 нанесено, кроме того, распределение температур ϑ поперек струи на двух высотах. Максимальная температура, имеющая место на оси струи, уменьшается обратно пропорционально высоте так, что полное количество тепла на всех высотах остается постоянным:



Фиг. 1

$$T = 2 \pi c_p \int_0^{\infty} \vartheta r dr = 8 \pi c_p \sqrt{\frac{Q\nu}{\lambda}} \quad (1.27)$$

Найдем теперь выражение для давления p_0 на оси струи. Интегрируя уравнение (1.1) по r , будем иметь

$$p_0 = \rho_0 \int_0^{\infty} \left\{ -u \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ur)}{\partial r} \right) \right] \right\} dr$$

Отсюда, отбрасывая малый член $\nu \partial^2 u / \partial z^2$, находим

$$p_0 = - \frac{\rho_0 u^2}{2} \Big|_{r=\infty}^{r=0} - \rho_0 \nu \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{r=\infty}^{r=0} - \rho_0 \int_0^{\infty} w \frac{\partial u}{\partial z} dr$$

Согласно (1.9) и (1.25) $u = \partial w / \partial z = 0$ при $r = 0$ и $r = \infty$. Окончательно имеем

$$p_0 = \rho_0 \int_0^{\infty} w \frac{\partial u}{\partial z} dr = - \frac{\rho_0 \sqrt{\lambda Q \nu}}{2z} \int_0^{\infty} F'^2 d\eta \approx - \frac{\rho_0 \sqrt{\lambda Q \nu}}{2z} \quad (1.28)$$

Следовательно, давление на оси струи меньше, чем снаружи, и разница эта изменяется обратно пропорционально высоте.

В заключение отметим, что при экспериментах почти всегда измерить или вычислить Q очень трудно, тогда как в середине струи значение вертикальной скорости $w = w_0$ не зависит от высоты и может быть сравнительно легко измерено. Поэтому из (1.25) получим

$$Q = \frac{\nu w_0^2}{\lambda} \quad (1.29)$$

Основные формулы, выраженные через w_0 , имеют вид

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{w_0 r^2}{4\nu z}, & w &= w_0 F'(\eta), & \vartheta &= \frac{w_0^3}{\nu z} \tau(\eta) \\ K &= 4\pi\rho_0\nu w_0 z, & T &= \frac{8\pi c_p w_0}{\lambda}, & p_0 &= -\frac{\rho_0 w_0^2}{2z} \end{aligned} \quad (1.30)$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда источник тепла помещен в поток с постоянной скоростью V , направленной снизу вверх. Система уравнений (1.12), (1.13) остается справедливой, но краевые условия (1.8) теперь будут иными, а именно,

$$\vartheta = 0, \quad w = V \quad \text{при} \quad r = \infty \quad (2.1)$$

Сохраняя прежние безразмерные величины F и τ согласно (1.14) введем новую переменную

$$\eta = \frac{r^2 V}{4\nu z} \quad (2.2)$$

Вместо первого уравнения (1.15) будем иметь

$$-FF'' = (\eta F'')' + 2\alpha\tau \quad \left(\alpha = \frac{\lambda Q}{2\nu V^2}\right) \quad (2.3)$$

Второе уравнение (1.15) сохраняет свою форму.

Уравнение (2.3), аналогично уравнению (1.15), приводится к виду

$$\tau = -\frac{1}{2\alpha} F''(\eta) \quad (2.4)$$

Счевидно, уравнение (1.19) останется прежним; краевые условия будут

$$F' = 1 \quad \text{при} \quad \eta = \infty, \quad F = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad (2.5)$$

Третье условие получим из соотношения (1.10) с помощью равенств (2.2) и (2.4):

$$F' = \sqrt{1 + 2\alpha} \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad (2.6)$$

Интегральное уравнение, аналогичное (1.23), позволяет тем же методом последовательных приближений найти решение задачи для каждого конкретного значения α .

При достаточно большой скорости V величина $\alpha \ll 1$. Разлагая (2.6) в ряд, имеем

$$F'(0) = 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2} - \dots \quad (2.7)$$

Определим $F(\eta)$ следующим разложением:

$$F(\eta) = \eta + \alpha F_1(\eta) + \alpha^2 F_2(\eta) + \dots \quad (2.8)$$

Тогда для функций F_n получим систему:

$$\begin{aligned} F_1''' + F_1'' &= 0, & F_2''' + F_2'' &= -\frac{F_1 F_1''}{\eta} \\ F_3''' + F_3'' &= -\frac{F_1 F_2'' + F_1'' F_2}{\eta}, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эту систему согласно (2.7) и (2.5) надлежит решить при краевых условиях

$$F_1 = F_2 = \dots = 0, \quad F' = 1, \quad F_2' = -\frac{1}{2}, \quad F_3' = \frac{1}{2}, \dots \text{ при } \eta = 0 \quad (2.10)$$

$$F_1' = F_2' = F_3' = \dots = 0 \quad \text{при } \eta = \infty \quad (2.11)$$

Уравнения (2.9) последовательно решаются в квадратурах. Первое уравнение системы дает

$$F_1 = 1 - e^{-\eta} \quad (2.12)$$

Тогда для F_2 имеем уравнение

$$F_2''' + F_2'' = \frac{1}{\eta} (e^{-\eta} - e^{-2\eta}) \quad (2.13)$$

Отсюда

$$F_2'' = e^{-\eta} [C + \log \eta - Ei(-\eta)] \quad \left(Ei(-\eta) = \int_{\infty}^{\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta \right) \quad (2.14)$$

Здесь C — постоянная интегрирования; значения интегральной показательной функции $Ei(-\eta)$ можно найти в таблицах [6].

Интегрируя уравнение (2.13) и удовлетворяя условию (2.11), имеем

$$F_2' = -F_2'' + Ei(-\eta) - Ei(-2\eta) \quad (2.15)$$

Для определения постоянной интеграции C заметим, что

$$F_2''(0) = C - \gamma,$$

где $\gamma = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера. Так как $F_2'(0) = -1/2$, то из (2.15) находим

$$C = \frac{1}{2} + \gamma - \log 2 = 0.3841$$

Наконец, интегрируя выражение (2.15) еще раз и при этом требуя, чтобы $F_2(0) = 0$ согласно (2.10), получим

$$F_2 = -F_2' + \eta [Ei(-\eta) - Ei(-2\eta)] + e^{-\eta} - \frac{1}{2} e^{-2\eta} - 1 \quad (2.16)$$

Теперь из третьего уравнения (2.9) можно найти F_3 и т. д. Значения функций F_1, F_2, F_1', F_2' и F_2'' согласно формулам (2.12) и (2.16) приведены в табл. 2.

Если ограничиться первыми двумя степенями α , то основные формулы будут иметь следующий вид:

$$\omega = V(1 + \alpha e^{-\eta}), \quad T = \frac{\pi c_p Q}{V} (2 - \alpha)$$

$$\vartheta = \frac{Q}{2\sqrt{z}} \{e^{-\eta} + \alpha e^{-\eta} [Ei(-\eta) - \log \eta - 0.384]\} \quad (2.17)$$

$$\vartheta_{r=0} = \frac{Q}{2\sqrt{z}} (1 + 0.193\alpha) \approx \frac{Q}{2\sqrt{z}}, \quad p_0 = -\frac{\lambda Q p_0}{2Vz} (1 - 0.25\alpha) \approx -\frac{p_0 \lambda Q}{2Vz}$$

В случае, когда $\alpha \gg 1$, решение нелинейного уравнения (1.19) можно свести к интегрированию системы линейных уравнений.

Таблица 2

| η | F_1 | F_1' | F_2 | $-F_2'$ | F_2'' |
|--------|-------|--------|-------|---------|---------|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | -0.193 |
| 0.01 | 0.010 | 0.900 | 0.005 | 0.502 | -0.181 |
| 0.05 | 0.049 | 0.951 | 0.025 | 0.508 | -0.137 |
| 0.1 | 0.095 | 0.905 | 0.051 | 0.514 | -0.086 |
| 0.2 | 0.181 | 0.819 | 0.102 | 0.518 | -0.002 |
| 0.3 | 0.259 | 0.741 | 0.154 | 0.515 | 0.064 |
| 0.4 | 0.330 | 0.670 | 0.205 | 0.506 | 0.114 |
| 0.5 | 0.394 | 0.606 | 0.255 | 0.492 | 0.152 |
| 0.6 | 0.451 | 0.549 | 0.306 | 0.476 | 0.180 |
| 0.7 | 0.508 | 0.500 | 0.350 | 0.457 | 0.199 |
| 0.8 | 0.551 | 0.449 | 0.395 | 0.436 | 0.212 |
| 0.9 | 0.593 | 0.407 | 0.437 | 0.414 | 0.219 |
| 1.0 | 0.632 | 0.368 | 0.478 | 0.392 | 0.222 |
| 1.5 | 0.777 | 0.223 | 0.647 | 0.286 | 0.198 |
| 2.0 | 0.865 | 0.135 | 0.766 | 0.197 | 0.152 |
| 2.5 | 0.918 | 0.082 | 0.818 | 0.133 | 0.109 |
| 3.0 | 0.950 | 0.050 | 0.902 | 0.087 | 0.074 |
| 3.5 | 0.970 | 0.030 | 0.938 | 0.056 | 0.050 |
| 4.0 | 0.982 | 0.018 | 0.961 | 0.035 | 0.032 |
| 4.5 | 0.989 | 0.011 | 0.975 | 0.023 | 0.021 |
| 5.0 | 0.993 | 0.007 | 0.984 | 0.014 | 0.013 |
| 6.0 | 0.998 | 0.002 | 0.994 | 0.006 | 0.005 |
| 7.0 | 0.999 | 0.001 | 0.998 | 0.002 | 0.002 |
| 8.0 | 1.000 | 0 | 0.999 | 0.001 | 0.001 |

Действительно, если перейти к новой переменной

$$\xi = \varepsilon\eta \quad \left(\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right) \quad (2.18)$$

то краевые условия примут вид

$$F = 0, \quad F' = 1 \quad \text{при } \xi = 0, \quad F' = \varepsilon \quad \text{при } \xi = \infty$$

Так как $\varepsilon \ll 1$ при $\alpha \gg 1$, то решение можно искать в виде ряда

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots$$

Для определения F_n получается система

$$\begin{aligned} \xi F_0''' + F_0 F'' &= 0, & \xi F_1''' + F_0 F_1'' + F_0' F_1 &= 0 \\ \xi F_2''' + F_0 F_2'' + F_0' F_2 &= -F_1 F_1'', \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} F_0 = F_1 = \dots = 0, \quad F_0' = 1, \quad F_1' = F_2' = \dots = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \\ F_0' = 0, \quad F_1' = 1, \quad F_2' = F_3' = \dots = 0 \quad \text{при } \xi = \infty \end{aligned} \quad (2.20)$$

Первое уравнение (2.19) совпадает с (1.19), решение которого уже имеется (табл. 1).

Интегрирование последующих линейных уравнений проще всего проделать следующим образом.

Разделив уравнения на ξ и перенеся затем все члены, кроме первых двух, в правую часть, можно записать уравнения (2.19) в интегральной форме аналогично тому, как это было сделано с уравнением (1.19). В результате, после элементарных преобразований придем к интегральным уравнениям

$$F_1 = C_1 (\xi - F_0) - \int_0^\xi \int_0^\xi F_0'' \int_0^\xi \frac{F_1}{\xi} d\xi d\xi d\xi$$

$$F_2 = C_2 (\xi - F_0) - \int_0^\xi \int_0^\xi F_0'' \int_0^\xi \frac{F_2}{\xi} d\xi d\xi d\xi + C_1 F_1 + \Phi(\xi)$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\xi \int_0^\xi F_0'' \left(\int_0^\xi \frac{F_1}{\xi} d\xi \right)^2 d\xi d\xi$$

$$C_1 = 1 + \int_0^\infty F_0'' \int_0^\xi \frac{F_1}{\xi} d\xi d\xi$$

$$C_2 = \int_0^\infty F_0'' \int_0^\xi \frac{F_2}{\xi} d\xi d\xi - \Phi(\infty) - C_1$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 подобраны так, чтобы удовлетворялись условия (2.20),

Если решать одно за другим эти уравнения методом последовательных приближений аналогично тому, как было решено уравнение (1.19), то уже четвертое приближение дает решение с точностью до трех знаков после запятой.

В заключение автор выражает благодарность К. А. Ереминой за помощь при расчетах таблиц и графиков.

Поступила в редакцию

20 I 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Предельные законы свободно восходящих конвективных потоков. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1937. Т. 7. Вып. 12.
2. Schmidt W. Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft. ZAMM. 1941. Bd. 21
3. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред. Гостехиздат. 1944.
4. Weil H. On the Differential Equations of the Simplest Boundary Layer, Annals of Mathematics. 1942. Vol. 43. No. 2.
5. Скворцов А. А. Об испарении и обмене в приземном слое атмосферы. Труды Института энергетики Акад. наук Уз. ССР. Ташкент. 1947. Вып. 1.
6. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Гостехиздат. 1948.