

ОБ ИЗГИБЕ
 ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНТУРОМ
 ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Г. А. Гринберг, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

Задача об изгибе прямоугольной пластины с закрепленным контуром, имеющая большое практическое значение, до настоящего времени точно не решена; приближенные же решения приводят к громоздким выкладкам (см., например, П. Ф. Папкович^[1]), даже если интересоваться только основными расчетными данными (прогиб в центре, изгибающий момент посередине стороны контура и т. д.).

В § 1 настоящей работы задача сведена к решению некоторого интегрального уравнения, которое хотя и не решается точно, но допускает весьма эффективные приближения. В § 2 и 3 даны приближенные формулы, по которым с небольшой затратой вычислительного труда можно подсчитывать элементы изгиба (прогибы, изгибающие моменты, перерезывающие силы) для любых внешних нагрузок.

§ 1. Интегральное уравнение задачи. Рассмотрим прямоугольную пластину с размерами a и b (фиг. 1), нагруженную распределенной нагрузкой $q(x, y)$ на единицу площади.

Обозначив через $w(x, y)$ прогиб, умноженный на цилиндрическую жесткость¹, будем иметь для $w(x, y)$ уравнение

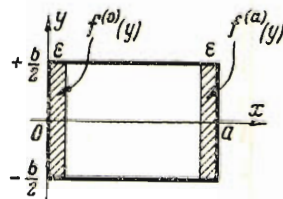
$$\Delta^2 w = q(x, y) \quad (1.1)$$

и граничные условия

$$w|_{x=0} = w|_{x=a} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad (1.3)$$

$$w \Big|_{y=\pm b/2} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\pm b/2} = 0 \quad (1.4)$$

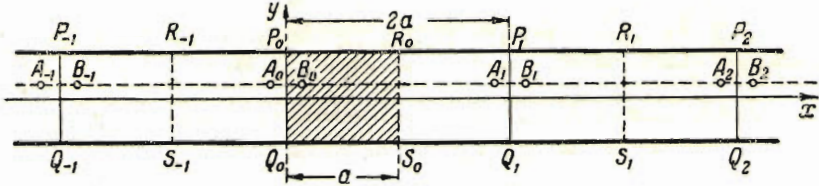


Фиг. 1

Для того чтобы прийти к эффективному решению поставленной таким образом задачи, рассмотрим сперва вопрос об изгибе бесконечной в направлении оси x пластины той же ширины b , как данная, закрепленной вдоль сторон $y = \pm b/2$ и подвергающейся воздействию периодической по оси x (с периодом $2a$) системы одинаковых сосредоточенных сил (силовая «цепочка»), расположенных в точках A_i, B_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) прямой $y = \text{const}$ (фиг. 2). Подобная система сил вызовет, очевидно, периодический же по оси x прогиб, причем будут выполнены условия

¹ В дальнейшем изложении величину $w(x, y)$ для краткости будем называть также прогибом.

(1.4) на сторонах $y = \pm b/2$ и условия (1.3) на сторонах $P_0 Q_0 (x = 0)$ и $R_0 S_0 (x = a)$. Добавляя еще аналогичным образом периодические силы, распределенные вдоль сторон $P_i Q_i$ и $R_i S_i$, можно, не нарушая выполнения указанных граничных условий, подходящим выбором закона рас-



Фиг. 2

пределения этих сил добиться того, чтобы были выполнены и условия (1.2) на сторонах $P_0 Q_0$ и $R_0 S_0$. Это требование приведет к некоторому интегральному уравнению для искомого распределения сил, которое и выводится ниже.

Легко видеть, что разложение $w(x, y)$ в тригонометрический ряд, соответствующее указанной системе сил, должно иметь вид

$$w(x, y) = \frac{1}{2} w_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \cos \alpha_n x \quad \left(\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \right) \quad (1.5)$$

и из самого способа получения этого ряда видно, что ряд должен быть быстро сходящимся, поскольку на концах интервала $0 \leq x \leq a$ равны друг другу значения как самой функции $w(x, y)$, так и ее первых и вторых производных¹.

В соответствии со сказанным выше приложим по ребрам $x = 0$ и $x = a$ распределенные нагрузки $f^{(0)}(y)$ и $f^{(a)}(y)$ соответственно, которые впоследствии подберем так, чтобы удовлетворить условиям (1.2)².

Распределяя нагрузки $f^{(0)}(y)$ и $f^{(a)}(y)$ по полоскам ширины ε (фиг. 1), где $\varepsilon \rightarrow 0$, вместо (1.1) получим

$$\Delta^2 w = p(x, y) = \begin{cases} q(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} f^{(0)}(y) & \text{при } 0 < x < \varepsilon \\ q(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} f^{(a)}(y) & \text{при } a - \varepsilon < x < a \\ q(x, y) & \text{при остальных } x \end{cases} \quad (1.6)$$

¹ Из этих условий вытекает, как известно, что коэффициенты $w_n(y)$ убывают не медленнее, чем $1/n^3$.

² В работе Ю. В. Репмана [2] была сделана попытка найти решение той же задачи в форме $w(x, y) = \sum w_n(y) \sin \alpha_n x$. При этом условия (1.2) выполнены, а (1.3) не выполнены, и для того чтобы им удовлетворить, надо, очевидно, по кромкам $x = 0$ и $x = a$ приложить распределенные моменты, подлежащие определению. Однако получаемые таким способом ряды по самой своей природе не могут хорошо сходиться, ибо существу данной задачи соответствует, как показано выше, разложение по косинусам, а не по синусам (см. также замечание в конце § 1). Заметим, что интегральное уравнение задачи Репманом не было получено.

Подставляя (1.5) в (1.1) и разлагая $p(x, y)$ в тригонометрический ряд по $\cos \alpha_n x$, для $w_n(y)$ получим

$$\frac{d^4 w_n}{dy^4} - 2\alpha_n^2 \frac{d^2 w_n}{dy^2} + \alpha_n^4 w_n = p_n(y) \quad (1.7)$$

где

$$p_n(y) = q_n(y) + \frac{2}{a} [f^{(0)}(y) + (-1)^n f^{(a)}(y)], \quad q_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \cos \alpha_n x dx \quad (1.8)$$

Общим интегралом уравнения (1.7) будет выражение

$$w_n(y) = C_{1n} \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{2n} \operatorname{sh} \alpha_n y + C_{3n} \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{4n} \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{1}{2\alpha_n^3} \int_0^y P_n(y, t) K_n(y, t) dt \quad (1.9)$$

где

$$K_n(y, t) = \alpha_n (y-t) \operatorname{ch} \alpha_n (y-t) - \operatorname{sh} \alpha_n (y-t) \quad (1.10)$$

Определив постоянные C_{in} из граничных условий (1.4) и подставив выражение для $w_n(y)$ в (1.5), получим формулу для прогиба

$$w(x, y) = \frac{1}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \left\{ [f_n(y) + g_n(y)] \int_0^{b/2} [(-1)^{n+1} f^{(a)}(t) - f^{(0)}(t)] K_n\left(\frac{b}{2}, t\right) dt + [\varphi_n(y) + \psi_n(y)] \int_0^{b/2} [(-1)^{n+1} f^{(a)}(t) - f^{(0)}(t)] K_n'\left(\frac{b}{2}, t\right) dt \right\} + \frac{1}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \left\{ [f_n(y) - g_n(y)] \int_0^{-b/2} [(-1)^{n+1} f^{(a)}(t) - f^{(0)}(t)] K_n\left(\frac{-b}{2}, t\right) dt + [\varphi_n(y) - \psi_n(y)] \int_0^{-b/2} [(-1)^{n+1} f^{(a)}(t) - f^{(0)}(t)] K_n'\left(\frac{-b}{2}, t\right) dt \right\} - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \int_0^y [(-1)^{n+1} f^{(a)}(t) - f^{(0)}(t)] K_n(y, t) dt + F(x, y) \quad (1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_n(y) &= \frac{(\operatorname{sh} \beta_n + \beta_n \operatorname{ch} \beta_n) \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{sh} \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n + \beta_n} \\ g_n(y) &= \frac{(\operatorname{ch} \beta_n + \beta_n \operatorname{sh} \beta_n) \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{ch} \beta_n \operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n - \beta_n} \\ \alpha_n \varphi_n(y) &= \frac{\alpha_n y \operatorname{sh} \beta_n \operatorname{ch} \alpha_n y - \beta_n \operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n - \beta_n} \\ \alpha_n \psi_n(y) &= \frac{\alpha_n y \operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n y - \beta_n \operatorname{sh} \beta_n \operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n + \beta_n} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(y)}{\alpha_n^3} \cos \alpha_n x \quad (1.13)$$

В разложении (1.13) функции $F_n(y)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 F_n(y) = & -\frac{1}{4} \left\{ [f_n(y) + g_n(y)] \int_0^{b/2} q_n(t) K_n\left(\frac{b}{2}, t\right) dt + \right. \\
 & + [f_n(y) - g_n(y)] \int_0^{-b/2} q_n(t) K_n\left(-\frac{b}{2}, t\right) dt + \\
 & + [\varphi_n(y) + \psi_n(y)] \int_0^{b/2} q_n(t) K_n'\left(\frac{b}{2}, t\right) dt + \\
 & \left. + [\varphi_n(y) - \psi_n(y)] \int_0^{-b/2} q_n(t) K_n'\left(-\frac{b}{2}, t\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^y q_n(t) K_n(y, t) dt \right\} \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

где

$$K_n'(y, t) = \frac{dK_n(y, t)}{dy} = \alpha_n^2(y-t) \operatorname{sh} \alpha_n(y-t) \quad (1.15)$$

При этом для $n=0$ следует осуществлять предельный переход и правые части формул (1.10) и (1.15) умножать на $1/2$.

Полученное решение (1.11) удовлетворяет точно шести граничным условиям из восьми¹. Остающиеся два граничные условия (1.2) дадут систему интегральных уравнений для функций $f^{(0)}(y)$ и $f^{(a)}(y)$.

Для получения этой системы положим $x=0$ и $x=a$ в (1.11) и переставим операции интегрирования и суммирования, после чего будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^{b/2} f^{(a)}(t) K^{(1)}(y, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{-b/2} f^{(a)}(t) L^{(1)}(y, t) dt + \int_0^y f^{(a)}(t) M^{(1)}(y, t) dt + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{b/2} f^{(0)}(t) K^{(2)}(y, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{-b/2} f^{(0)}(t) L^{(2)}(y, t) dt + \\
 & + \int_0^y f^{(0)}(t) M^{(2)}(y, t) dt = -aF(0, y) \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^{b/2} f^{(a)}(t) K^{(a)}(y, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{-b/2} f^{(a)}(t) L^{(2)}(y, t) dt + \int_0^y f^{(a)}(t) M^{(2)}(y, t) dt + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{b/2} f^{(0)}(t) K^{(1)}(y, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{-b/2} f^{(0)}(t) L^{(1)}(y, t) dt + \\
 & + \int_0^y f^{(0)}(t) M^{(1)}(y, t) dt = -aF(a, y)
 \end{aligned}$$

Ядра этих интегральных уравнений даются следующими рядами:

¹ Заметим, что в других способах решения той же задачи точно удовлетворяют лишь четырем условиям из восьми (см., например, [1, 3]).

$$\begin{aligned}
 K^{(1)}(y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^3} \left\{ [f_n + g_n] K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) + [\varphi_n + \psi_n] K_n' \left(\frac{b}{2}, t \right) \right\} \\
 K^{(2)}(y, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \left\{ [f_n + g_n] K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) + [\varphi_n + \psi_n] K_n' \left(\frac{b}{2}, t \right) \right\} \\
 L^{(1)}(y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^3} \left\{ [f_n - g_n] K_n \left(\frac{-b}{2}, t \right) + [\varphi_n - \psi_n] K_n' \left(\frac{-b}{2}, t \right) \right\} \\
 L^{(2)}(y, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \left\{ [f_n - g_n] K_n \left(\frac{-b}{2}, t \right) + [\varphi_n - \psi_n] K_n' \left(\frac{-b}{2}, t \right) \right\} \\
 M^{(1)}(y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_n^3} K_n(y, t), \quad M^{(2)}(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} K_n(y, t) \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Если бы удалось решить систему (1.16) точно, то прогиб $w(x, y)$ выразился бы в квадратурах через $f^{(0)}(y)$ и $f^{(a)}(y)$ при помощи (1.11).

Систему (1.16) можно преобразовать к двум интегральным уравнениям, содержащим порознь две неизвестные функции. Для этого достаточно сложить и вычесть уравнения системы (1.16). Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 f^{\pm}(y) &= 1/2 [f^{(0)}(y) \pm f^{(a)}(y)] \\
 K^{\pm}(y, t) &= K^{(1)}(y, t) \pm K^{(2)}(y, t) \\
 L^{\pm}(y, t) &= L^{(1)}(y, t) \pm L^{(2)}(y, t) \quad (1.18) \\
 M^{\pm}(y, t) &= M^{(1)}(y, t) \pm M^{(2)}(y, t) \\
 F^{\pm}(y) &= -a [F(0, y) \pm F(a, y)]
 \end{aligned}$$



Фиг. 3

Для неизвестных функций $f^+(y)$ и $f^-(y)$ получим два интегральных уравнения (1.19)

$$\int_0^{b/2} f^{\pm}(t) K^{\pm}(y, t) dt + \int_0^{-b/2} f^{\pm}(t) L^{\pm}(y, t) dt + 2 \int_0^y f^{\pm}(t) M^{\pm}(y, t) dt = F^{\pm}(y)$$

Ядра этих уравнений представляют собой такие же ряды, как (1.17), но только с четными или только с нечетными индексами.

Ввиду сложной структуры ядер уравнения (1.19) не удалось решить точно. Однако можно предложить весьма эффективный способ для приближенного их решения, заключающийся в следующем: пусть на кромках $x=0$ и $x=a$ закреплены лишь средние точки (фиг. 3), а распределенные нагрузки $f^{(0)}(y)$ и $f^{(a)}(y)$ заменены сосредоточенными силами $f^{(0)}(0)$ и $f^{(a)}(0)$. Тогда, полагая $y=0$ в (1.19), получим

$$f^{\pm}(0) [K^{\pm}(0, 0) - L^{\pm}(0, 0)] = F^{\pm}(0) \quad (1.20)$$

Отсюда сразу находятся величины $f^{\pm}(0)$, т. е. и $f^{(0)}(0)$ и $f^{(a)}(0)$, через которые непосредственно выражается прогиб $w(x, y)$.

Полученное первое приближение можно улучшить, закрепив еще точки $(x = 0, y = \pm b/4)$, $(x = a, y = \pm b/4)$, причем для соответствующих шести неизвестных сосредоточенных сил придется решать, вообще говоря, шесть линейных алгебраических уравнений¹. В § 2—3 будет показано, что для практических расчетов достаточно брать первое приближение,

Заметим также, что вычислительные преимущества предлагаемого метода заключаются не только в значительном сокращении выкладок, но и в том, что окончательные формулы типа (1.20) содержат в большей своей части бесконечные ряды (типа $K(0, 0)$ и $L(0, 0)$), не зависящие от внешней нагрузки². Ряды эти можно протабулировать раз и навсегда, в то время как в других расчетных методах приходится для каждого типа внешней нагрузки начинать все выкладки сначала (см., например, [1, 3]), чем и объясняется тот факт, что подробные расчетные таблицы имеются лишь для наиболее простых типов внешней нагрузки.

Отметим еще следующее обстоятельство: если бы мы разлагали прогиб $w(x, y)$ не по $\cos \alpha_n x$, а по $\sin \alpha_n x$, то разложение неизвестных сосредоточенных моментов содержало бы в числителе лишний множитель n (см. [2]). Кроме того, при получении интегрального уравнения пришлось бы составлять выражения $(\partial w / \partial x)_{x=0}$ и $(\partial w / \partial x)_{x=a}$, вследствие чего появился бы еще один множитель n . В результате все ряды содержали бы в своих членах лишний множитель n^2 , что заметно ухудшило бы их сходимость в соответствии с указанными выше общими соображениями (см. сноску на стр. 414). Ряды же, получаемые в принятом разложении по $\cos \alpha_n x$, сходятся очень быстро (см. § 2 и 3).

§ 2. Некоторые частные виды внешней нагрузки. 1. Симметричная нагрузка. Если нагрузка симметрична в направлении оси x (т. е. относительно прямой $x = a/2$), то

$$f^{(0)}(y) = f^{(a)}(y) = f^+(y) = f(y), \quad f^-(y) \equiv 0$$

так что остается одна неизвестная функция $f(y)$. Функции $F(0, y)$ и $F(a, y)$ при этом равны одна другой, так как $q_{2k-1}(y) \equiv 0$. Если нагрузка симметрична относительно прямой $y = 0$, то систему (1.19) можно упростить, пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} f^\pm(-y) &= f^\pm(y), & K_m(-y, -t) &= -K_m(y, t) \\ q_m(-y) &= q_m(y), & K_m'(-y, -t) &= K_m'(y, t) \end{aligned}$$

Напишем интегральное уравнение (1.19) для случая внешней нагрузки, симметричной по обоим направлениям:

$$\int_0^{b/2} f(t) K(y, t) dt + \int_0^a f(t) M(y, t) dt = -\frac{a}{2} F(0, y) \quad (2.1)$$

¹ В случае симметричной нагрузки вместо шести уравнений будет только два.

² В интегральных уравнениях от внешней нагрузки зависит только свободный член, но не ядра.

В уравнении (2.1)

$$K(y, t) = - \sum_n^{0, 2, 4, \dots} \frac{1}{\alpha_n^3} \left[f_n(y) K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) + \psi_n(y) K_n' \left(\frac{b}{2}, t \right) \right]$$

$$M(y, t) = \sum_n^{0, 2, 4, \dots} \frac{1}{\alpha_n^3} K_n(y, t) \quad (2.2)$$

$$F(0, y) = \sum_n^{0, 2, 4, \dots} \frac{F_n(y)}{\alpha_n^3}, \quad F_n(y) = - \frac{1}{2} \left[f_n(y) \int_0^{b/2} q_n(t) K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) dt + \right.$$

$$\left. + \psi_n(y) \int_0^{b/2} q_n(t) K_n' \left(\frac{b}{2}, t \right) dt - \int_0^y q_n(t) K_n(y, t) dt \right] \quad (2.3)$$

Прогиб в любой точке определяется по формуле (1.11), которая в этом случае принимает вид

$$w(x, y) = \frac{2}{a} \left\{ - \sum_n^{0, 2, 4, \dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \int_0^{b/2} f(t) \left[f_n(y) K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \psi_n(y) K_n' \left(\frac{b}{2}, t \right) \right] dt + \sum_n^{0, 2, 4, \dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \int_0^y f(t) K_n(y, t) dt \right\} + F(x, y) \quad (2.4)$$

Выпишем выражение для прогиба в центре пластины

$$w_0 = w \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \frac{2}{a} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_{2n}^3} \left[\frac{\text{sh } n\xi + n\xi \text{ ch } n\xi}{\text{ch } n\xi \text{ sh } n\xi + n\xi} \int_0^{b/2} f(t) K_{2n} \left(\frac{b}{2}, t \right) dt - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{b}{2} \frac{\text{sh } n\xi}{\text{ch } n\xi \text{ sh } n\xi + n\xi} \int_0^{b/2} f(t) K_{2n}' \left(\frac{b}{2}, t \right) dt \right] \right\} + F \left(\frac{a}{2}, 0 \right) \quad (\xi = \pi \frac{b}{a}) \quad (2.5)$$

$$F \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(0)}{\alpha_{2n}^3} (-1)^n \quad (2.6)$$

$$F_n(0) = - \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sh } n\xi + n\xi \text{ ch } n\xi}{\text{ch } n\xi \text{ sh } n\xi + n\xi} \int_0^{b/2} q_{2n}(t) K_{2n} \left(\frac{b}{2}, t \right) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{b}{2} \frac{\text{sh } n\xi}{\text{ch } n\xi \text{ sh } n\xi + n\xi} \int_0^{b/2} q_{2n}(t) K_{2n}' \left(\frac{b}{2}, t \right) dt \right]$$

Переходим к приближенному решению задачи.

Для нахождения первого приближения закрепим точку $x = 0, y = 0$ (по симметрии закрепится также точка $x = a, y = 0$). Обозначим через $f(0)$ сосредоточенную силу в точке $x = 0, y = 0$ и положим в интегральном уравнении (2.1) $y = 0$. Получаем

$$f(0) = - \frac{a}{2} \frac{F(0,0)}{K(0,0)} \quad (2.7)$$

В формуле (2.7)

$$K(0,0) = \left(\frac{b}{2}\right)^3 \left[\frac{1}{12} + S_1 \right], \quad F(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(0)}{\alpha_{2n}^3} \quad (2.8)$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_1(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_1(n\xi) = \frac{\operatorname{sh}^2 n\xi - (n\xi)^2}{(n\xi)^3}, \quad \Delta(n\xi) = \operatorname{ch} n\xi \operatorname{sh} n\xi + n\xi$$

Из (2.4) получим выражение для прогиба в любом месте пластины:

$$w(x, y) = F(x, y) + \frac{F(0,0)}{K(0,0)} \left\{ \sum_n^{0,2,4,\dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \left[f_n(y) K_n\left(\frac{b}{2}, 0\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \psi_n(y) K_n'\left(\frac{b}{2}, 0\right) + K_n(y, 0) \right] \right\} \quad (2.9)$$

Из (2.5) получим формулу для прогиба в центре пластины:

$$w_0 = F\left(\frac{a}{2}, 0\right) - \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} F(0,0) \quad (2.10)$$

где

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_2(n\xi) = (-1)^n \omega_1(n\xi) \quad (2.11)$$

Ряды S_i достаточно хорошо сходятся. Если выделить из них ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.202, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \approx \frac{3}{4} \times 1.202$$

то в оставшихся рядах можно ограничиться одним членом, если вести расчеты с точностью до единицы четвертого десятичного знака.

Для получения второго приближения закрепим точки $x=0$, $y=0$ и $x=0$, $y=b/4$ (по симметрии закрепятся еще четыре точки, см. фиг. 3). Обозначим через $f(0)$ и $f(b/4)$ соответствующие сосредоточенные силы и в (2.1) положим $y=0$ и $y=b/4$ соответственно. Для неизвестных сил $f(0)$ и $f(b/4)$ получаем систему уравнений:

$$K(0,0) f(0) + K\left(0, \frac{b}{4}\right) f\left(\frac{b}{4}\right) = -\frac{a}{2} F(0,0)$$

$$\left[K\left(\frac{b}{4}, 0\right) + M\left(\frac{b}{4}, 0\right) \right] f(0) + K\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\right) f\left(\frac{b}{4}\right) = -\frac{a}{2} F\left(0, \frac{b}{4}\right)$$

или, если ввести обозначения

$$C_0 = -\frac{2}{a} \left(\frac{b}{2}\right)^3 \frac{f(0)}{F(0,0)}, \quad C_{b/4} = -\frac{2}{a} \left(\frac{b}{2}\right)^3 \frac{f(b/4)}{F(0,0)} \quad (2.12)$$

такую систему:

$$\left(S_1 + \frac{1}{12}\right) C_0 + \left(S_3 + \frac{1}{24}\right) C_{b/4} = 1 \quad (2.13)$$

$$\left(S_3 + \frac{1}{24}\right) C_0 + \left(S_4 + \frac{5}{192}\right) C_{b/4} = \frac{F(0, b/4)}{F(0,0)}$$

Здесь

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_3(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_3(n\xi) = \frac{\text{sh } n\xi - n\xi}{(n\xi)^3} \left(\text{sh } \frac{n\xi}{2} + \frac{n\xi}{2} \text{ch } \frac{n\xi}{2} \right)$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_4(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_4(n\xi) = \frac{4\text{sh}^2 n\xi - (n\xi)^2 (3 + \text{ch } n\xi)}{(n\xi)^3}$$

Сходимость этих рядов, так же как и многих других, встречающихся ниже, может быть улучшена приемами, указанными выше.

Для прогиба в центре найдем значение

$$w_0 = F\left(\frac{a}{2}, 0\right) - F(0,0) \left[\left(S_2 + \frac{1}{12}\right) C_0 + \left(S_5 + \frac{1}{24}\right) C_{b/4} \right] \quad (2.14)$$

$$S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_5(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_5(n\xi) = (-1)^n \omega_3(n\xi)$$

Из вышеизложенного ясно видно, что значительная часть вычислительной работы — табулирование хорошо сходящихся рядов S_i для различных отношений b/a — может быть проведена независимо от типа внешней нагрузки. В данной в конце работы табл. 9 приведены для некоторых значений b/a значения сумм рядов типа S_i , потребных для вычисления прогиба в центре, а также и других элементов изгиба. Что касается выкладок, связанных с конкретным типом внешней нагрузки, то они сводятся к суммированию рядов вида $\sum F_n(y)/\alpha_n^3$ и им подобных, причем коэффициенты $F_n(y)$ связаны с внешней нагрузкой $q(x, y)$ посредством интегралов типа

$$\int_0^y q_n(t) K_n(y, t) dt, \quad \left(q_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \cos \alpha_n x dx \right) \quad (2.15)$$

Получающиеся для рассмотренных нами конкретных типов внешней нагрузки ряды также хорошо суммируются, и их значения приведены в табл. 10 на стр. 434.

2. *Распомерная нагрузка.* Так как в этом случае

$$q(x, y) = q = \text{const}, \quad q_m(y) \equiv 0 \quad (m \geq 1), \quad q_0 = 2q$$

то

$$F(x, y) = -q \left[f_0(y) \int_0^{b/2} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{K_n(b/2, t)}{\alpha_n^3} dt + \right. \\ \left. + \psi_0(y) \int_0^{b/2} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{K'_n(b/2, t)}{\alpha_n^3} dt - \int_0^y \lim_{n \rightarrow 0} \frac{K_n(y, t)}{\alpha_n^3} dt \right]$$

С учетом равенств

$$f_0(y) = 1, \quad \psi_0(y) = \frac{1}{b} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{K_n(y, t)}{\alpha_n^3} = \frac{(y-t)^3}{6},$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{K'_n(y, t)}{\alpha_n^3} = \frac{(y-t)^2}{2}$$

найдем окончательно

$$F(x, y) \equiv F(y) = \frac{q}{24} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \quad (2.16)$$

Если вспомнить, что прогиб пластины $u(x, y)$ связан с функцией $w(x, y)$ соотношением

$$u(x, y) = \frac{w(x, y)}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

то для прогиба в центре пластины получим формулу

$$u_0 = \kappa \frac{qb^4}{Eh^3} \quad (2.17)$$

В первом приближении

$$\kappa = \kappa_1 = \frac{1-\nu^2}{32} \left(1 - \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \right) \quad (2.18)$$

Во втором приближении

$$\kappa = \kappa_2 = \frac{1-\nu^2}{32} \left[1 - C_0 \left(S_2 + \frac{1}{12} \right) - C_{b/4} \left(S_5 + \frac{1}{24} \right) \right] \quad (2.19)$$

причем C_0 и $C_{b/4}$ определяются системой:

$$\left(S_1 + \frac{1}{12} \right) C_0 + \left(S_3 + \frac{1}{24} \right) C_{b/4} = 1 \quad (2.20)$$

$$\left(S_3 + \frac{1}{24} \right) C_0 + \left(S_4 + \frac{5}{192} \right) C_{b/4} = \frac{F(b/4)}{F(0)} = \frac{9}{16}$$

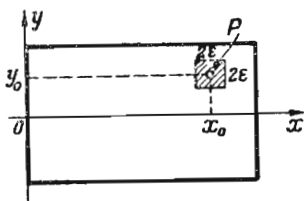
Для $b/a = 1$

$$C_0 = 5.41, \quad C_{b/4} = 6.60$$

В табл. 1 приведены значения коэффициентов κ_1 и κ_2 для некоторых отношений b/a при $\nu = 0.3$ и для сравнения соответствующие значения κ' , взятые из книги [1].

Сравнение показывает, что второе приближение κ_2 нужно брать только для квадратной пластины, а для удлиненных пластины достаточно первого приближения, если вести вычисления с точностью до четвертого десятичного знака.

Таблица 1



Фиг. 4

	$\frac{b}{a}$	κ_1	κ_2	κ'
Равномерная нагрузка	1	0.0147	0.0138	0.0138
	0.5	0.0276	—	0.0276
Сосред. сила в центре	1	0.0612	0.0600	0.0611
	0.5	0.0789	—	0.0788

3. *Сосредоточенная сила.* Если в точке (x_0, y_0) (при этом не нарушая общности, можно считать $y_0 > 0$) к пластине приложена сосредоточенная сила P , то, распределяя ее по квадрату со стороной 2ε (фиг. 4), получим

$$q(x, y) = \begin{cases} \frac{P}{4\varepsilon^2} & \text{при } \begin{cases} x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \\ y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon \end{cases} \\ 0 & \text{при прочих } x \text{ и } y \end{cases} \quad (2.21)$$

Отсюда при $\epsilon \rightarrow 0$

$$q_n(y) = \frac{P}{2a\epsilon^2} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \cos \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{P}{a\epsilon} \cos \frac{n\pi x_0}{a} \quad \text{при } y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon \quad (2.22)$$

$$(q_n(y) \equiv 0 \quad \text{при прочих } y)$$

Для полного решения задачи нужно знать функцию

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(y)}{\alpha_n^3} \cos \alpha_n x$$

Коэффициенты $F_n(y)$ содержат интегралы вида (2.15) и интегралы, получаемые из них дифференцированием по y . В данном случае

$$\int_0^y q_n(t) K_n(y, t) dt = \frac{P}{a\epsilon} \cos \frac{n\pi x_0}{a} \int_{y_0-\epsilon}^{y_0+\epsilon} K_n(y, t) dt = \frac{2P}{a} \cos \frac{n\pi x_0}{a} K_n(y, y_0)$$

При $y_0 = 0$ результат следует умножить на $1/2$; при $y \leq y_0$ такие интегралы равны нулю. Таким образом,

$$\int_0^y q_n(t) K_n(y, t) dt = \begin{cases} \frac{2P}{a} \cos \frac{n\pi x_0}{a} K_n(y, y_0) & \text{при } y \geq y_0 \\ 0 & \text{при } y \leq y_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\int_0^y q_n(t) K'_n(y, t) dt = \begin{cases} \frac{2P}{a} \cos \frac{n\pi x_0}{a} K'_n(y, y_0) & \text{при } y \geq y_0 \\ 0 & \text{при } y \leq y_0 \end{cases}$$

Отсюда по формуле (1.14) получаем

$$F_n(y) = -\frac{P}{2a} \cos \frac{n\pi x_0}{a} \left\{ [f_n(y) + g_n(y)] K_n\left(\frac{b}{2}, y_0\right) + [\varphi_n(y) + \psi_n(y)] K'_n\left(\frac{b}{2}, y_0\right) \right\} \quad (y \leq y_0) \quad (2.24)$$

При $y \geq y_0$ следует добавлять еще член

$$\frac{P}{a} \cos \frac{n\pi x_0}{a} K_n(y, y_0)$$

Решение задачи для случая сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке пластины, дает функцию Грина задачи.

Переходя к случаю сосредоточенной силы P , приложенной в центре пластины ($x_0 = a/2, y_0 = 0$), находим

$$F(x, y) = -\frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi/2}{\alpha_n^3} \left[f_n(y) K_n\left(\frac{b}{2}, 0\right) + \psi_n(y) K'_n\left(\frac{b}{2}, 0\right) - K_n(y, 0) \right] \cos \alpha_n x \quad (2.25)$$

Чтобы определить прогиб в центре пластины (под силой), вычисляем

$$F(0, 0) = -\frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_{2n}^3} \left[f_{2n}(0) K_{2n}\left(\frac{b}{2}, 0\right) + \psi_{2n}(0) K'_{2n}\left(\frac{b}{2}, 0\right) \right]$$

$$F\left(\frac{a}{2}, 0\right) = -\frac{P}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{2n}^3} \left[f_{2n}(0) K_{2n}\left(\frac{b}{2}, 0\right) + \psi_{2n}(0) K'_{2n}\left(\frac{b}{2}, 0\right) \right]$$

В результате соответственно получим

$$F(0, 0) = \frac{Pb^3}{16a} \left(S_2 + \frac{1}{12} \right), \quad F\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{Pb^2}{16a} \left(S_1 + \frac{1}{12} \right)$$

Формулы (2.10) и (2.15) дают

$$u_0 = \kappa \frac{Pb^2}{Eh^3} \quad (2.26)$$

В первом приближении

$$\kappa = \kappa_1 = \frac{3b}{4a} (1 - \nu^2) \frac{(S_1 + 1/12)^2 - (S_2 + 1/12)^2}{S_1 + 1/12} \quad (2.27)$$

Во втором приближении

$$\begin{aligned} \kappa = \kappa_2 = \frac{3b}{4a} (1 - \nu^2) & \left[\left(S_1 + \frac{1}{12} \right) - C_0 \left(S_2 + \frac{1}{12} \right)^2 - \right. \\ & \left. - C_{b/4} \left(S_2 + \frac{1}{12} \right) \left(S_3 + \frac{1}{24} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

При этом C_0 и $C_{b/4}$ даются системой

$$\left(S_1 + \frac{1}{12} \right) C_0 + \left(S_3 + \frac{1}{24} \right) C_{b/4} = 1 \quad (2.29)$$

$$\left(S_3 + \frac{1}{24} \right) C_0 + \left(S_4 + \frac{5}{192} \right) C_{b/4} = \frac{F(0, b/4)}{F(0, 0)} = \frac{S_6 + 1/12}{S_2 + 1/24}$$

где

$$S_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_6(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_6(n\xi) = \cos \frac{n\pi}{2} \omega_3(n\xi) \quad (2.30)$$

При $b/a = 1$

$$C_0 = 0.7010, \quad C_{b/4} = 16.73$$

В табл. 1 приведены значения κ_1 и κ_2 , при $\nu = 0.3$ и сравнены с соответствующими значениями κ' , подсчитанными по методу С. П. Тимошенко^[4]. Сравнение показывает, что в случае сосредоточенной силы даже для квадратной пластины достаточно брать первое приближение.

Кроме равномерной нагрузки и сосредоточенной силы в центре пластины, в работе Пикетта^[5] произведены еще расчеты для нагрузки, равномерно распределенной по площади прямоугольника¹; для других же случаев внешней нагрузки ввиду громоздкости выкладок расчеты, повидимому, не производились. Как уже указывалось, при применении данного метода сложность вычислений мало зависит от характера внешней нагрузки. В дальнейшем нами производятся расчеты прогиба в центре пластины в первом приближении для случаев внешней нагрузки, симметричной по обоим направлениям и не зависящей от одной из координат.

¹ Числовые результаты работы [5] не заслуживают доверия. Так, например, для прогиба под сосредоточенной силой, приложенной в центре квадратной пластины, автор дает значение $0,01869 Pa^2/4D$, т. е. $\kappa = 0,0561$ вместо $0,0600$. Еще большее расхождение получается для изгибающего момента (см. сноску на стр. 429).

4. Нагрузка, не зависящая от координаты y . Так как в этом случае $q(x, y) \equiv q(x)$, причем по симметрии $q(a/2 + d) = q(a/2 - d)$, то

$$q_m(y) \equiv q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \cos \alpha_m x dx \quad (q_{2k+1} \equiv 0)$$

и для основной функции $F(x, y)$ имеем согласно (1.13) и (1.14)

$$F(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2n} \cos \alpha_{2n} x}{\alpha_{2n}^3} A_{2n}(y) \quad (2.31)$$

$$A_n(y) = f_n(y) \int_0^{b/2} K_n\left(\frac{b}{2}, t\right) dt + \psi_n(y) \int_0^{b/2} K'_n\left(\frac{b}{2}, t\right) dt - \int_0^y K_n(y, t) dt$$

Значения $F(a/2, 0)$ и $F(0, 0)$, требующиеся для вычисления прогиба в центре пластины в первом приближении согласно (2.10), будут

$$F\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^4 \left[\frac{q_0}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q_{2n}}{(n\xi)^4} \frac{(\operatorname{sh} n\xi - n\xi)(\operatorname{ch} n\xi - 1)}{\Delta(n\xi)} \right]$$

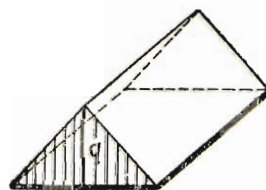
$$F(0, 0) = \left(\frac{b}{2}\right)^4 \left[\frac{q_0}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{2n}}{(n\xi)^4} \frac{(\operatorname{sh} n\xi - n\xi)(\operatorname{ch} n\xi - 1)}{\Delta(n\xi)} \right] \quad (2.32)$$

Приводим расчеты для следующих трех частных видов нагрузки.

а) Нагрузка в виде трехгранной призмы

(фиг. 5). В этом случае

$$\frac{q(x)}{q} = \begin{cases} \frac{2x}{a} & (0 \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ \frac{2(a-x)}{a} & (\frac{a}{2} \leq x \leq a) \end{cases}$$

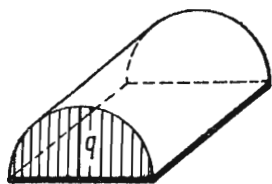


Фиг. 5

$$\frac{q_{2n}}{q} = \frac{2}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \quad (n \geq 1), \quad \frac{q_0}{q} = 1$$

Для коэффициента κ , входящего в (2.17), имеем формулу

$$\kappa = 3(1 - \nu^2) \left\{ \left[\frac{1}{192} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_7 \right] - \left[\frac{1}{192} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \right\} \quad (2.33)$$



Фиг. 6

$$S_7 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_7 [(2k-1)\xi]}{\Delta [(2k-1)\xi]}$$

$$\omega_7(n\xi) = \frac{(\operatorname{sh} n\xi - n\xi)(\operatorname{ch} n\xi - 1)}{(n\xi)^3}$$

б) Нагрузка, распределенная по параболическому закону (фиг. 6). Так как

$$\frac{q(x)}{q} = \frac{4}{a^2} x(a-x), \quad \frac{q_{2n}}{q} = -\frac{4}{(n\pi)^2} \quad (n \geq 1), \quad \frac{q_0}{q} = \frac{4}{3}$$

то

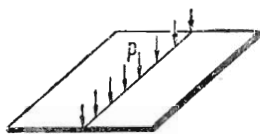
$$\kappa = 3(1 - \nu^2) \left\{ \left[\frac{1}{144} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_8 \right] - \left[\frac{1}{144} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_9 \right] \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \right\} \quad (2.34)$$

В формуле (2.34)

$$S_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_8(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_8(n\xi) = (-1)^n \omega_7(n\xi), \quad S_9 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_7(n\xi)}{\Delta(n\xi)}$$

в) Нагрузка, равномерно распределенная по прямой линии (Фиг. 7).

Полагая



$$q(x) = \begin{cases} \frac{p}{\varepsilon} & \left(\frac{a}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{a}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ 0 & \text{(для прочих } x) \end{cases}$$

и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\frac{q_{2n}}{p/a} = 2(-1)^n \quad (n \geq 1), \quad \frac{q_0}{p/a} = 2$$

Определяя прогиб в центре формулой $u_0 = \kappa b^3 / Eh^3$, для κ имеем

$$\kappa = \frac{3b}{2a} (1 - \nu^2) \left[\left(S_{10} + \frac{1}{48} \right) + \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \left(S_{11} + \frac{1}{48} \right) \right] \quad (2.35)$$

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{10}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad S_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{11}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}$$

$$\omega_{10}(n\xi) = (n\xi)^2 \omega_7(n\xi), \quad \omega_{11}(n\xi) = (n\xi)^2 \omega_8(n\xi)$$

Результаты вычислений для всех трех случаев приведены в табл. 2 (цифры без скобок).

5. Нагрузка, не зависящая от координаты x . В этом случае $q(x, y) \equiv q(y)$, причем по симметрии $q(-y) = q(y)$. Следовательно,

$$q_m(y) \equiv 0 \quad (m \geq 1), \quad q_0(y) = 2q(y)$$

так что функция $F(x, y)$ дается в явном виде:

$$F(x, y) \equiv F(y) = \frac{1}{6} \int_0^y q(t) (y-t)^3 dt + \frac{1}{6} \int_0^{b/2} q(t) \left(t - \frac{b}{2} \right)^3 dt - \frac{1}{2b} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \int_0^{b/2} q(t) \left(t - \frac{b}{2} \right)^2 dt \quad (2.36)$$

Для прогиба в центре надо знать величины (2.37)

$$F\left(\frac{a}{2}, 0\right) \equiv F(0, 0) = F(0) = \frac{1}{6} \int_0^{b/2} q(t) \left(t - \frac{b}{2} \right)^3 dt + \frac{b}{8} \int_0^{b/2} q(t) \left(t - \frac{b}{2} \right)^2 dt$$

Вычисления для таких случаев нагрузки не требуют суммирования новых рядов. Приводим в качестве контроля вычисления для квадратной пластины для тех же типов нагрузки, что и в п. 4:

в случае (а) (2.38)

$$\frac{q(y)}{q} = 1 - \frac{2y}{b}, \quad \frac{1}{qb^4} F(0) = \frac{7}{3840}, \quad \kappa = \frac{7}{320} (1 - \nu^2) \left[1 - \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \right]$$

Таблица 2

	b/a	κ
а	1	0.0101 (0.0103)
	0.5	0.0226
б	1	0.0126 (0.0127)
	0.5	0.0250
в	1	0.0288 (0.0293)
	0.5	0.0375

в случае (б) (2.39)

$$\frac{q(y)}{q} = \frac{4}{b^2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right), \quad \frac{1}{qb^4} F(0) = \frac{13}{5760}, \quad \kappa = \frac{13}{480} (1 - \nu^2) \left[1 - \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \right]$$

в случае (в) (2.40)

$$q(y) = \begin{cases} p/2\varepsilon & (0 < y < \varepsilon) \\ 0 & \text{при прочих } y \end{cases} \quad \frac{1}{pb^3} F(0) = \frac{1}{192}, \quad \kappa = \frac{1}{16} (1 - \nu^2) \left[1 - \frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \right]$$

Численные результаты, приведенные в табл. 2 в скобках, с большой степенью точности совпадают с результатами п. 4.

§ 3. Изгибающие моменты и перерезывающие силы. Рассмотрим те же случаи внешних нагрузок, что и в § 2.

Изгибающие моменты, действующие по площадкам, нормальным к осям x и y соответственно, даются известными формулами:

$$-M_y = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad -M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Для случая симметричной нагрузки находим из (2.4)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2}{a} \left\{ \sum_n^{0,2,4,\dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n} \int_0^{b/2} f(t) \left[f_n(y) K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) + \psi_n(y) K_n' \left(\frac{b}{2}, t \right) \right] dt - \right. \\ \left. - \sum_n^{0,2,4,\dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n} \int_0^y f(t) K_n(y, t) dt \right\} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{2}{a} \left\{ \sum_n^{0,2,4,\dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \int_0^{b/2} f(t) \left[f_n''(y) K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \psi_n'(y) K_n'' \left(\frac{b}{2}, t \right) \right] dt - \sum_n^{0,2,4,\dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \int_0^y f(t) \frac{dK_n'(y, t)}{dy} dt \right\} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

$$f_n''(y) = \alpha_n^2 \frac{\beta_n \operatorname{ch} \beta_n \operatorname{ch} \alpha_n y - \operatorname{sh} \beta_n (\operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y)}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n + \beta_n} \quad (3.3)$$

$$\psi_n''(y) = \alpha_n \frac{(2 \operatorname{ch} \beta_n - \beta_n \operatorname{sh} \beta_n) \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n + \beta_n}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(y)}{\alpha_n} \cos \alpha_n x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n''(y)}{\alpha_n^3} \cos \alpha_n x \quad (3.4)$$

$$F_n''(y) = -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{b/2} q_n(t) \left[f_n''(y) K_n \left(\frac{b}{2}, t \right) + \psi_n''(y) K_n' \left(\frac{b}{2}, t \right) \right] dt - \right. \\ \left. - \int_0^y q_n(t) \frac{dK_n'(y, t)}{dy} dt \right\}$$

причем коэффициенты $F_n(y)$ даются формулой (2.3)

Приводим приближенные формулы для $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$ в центре пластины. В первом приближении

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a/2, y=0} = \frac{F(0,0)}{(b/2)^2} S_{12} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{F(0,0)}{(b/2)^2} S_{13} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0$$

$$S_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{12}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{12}(n\xi) = (n\xi)^2 \omega_2(n\xi) \quad (3.6)$$

$$S_{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{13}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{13}(n\xi) = \frac{(-1)^n}{n\xi} [\operatorname{sh}^2 n\xi + (n\xi)^2]$$

Сходимость рядов S_{12} и S_{13} заметно **улучшается**, если из них вычесть ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

Во втором приближении

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{F(0,0)}{(b/2)^2} (C_0 S_{12} + C_{b/4} S_{14}) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{F(0,0)}{(b/2)^2} \left[C_0 \left(S_{13} + \frac{1}{2} \right) + C_{b/4} \left(S_{15} + \frac{1}{8} \right) \right] + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0$$

$$S_{14} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{14}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{14}(n\xi) = (n\xi)^2 \omega_3(n\xi) \quad (3.8)$$

$$S_{15} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{15}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{15}(n\xi) = \frac{(-1)^n}{n\xi} \left[\frac{n\xi}{2} \operatorname{ch} \frac{n\xi}{2} (n\xi - \operatorname{sh} n\xi) + \operatorname{sh} n\xi \operatorname{sh} \frac{n\xi}{2} \right]$$

Для момента M_x посредине стороны $y = b/2$ имеем

$$-M_x^* = -(M_x)_{x=a/2, y=b/2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a/2, y=b/2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^* \quad (3.9)$$

В первом приближении

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^* = -2 \frac{F(0,0)}{(b/2)^2} \frac{S_{16} + 1/4}{S_1 + 1/12} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^* \quad (3.10)$$

$$S_{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{16}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{16}(n\xi) = (-1)^n \operatorname{sh} n\xi \quad (3.11)$$

Во втором приближении

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^* = -\frac{F(0,0)}{(b/2)^2} \left[2 \left(S_{16} + \frac{1}{4} \right) C_0 + \left(S_{17} + \frac{3}{8} \right) C_{b/4} \right] + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^* \quad (3.12)$$

$$S_{17} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{17}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{17}(n\xi) = (-1)^n \operatorname{sh} \frac{n\xi}{2} (\operatorname{ch} n\xi + 2) \quad (3.13)$$

Переходим к частным типам внешней нагрузки.

Для равномерной нагрузки

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 = -\frac{qb^2}{24}, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^* = \frac{qb^2}{12} \quad (3.14)$$

и окончательные формулы принимают вид

$$M_y^0 = \kappa_y qb^2, \quad M_x^0 = \kappa_x qb^2, \quad M_x^* = \kappa^* qb^2 \quad (3.15)$$

В первом приближении

$$\begin{aligned} \kappa_{y1} &= -\frac{1}{96(S_1 + 1/12)} \left[S_{12} + \nu \left(S_{13} + \frac{1}{2} \right) - 4\nu \left(S_1 + \frac{1}{12} \right) \right] \\ \kappa_{x1} &= -\frac{1}{96(S_1 + 1/12)} \left[S_{13} + \frac{1}{2} - 4 \left(S_1 + \frac{1}{12} \right) + \nu S_{12} \right] \\ \kappa_1^* &= \frac{1}{12} \left[\frac{1}{4} \frac{S_{16} + 1/4}{S_1 + 1/12} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Во втором приближении

$$\begin{aligned} \kappa_{y2} &= -\frac{1}{96} \left\{ C_0 S_{12} + C_{b/4} S_{14} - 4\nu + \nu \left[C_0 \left(S_{13} + \frac{1}{2} \right) + C_{b/4} \left(S_{15} + \frac{1}{8} \right) \right] \right\} \\ \kappa_{x2} &= -\frac{1}{96} \left\{ C_0 \left(S_{13} + \frac{1}{2} \right) + C_{b/4} \left(S_{15} + \frac{1}{8} \right) - 4 + \nu (C_0 S_{12} + C_{b/4} S_{14}) \right\} \\ \kappa_2^* &= -\frac{1}{96} \left[8 - 2C_0 \left(S_{16} + \frac{1}{4} \right) - C_{b/4} \left(S_{17} + \frac{3}{8} \right) \right] \end{aligned}$$

В случае сосредоточенной силы в центре пластины

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^* &= \frac{Pb}{2a} \left(S_{18} + \frac{1}{4} \right), & S_{18} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{18}(n\xi)}{\Delta(n\xi)} \\ \omega_{18}(n\xi) &= (-1)^n \omega_{18}(n\xi), & M_x^* &= \kappa^* P \end{aligned} \quad (3.18)$$

В первом приближении

$$\kappa_1^* = \frac{b}{2a} \left[\frac{(S_{16} + 1/4)(S_2 + 1/12)}{S_1 + 1/12} - \left(S_{18} + \frac{1}{4} \right) \right] \quad (3.19)$$

Во втором приближении

$$\kappa_2^* = \frac{b}{2a} \left\{ -\left(S_{18} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(S_2 + \frac{1}{12} \right) \left[2 \left(S_{16} + \frac{1}{4} \right) C_0 + \left(S_{17} + \frac{3}{8} \right) C_{b/4} \right] \right\} \quad (3.20)$$

Под силой изгибающие моменты стремятся к бесконечности.

Таблица 3

	b/a	κ_{y1}	κ_{y2}	κ_y'	κ_{x1}	κ_{x2}	κ_x'	$-\kappa_1^*$	$-\kappa_2^*$	$-\kappa^*$
Равномерная нагрузка	1	0.0221	0.0228	0.0229	0.0234	0.0230	0.0229	0.0529	0.0516	0.0517
	0.5	0.0100	—	—	0.0401	—	0.0399	0.0829	—	0.0829
Сосредоточенная сила в центре	1	—	—	—	—	—	—	0.1271	0.1210	0.1257
	0.5	—	—	—	—	—	—	0.1675	—	0.1674

В табл. 3 приведены значения $\kappa_x, \kappa_y, \kappa^*$ и сравнены с соответствующими значениями $\kappa_x', \kappa_y', \kappa^{*'}$, взятыми из книги [1] для случая равномерной нагрузки и из статьи [4] для случая сосредоточенной силы¹.

¹ Пикетт [5] дает неверное значение момента посредине стороны квадратной пластины для сосредоточенной силы в центре: $\kappa^* = -0.1495$ вместо -0.1210 .

Легко выводятся следующие формулы, справедливые для нагрузок, не зависящих от координаты y :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 &= -\left(\frac{b}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q_{2n}}{(n\xi)^2} \frac{(\operatorname{sh} n\xi - n\xi)(\operatorname{ch} n\xi - 1)}{\Delta(n\xi)} \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q_{2n}}{(n\xi)^2} \frac{(\operatorname{sh} n\xi - n\xi \operatorname{ch} n\xi - \frac{q_0}{12})}{\Delta(n\xi)} - \frac{q_0}{12} \right] \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^* &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q_{2n}}{(n\xi)^2} \frac{\operatorname{ch} n\xi \operatorname{sh} n\xi - n\xi}{\Delta(n\xi)} + \frac{q_0}{6} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Полагая для случаев (а) и (б) § 2

$$M_y^0 = \chi_y q b^2, \quad M_x^0 = \chi_x q b^2, \quad M_x^* = \chi^* q b^2$$

получим

$$\begin{aligned} -\chi_y &= \frac{1}{q b^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)_0 + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_0 \right] & -\chi^* &= \frac{1}{q b^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)^* \\ -\chi_x &= \frac{1}{q b^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_0 + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)_0 \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

В случае (а)

$$\begin{aligned} \frac{4}{q b^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{S_{12}}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{48} - 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_7 \right] - 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_{19}, \quad S_{19} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{10}[(2k-1)\xi]}{\Delta[(2k-1)\xi]} \\ \frac{4}{q b^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_0 &= \frac{S_{13} + 1/2}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{48} - 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_7 \right] + \left[4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_{20} - \frac{1}{12} \right] \\ S_{20} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{20}[(2k-1)\xi]}{\Delta[(2k-1)\xi]}, \quad \omega_{20}(n\xi) = \frac{\operatorname{sh} n\xi - n\xi \operatorname{ch} n\xi}{(n\xi)^4} \\ \chi^* &= \frac{2(S_{16} + 1/4)}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{192} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_7 \right] - \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 S_{21} + \frac{1}{24} \right] \\ S_{21} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{21}[(2k-1)\xi]}{\Delta[(2k-1)\xi]}, \quad \omega_{21}(n\xi) = \frac{\operatorname{ch} n\xi \operatorname{sh} n\xi - n\xi}{(n\xi)^4} \end{aligned} \quad (3.23)$$

В случае (б)

$$\begin{aligned} \frac{4}{q b^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{S_{12}}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{36} - 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_9 \right] + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_{11} \\ \frac{4}{q b^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_0 &= \frac{S_{13} + 1/2}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{36} - 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_9 \right] - \left[\frac{1}{9} + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_{22} \right] \\ S_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{22}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{22}(n\xi) = (-1)^n \omega_{20}(n\xi) \\ \chi^* &= \frac{2(S_{16} + 1/4)}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{144} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_9 \right] + \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 S_{23} - \frac{1}{18} \right] \\ S_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{23}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{23}(n\xi) = (-1)^n \omega_{21}(n\xi) \end{aligned} \quad (3.24)$$

В случае (в)

$$M_y^0 = x_y pb, \quad M_x^0 = x_x pb, \quad M_x^* = x^* pb$$

и величины, входящие в (3.22), находятся по формулам

$$\begin{aligned} \frac{4}{pb} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 &= 2 \frac{b}{a} \left[\frac{S_{12}}{S_1 + 1/12} \left(S_{11} + \frac{1}{48} \right) - S_{24} \right] \\ S_{24} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{24}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{24}(n\xi) = (n\xi)^4 \omega_7(n\xi) \\ \frac{4}{pb} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 &= 2 \frac{b}{a} \left[\frac{S_{13} + 1/2}{S_1 + 1/12} \left(S_{11} + \frac{1}{48} \right) + \left(S_{25} + \frac{1}{12} \right) \right] \\ S_{25} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{25}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{25}(n\xi) = (n\xi)^2 \omega_{20}(n\xi) \\ x^* &= \frac{b}{2a} \left\{ \frac{2(S_{11} + 1/4)}{S_1 + 1/12} \left(S_{20} + \frac{1}{48} \right) - \left(S_{26} + \frac{1}{6} \right) \right\} \\ S_{26} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{26}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{26}(n\xi) = (n\xi)^2 \omega_{21}(n\xi) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Результаты вычислений в первом приближении приведены в табл. 4.

В случае, когда нагрузка не зависит от координаты x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &\equiv 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_0 = -\frac{1}{b} \int_0^{b/2} q(t) \left(t - \frac{b}{2} \right)^2 dt \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^* &= \int_0^{b/2} q(t) \left(\frac{b}{2} - t \right) dt - \frac{1}{b} \int_0^{b/2} q(t) \left(t - \frac{b}{2} \right)^2 dt \end{aligned} \tag{3.26}$$

В случае (а)

(3.27)

Таблица 4

$$\begin{aligned} \frac{1}{qb^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 &= \frac{7}{960} \frac{S_{12}}{S_1 + 1/12} \\ \frac{1}{qb^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{7}{960} \frac{S_{13} + 1/2}{S_1 + 1/12} - \frac{1}{32} \\ x_1^* &= \frac{7}{480} \frac{S_{16} + 1/4}{S_1 + 1/12} - \frac{5}{96} \end{aligned}$$

	b/a	x_{y1}	x_{x1}	$-x_1^*$
а	1	0,0178	0,0168	0,0386
	0,5	0,0166	0,0322	0,0656
б	1	0,0208	0,0205	0,0430
	0,5	0,0171	0,0378	0,0765
в	1	0,0874	0,0578	0,1432
	0,5	0,0851	0,0700	0,1638

В случае (б)

(3.28)

$$\begin{aligned} \frac{1}{qb^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= \frac{13}{1440} \frac{S_{12}}{S_1 + 1/12}, \\ \frac{1}{qb^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{13}{1440} \frac{S_{13} + 1/2}{S_1 + 1/12} - \frac{3}{80} \\ x_1^* &= \frac{13}{720} \frac{S_{16} + 1/4}{S_1 + 1/12} - \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Таблица 5

В случае (в)

(3.29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{pb} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= \frac{1}{48} \frac{S_{12}}{S_1 + 1/12} \\ \frac{1}{pb} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{48} \frac{S_{13} + 1/2}{S_1 + 1/12} - \frac{1}{8} \\ x_1^* &= \frac{1}{24} \frac{S_{16} + 1/4}{S_1 + 1/12} - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

	x_{y1}^*	x_{x1}^*	$-x_1^*$
а	0,0161	0,0184	0,0311
б	0,0196	0,0217	0,0406
в	0,0567	0,0885	0,0650

Результаты вычислений в первом приближении для квадратной пластины приведены в табл. 5. Заметим, что при сравнении значений моментов в центре, взятых из табл. 4 и 5 для одних и тех же типов нагрузок, следует менять местами оси координат.

Сравнение таблиц 4 и 5 показывает, какие значения изгибающих моментов следует принять за расчетные.

Перерезывающие силы, действующие по соответствующим площадкам, даются формулами¹

$$-N_{xz} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad -N_{yz} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}. \quad (3.30)$$

Ограничимся вычислением перерезывающей силы N_{yz} посредине стороны $y = b/2$, для чего составим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = & -\frac{2}{a} \left\{ \sum_n^{0, 2, 4, \dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \int_0^{b/2} f(t) \left[f_n'''(y) K_n\left(\frac{b}{2}, t\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \psi_n'''(y) K_n'\left(\frac{b}{2}, t\right) \right] dt - \sum_n^{0, 2, 4, \dots} \frac{\cos \alpha_n x}{\alpha_n^3} \int_0^y f(t) \frac{d^2 X_n'(y, t)}{dy^2} dt \right\} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} f_n'''(y) = & \alpha_n^3 \frac{\beta_n \operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n y - \operatorname{sh} \beta_n (2 \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y)}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n + \beta_n} \\ \psi_n'''(y) = & \alpha_n^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_n (3 \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y) - \beta_n \operatorname{sh} \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n + \beta_n} \end{aligned} \quad (3.32)$$

В первом приближении

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)^* = -\frac{2}{(b/2)^3} \frac{F(0, 0)}{S_1 + 1/12} (S_{27} + 1/12) + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)^* \quad (3.33)$$

$$S_{27} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{27}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{27}(n\xi) = (-1)^n (\operatorname{sh} x\xi + n\xi \operatorname{ch} n\xi) \quad (3.34)$$

В случае равномерной нагрузки

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)^* = \frac{qb}{2} \quad (3.35)$$

Полагая $N_{yz}^* = kqb$, будем иметь

$$k = \frac{1}{2} \left[\frac{S_{27} + 1/2}{12(S_1 + 1/12)} - 1 \right] \quad (3.36)$$

Для сосредоточенной силы в центре пластины

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)^* = \frac{P}{a} \left(S_{28} + \frac{1}{2}\right), \quad S_{28} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{28}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{28}(n\xi) = (-1)^n \omega_{27}(n\xi) \quad (3.37)$$

¹ Так как края пластины закреплены, то реакции опор по величине совпадают с перерезывающими силами.

Полагая $N_{yz}^* = kP/b$, имеем

$$k = \frac{b}{a} \left[\frac{S_2 + 1/12}{S_1 + 1/12} \left(S_{27} + \frac{1}{2} \right) - \left(S_{28} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.38)$$

Таблица 6

Таблица 7

	$\frac{b}{a}$	k	k'
Равномерная нагрузка	1	-0.439	-0.440
	0.5	-0.515	-0.515
Сосред. сила в центре	1	-0.794	-0.794
	0.5	-0.920	-0.919

	$\frac{b}{a}$	k
a	1	-0.355
	0.5	-0.453
б	1	-0.401
	5.0	-0.496

В табл. 6 приведены значения k и для сравнения соответствующие значения k' , взятые из [1, 4].

Если внешняя нагрузка не зависит от координаты y , то

$$\frac{2}{b} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right)^* = \frac{q_0}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q_{2n}}{n\xi} \frac{\text{sh}^2 n\xi}{\Delta(n\xi)} \quad (3.39)$$

Для частных случаев получаем:

в случае (a)

$$k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(S_{27} + 1/2)}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{48} - 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 S_7 \right] - \left[\frac{1}{2} + 8 \left(\frac{b}{a} \right)^2 S_{29} \right] \right\} \quad (3.40)$$

$$S_{29} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{29} [(2k-1)\xi]}{\Delta [(2k-1)\xi]}, \quad \omega_{29}(n\xi) = \frac{\text{sh}^2 n\xi}{(n\xi)^9}$$

в случае (б)

$$k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(S_{27} + 1/2)}{S_1 + 1/12} \left[\frac{1}{36} - 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 S_8 \right] - \left[\frac{2}{3} + 8 \left(\frac{b}{a} \right)^2 S_{30} \right] \right\} \quad (3.41)$$

$$S_{30} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{30}(n\xi)}{\Delta(n\xi)}, \quad \omega_{30}(n\xi) = (-1)^n \omega_{29}(n\xi)$$

В случае (в) перерезывающая сила посредине сторон $y = \pm b/2$ имеет бесконечно большое значение.

Результаты вычислений приведены в табл. 7.

Если нагрузка не зависит от координаты x , то будем иметь

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right)^* = \int_0^{t/2} q(t) dt \quad (3.42)$$

в случае (a)

$$k = \frac{1}{4} \left[\frac{7}{60} \frac{S_{14} + 1/2}{S_1 + 1/12} - 1 \right] \quad (3.43)$$

в случае (б)

$$k = \frac{1}{3} \left[\frac{13}{120} \frac{S_{14} + 1/2}{S_1 + 1/12} - 1 \right] \quad (3.44)$$

Таблица 8

	k
a	-0.207
б	-0.280
в	-0.375

в случае (а)

$$N_{yz}^* = k\rho, \quad k = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \frac{S_{14} + 1/3}{S_1 + 1/12} - 1 \right] \quad (3.45)$$

Результаты вычислений для квадратной пластины сведены в табл. 8. Сравнение табл. 7 и 8 показывает, какие значения перерезывающих сил следует принять за расчетные.

В заключение в табл. 9, 10, для пластин с отношением длин сторон,

Таблица 9

S_i	$\frac{b}{a} = 1$	$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$
S_1	0.0356	0.1474
S_2	-0.0259	-0.0770
S_3	0.0131	—
S_4	0.0142	—
S_5	-0.0117	—
S_{12}	-0.1892	-0.0796
S_{13}	-0.2350	-0.4641
S_{14}	-0.0987	—
S_{15}	0.0037	—
S_{16}	-0.0793	-0.2440
S_{17}	-0.1923	—
S_{27}	-0.3246	-0.5804

Таблица 10

S_i	$\frac{b}{a} = 1$	$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$
S_6	-0.0007	—
S_7	0.0007	0.0101
S_8	-0.0007	-0.0094
S_9	0.0007	0.0108
S_{10}	0.0075	0.0342
S_{11}	-0.0061	-0.0194
S_{18}	0.0855	0.4200
S_{19}	0.00682	0.02684
S_{20}	-0.001863	-0.03682
S_{21}	0.00996	0.09639
S_{22}	0.00185	0.0349
S_{23}	-0.009251	-0.08577
S_{24}	0.1305	0.2813
S_{25}	-0.0189	-0.1125
S_{26}	0.1620	0.4885
S_{28}	0.3790	1.338
S_{29}	0.3302	0.1991
S_{30}	-0.02822	-0.1616

равным 1 и 0,5 приводятся значения суммируемых рядов S_i , которые рассматривались в § 2 (стр 421).

Поступила в редакцию
11 II 1949

Ленинградский физико-технический
институт Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Напкович П. Ф. Строительная механика корабля. Ч. II. Судиромгиз. 1941. Стр. 562—569.
2. Рейман Ю. В. Общий метод расчета тонких плит. Сб. «Пластины и оболочки». Госстройиздат. 1939. Стр. 149—179.
3. Галернин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат. М.—Л. 1933. Стр. 90—98.
4. Dana Young. Clamped Rectangular Plates with a Central Concentrated Load. Journal of Applied Mechanics. 1939. Vol. 6. No. 3. P. 114.
5. Pickett. Solution of Rectangular Clamped Plate with Lateral Load by Generalized Energy Method. Journal of Applied Mechanics. 1939. Vol. 6. No. 4. P. 168.