

СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧКИ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩЕЙСЯ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ

Е. Ф. Бурмистров

(Саратов)

Целью настоящей работы является исследование вопроса о симметричной деформации ортотропной оболочки, мало отличающейся от цилиндрической, под действием нагрузки, распределенной как по боковой поверхности, так и по краям.

В этой работе рассматриваются вопросы, связанные с симметричной деформацией ортотропной оболочки, меридиан которой представляет собой дугу параболы.

Решение находится способом малых параметров, который неоднократно применялся для исследования деформаций стержней и пластинок Д. Ю. Пановым, А. И. Лурье, Г. Ю. Джанелидзе, С. Г. Лехницким и др., и доводится до расчетных формул, учитывающих второе приближение. Как частный случай можно получить решение для изотропной оболочки той же формы.

§ 1. Общие уравнения для оболочки вращения

Рассмотрим деформации, при которых срединная поверхность оболочки остается поверхностью вращения. При такой деформации точки срединной поверхности будут перемещаться одинаково во всех меридиональных плоскостях.

При выводе уравнений равновесия для оболочки, мало отличающейся от цилиндрической, будем исходить из общей теории тонких оболочек Лява [2]. В случае симметричной деформации уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} B \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} (T_2 - T_1) - \frac{AB}{R_1} N_1 + ABX &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (BN_1) + AB \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + ABZ &= 0 \\ B \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} (M_1 - M_2) - ABN_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь A и B — коэффициенты первой квадратичной формы Гаусса, R_1 и R_2 — радиусы кривизны меридиана и параллели, а X и Z — компоненты главного вектора внешних сил, отнесенных к единице площади срединной поверхности оболочки. Упругие усилия и моменты связаны с деформациями срединной поверхности соотношениями [4]

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2), & M_1 &= - \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} (x_1 + \nu_2 x_2) \\ T_2 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_1} (\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1), & M_2 &= - \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} (x_2 + \nu_1 x_1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Формулы (1.2) являются приближенными, но имеют достаточную точность при не слишком больших удлинениях ϵ_1 и ϵ_2 .

Другие формулы, отличающиеся от (1.2) членами, имеющими величину порядка h/R по сравнению с единицей, необходимо признать математически непоследовательными, так как погрешность гипотез Кирхгофа-Лява в теории тонких оболочек имеют величину того же порядка [3, 5]. Здесь ϵ_1 и ϵ_2 — главные удлинения соответственно в направлении касательных к линиям кривизны, κ_1 и κ_2 — параметры изменений кривизны; эти величины связаны с компонентами вектора смещения $\xi(u, v, w)$ соотношениями

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1}, & \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{R_1} \right) \\ \epsilon_2 &= \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{w}{R_2}, & \kappa_2 &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{R_1} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

При симметричной деформации компоненты вектора смещения не зависят от θ и v равно нулю по симметрии.

§ 2. Построение решения

Будем рассматривать упругую тонкую оболочку постоянной толщины h . Сечение этой оболочки плоскостью, проходящей через ось вращения, определяется уравнением

$$r = a + \lambda f(x) \quad (2.1)$$

где λ — малый параметр, кубами и более высокими степенями которого будем пренебрегать.

Используя уравнение (2.1) и сохраняя лишь члены, содержащие λ в первой и второй степенях, получим

$$\begin{aligned} A &= (1 + \lambda^2 f'^2)^{1/2}, & R_1 &= -\frac{(1 + \lambda^2 f'^2)^{3/2}}{\lambda f''(x)} \\ B &= a + \lambda f(x), & R_2 &= (a + \lambda f)(1 + \lambda^2 f'^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.1), имеем

$$\begin{aligned} aT_1' + aX + \lambda(fT_1' + f'T_1 - f'T_2 + af''N_1 + fX) + \\ + \lambda^2 \left(ff''N_1 + \frac{1}{2} af'^2 X \right) &= 0 \\ aN_1' + T_2 + aZ + \lambda(fN_1' + f'N_1 - af''T_1 + fZ) + \\ + \lambda^2 \left(-ff''T_1 + \frac{1}{2} af'^2 Z \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$N_1 = M_1' + \lambda \frac{f'}{a} (M_1 - M_2) - \lambda^2 \left[\frac{1}{2} f'^2 M_1' - \frac{ff'}{a^2} (M_1 - M_2) \right]$$

Формулы (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[u' - \frac{\nu_2}{a} w + \lambda \left(\frac{f' \nu_2}{a} u + f'' w + \frac{f \nu_2}{a^2} w \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda^2 \left(\frac{f'^2 \nu_2}{2a} w - \frac{f^2 \nu_2}{a^3} w - \frac{f f'}{a^2} u - \frac{1}{2} f'^2 u' \right) \right] \\
 T_2 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\nu_1 u' - \frac{w}{a} + \lambda \left(\frac{f'}{a} u + \nu_1 f'' w + \frac{f}{a^2} w \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda^2 \left(\frac{f'^2}{2a} w - \frac{f^2}{a^3} w - \frac{f f'}{a^2} u - \frac{1}{2} f'^2 \nu_1 u' \right) \right] \\
 M_1 &= -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left[w'' + \lambda \left(\frac{f' \nu_2}{a} w' - f''' u - f'' u' \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda^2 \left(f' f'' w' + f'^2 w'' + \frac{f f'}{a^2} \nu_2 w' + \frac{f' f''}{a} \nu_2 u \right) \right] \\
 M_2 &= -\frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left[\nu_1 w'' + \lambda \left(\frac{f'}{a} w' - \nu_1 f''' u - \nu_1 f'' u' \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda^2 \left(\nu_1 f' f'' w' + \nu_1 f'^2 w'' + \frac{f f'}{a^2} w' + \frac{f' f''}{a} u \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Будем искать решения уравнений (2.3), учитывая соотношения (2.4), в виде выражений

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2, & w &= w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 \\
 T_1 &= T_1^0 + \lambda T_1^1 + \lambda^2 T_1^2, & T_2 &= T_2^0 + \lambda T_2^1 + \lambda^2 T_2^2 \\
 M_1 &= M_1^0 + \lambda M_1^1 + \lambda^2 M_1^2, & M_2 &= M_2^0 + \lambda M_2^1 + \lambda^2 M_2^2 \\
 N_1 &= N_1^0 + \lambda N_1^1 + \lambda^2 N_1^2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставляя выражения (2.5) в уравнения (2.3) и соотношения (2.4), находим для свободных от λ членов уравнения вида

$$(T_1^0)' + X = 0, \quad T_2^0 + a(N_1^0)' + aZ = 0 \tag{2.6}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 T_1^0 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(u_0' - \frac{\nu_2 w_0}{a} \right), & T_2^0 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\nu_1 u_0' - \frac{w_0}{a} \right) \\
 M_1^0 &= -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} w_0'', & M_2^0 &= \nu_2 M_1^0 \\
 N_1^0 &= -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} w_0'''
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее, находим

$$\begin{aligned}
 (T_1^1)' + \frac{f'}{a} (T_1^0 - T_2^0) + f'' N_1^0 &= 0 \\
 (N_1^1)' + \frac{T_2^1}{a} - \frac{f}{a^2} T_2^0 - f'' T_1^0 + \frac{f'}{a} N_1^0 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 T_1^1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(u_1' - \frac{\nu_2}{a} \omega_1 + f'' \omega_0 + \frac{\nu_2 f}{a^2} \omega_0 + \frac{\nu_2 f'}{a} u_0 \right) \\
 T_2^1 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\nu_1 u_1' - \frac{\omega_1}{a} + \nu_1 f'' \omega_0 + \frac{f}{a^2} \omega_0 + \frac{f'}{a} u_0 \right) \\
 M_1^1 &= - \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\omega_1'' + \frac{f' \nu_2}{a} \omega_0' - f''' u_0 - f'' u_0' \right) \\
 M_2^1 &= - \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\nu_1 \omega_1'' + \frac{f'}{a} \omega_0' - \nu_1 f''' u_0 - \nu_1 f'' u_0' \right) \\
 N_1^1 &= - \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\omega_1''' + \frac{f'}{a} \omega_0'' + \frac{f' \nu_2}{a} \omega_0' - f'' u_0'' - 2f''' u_0' - f^{IV} u_0 \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Третья группа примет вид

$$\begin{aligned}
 a(T_1^2)' + f'(T_1^1 - T_2^1) - \frac{ff'}{a}(T_1^0 - T_2^0) + af''N_1^1 + \frac{1}{2}af'^2X &= 0 \\
 T_2^2 + a(N_1^2)' + f(N_1^1)' + f'N_1^1 - af''T_1^1 - ff''T_1^0 + \frac{1}{2}fa'^2Z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 T_1^2 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(u_2' - \frac{\nu_2}{a} \omega_2 + \frac{f \nu_2}{a^2} \omega_1 + f'' \omega_1 + \frac{f' \nu_2}{a} u_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}f'^2 u_0' - \frac{\nu_2 ff'}{a^2} u_0 + \frac{1}{2a}f'^2 \nu_2 \omega_0 - \frac{f^2 \nu_2}{a^3} \omega_0 \right) \\
 T_2^2 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\nu_1 u_2' - \frac{\omega_2}{a} + \frac{f}{a^2} \omega_1 + \nu_1 f'' \omega_1 + \frac{f'}{a} u_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}f'^2 \nu_1 u_0' - \frac{ff'}{a^2} u_0 + \frac{1}{2a}f'^2 \omega_0 - \frac{f^2}{a^3} \omega_0 \right) \\
 M_1^2 &= - \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\omega_2'' + \frac{f' \nu_2}{a} \omega_1' - f''' u_1 - f'' u_1' - f'^2 \omega_0'' - \right. \\
 &\quad \left. - f' f'' \omega_0' - \frac{ff'}{a^2} \nu_2 \omega_0' - \frac{f' f''}{a} \nu_2 u_0 \right) \\
 M_2^2 &= - \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\nu_1 \omega_2'' + \frac{f'}{a} \omega_1' - \nu_1 f''' u_1 - \nu_1 f'' u_1' - \right. \\
 &\quad \left. - f'^2 \nu_1 \omega_0'' - \nu_1 f' f'' \omega_0' - \frac{ff'}{a^2} \omega_0' - \frac{f' f''}{a} u_0 \right) \\
 N_1^2 &= - \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \left[\omega_2''' + \frac{f'}{a} \omega_1'' + \frac{f' \nu_2}{a} \omega_1' - f'' u_1'' - \right. \\
 &\quad \left. - 2f''' u_1' - f^{IV} u_1 - \frac{3}{2}f'^2 \omega_0''' - \left(3f' f'' + \frac{ff'}{a^2} \right) \omega_0'' - \right. \\
 &\quad \left. - \left(f''^2 + f' f''' + \frac{ff''}{a^2} \nu_2 + \frac{D_2}{D_1} \frac{f'^2}{a^2} \right) \omega_0' - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{f' f''}{a} u_0' - \left(\frac{f'^2}{a} \nu_2 + \frac{f' f'''}{a} \right) u_0 \right]
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

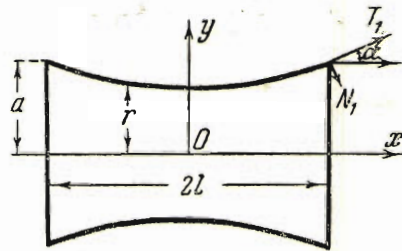
Задача, таким образом, сведена к решению указанных трех групп дифференциальных уравнений при соответствующих условиях на краях оболочки.

§ 3. Осевое растяжение вогнутой оболочки параболического профиля

Рассмотрим упругое равновесие тонкой вогнутой оболочки параболического профиля из ортотропного однородного материала постоянной толщины h , растягиваемой осевыми силами, равномерно распределенными по краям (фиг. 1).

Пусть меридиан этой оболочки задается уравнением

$$r = a \left[1 + \lambda \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right) \right] \quad (3.1)$$



Фиг. 1

Начало отсчета координаты x , направленной по оси вращения, выберем в среднем сечении.

Компоненты главного вектора внешних сил $X = Z = 0$. Предполагая, что края оболочки свободные, имеем граничные условия

$$T_1 = p \cos \alpha, \quad N_1 = p \sin \alpha, \quad M_1 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (3.2)$$

Здесь p — интенсивность равномерно распределенной нагрузки по длине окружности края, α — угол между касательной к меридиану и осью вращения. Так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{dx} = \lambda f'(x)$$

то с точностью до λ^3 можно принять

$$\sin \alpha = \lambda f'(x), \quad \cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 f'^2(x) \quad (3.3)$$

Тогда краевые условия для исходных уравнений примут вид

$$T_1^0 = p, \quad N_1^0 = 0, \quad M_1^0 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (3.4)$$

$$T_1^1 = 0, \quad N_1^1 = p f'(x), \quad M_1^1 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (3.5)$$

$$T_1^2 = -\frac{1}{2} p f'^2(x), \quad N_1^2 = 0, \quad M_1^2 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (3.6)$$

Обращаясь к уравнениям (2.6), соотношениям (2.7) и учитывая условия (3.4), видим, что они представляют собой обычные уравнения симметричной деформации ортотропной цилиндрической оболочки радиуса a .

В этом случае решение сводится к следующему;

$$u_0 = \frac{px}{E_1 h}, \quad w_0 = \frac{pav_1}{E_1 h}$$

$$T_1^0 = p, \quad N_1^0 = T_2^0 = M_1^0 = M_2^0 = 0 \quad (3.7)$$

Решение систем (2.8) и (2.10) удается свести к решению уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$D_1 w_1^{IV} + \frac{E_2 h}{a^2} w_1 = \frac{2p}{al^2} \left(\frac{E_2}{E_1} x^2 - a^2 \right) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} D_1 w_2^{IV} + \frac{E_2 h}{a^2} w_2 = & \frac{2pa}{l^2} - \frac{4paD_1}{l^4 E_1 h} (2 + \nu_2) - \frac{p}{2al^4} \left(4a^2 - 4 \frac{E_2}{E_1} l^2 + 8a^2 \nu_2 \right) x^2 - \\ & - \frac{2pE_2}{3al^4 E_1} x^4 + \frac{6^4 pa D_1}{l^3 L(\gamma)} \left[\frac{1}{l E_1 h} L_1(x) + \frac{\beta}{4 D_1} L_2(x) \right] + \\ & + \frac{128 pa D_1}{l^3 \beta L(\gamma)} x \left[\frac{1}{l E_1 h} L_3(x) + \frac{\beta}{D_1} L_4(x) \right] + \\ & + \frac{6^4 pa D_1}{l^3 \beta^2 L(\gamma)} (x^2 - l^2) \left[\frac{1}{l E_1 h} L_5(x) + \frac{\beta}{D_1} L_6(x) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь

$$L(\gamma) = \text{sh } \gamma + \sin \gamma \quad (3.10)$$

$$L_1(x) = D_l C_x + \frac{1}{4} B_l A_x, \quad L_2(x) = A_l C_x - C_l A_x, \quad L_3(x) = D_l B_x - B_l D_x$$

$$L_4(x) = C_l D_x + \frac{1}{4} A_l B_x, \quad L_5(x) = D_l A_x - B_l C_x, \quad L_6(x) = C_l C_x + \frac{1}{4} A_l A_x$$

где A_l, B_l, C_l, D_l — функции А. Н. Крылова при $x = l$.

Полученные уравнения тождественны с уравнением изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании, под действием нагрузки, представленной правой частью уравнения (3.8) и (3.9).

Общее решение этих уравнений проще всего искать по способу А. Н. Крылова, используя его функции в обозначениях Уманского [8].

$$\begin{aligned} A_x = \text{ch } \frac{x}{\beta} \cos \frac{x}{\beta}, \quad B_x = \frac{1}{2} \left(\text{ch } \frac{x}{\beta} \sin \frac{x}{\beta} + \text{sh } \frac{x}{\beta} \cos \frac{x}{\beta} \right), \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{4\gamma^2 D_1}{E_2 h}} \\ C_x = \frac{1}{2} \text{sh } \frac{x}{\beta} \sin \frac{x}{\beta}, \quad D_x = \frac{1}{4} \left(\text{ch } \frac{x}{\beta} \sin \frac{x}{\beta} - \text{sh } \frac{x}{\beta} \cos \frac{x}{\beta} \right), \quad D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \end{aligned}$$

Введение этих функций упрощает задачу определения произвольных постоянных интегрирования. Эти произвольные постоянные определяются из краевых условий (3.5) и (3.6).

Решение уравнений (3.8) и (3.9) запишутся в форме

$$w_1 = \frac{8pa\beta^2}{lL(\gamma)} \left[\frac{1}{lE_1 h} L_5(x) + \frac{\beta}{D_1} L_6(x) \right] + \frac{2px}{l^2 E_2 h} \left(\frac{E_2}{E_1} x^2 - a^2 \right) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} w_2 = & \frac{4\beta^2}{L(\gamma)} [-\psi_1 L_5(x) - \psi_2 \beta L_6(x)] + \frac{2pa^3}{l^2 E_2 h} + \frac{4pa^3 D_1}{l^4 E_1 E_2 h^2} (2 - \nu_2) - \\ & - \frac{2pa}{l^4 E_2 h} \left(a^2 - \frac{E_2}{E_1} l^2 + 2a^2 \nu_2 \right) x^2 - \frac{2pa}{3l^4 E_1 h} x^4 + \frac{2pa\beta^3}{l^3 L(\gamma)} x \left[-\frac{1}{lE_1 h} L_3(x) - \right. \\ & \left. - \frac{\beta}{D_1} L_4(x) \right] + \frac{2pa\beta^2}{l^3 L(\gamma)} x^2 \left[\frac{1}{lE_1 h} L_5(x) + \frac{\beta}{D_1} L_6(x) \right] + \\ & + \frac{4pa\beta^6}{3l^3 L(\gamma)} (x^3 - 3l^2 x) \left[\frac{1}{lE_1 h} L_7(x) + \frac{\beta}{D_1} L_8(x) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

В формулах (3.11) и (3.12) введены обозначения

$$L_7(x) = B_1 B_x + 4D_1 D_x, \quad L_8(x) = A_1 D_x - C_1 B_x$$

$$\psi_1 = \frac{2pa}{3D_1} + \frac{1pa}{2l^2 E_2 h} \left(9 - 8\nu_2 + \frac{8a^2 E_1}{l^2 E_2} \right) + \frac{2pa\nu_2 \beta^2}{l^3} \left[\frac{\beta}{D_1} \chi_1(\gamma) - \frac{1}{lE_1 h} \chi_2(\gamma) \right] - \\ - \frac{1pa\beta}{2l^2} (1 - 8\nu_2) \left[\frac{1}{lE_1 h} \chi_3(\gamma) - \frac{\beta}{2D_1} \chi_2(\gamma) \right]$$

$$\psi_2 = \frac{pa}{2lD_1} + \frac{pa}{2l^3 E_1 h} (17 - 8\nu_2) - \frac{pa\beta}{3l^3} \left[\frac{1}{lE_1 h} \chi_3(\gamma) - \frac{\beta}{2D_1} \chi_2(\gamma) \right] + \\ + \frac{4pa}{3\beta^2} \left[\frac{\beta}{D_1} \chi_1(\gamma) - \frac{1}{lE_1 h} \chi_2(\gamma) \right]$$

$$\chi_1(\gamma) = \frac{\operatorname{ch} \gamma - \cos \gamma}{\operatorname{sh} \gamma + \sin \gamma}, \quad \chi_2(\gamma) = \frac{\operatorname{sh} \gamma - \sin \gamma}{\operatorname{sh} \gamma + \sin \gamma}, \quad \chi_3(\gamma) = \frac{\operatorname{ch} \gamma - \cos \gamma}{\operatorname{sh} \gamma + \sin \gamma} \quad (3.13)$$

Таким образом, уравнения (2.6), (2.8), (2.10) решены и, учитывая формулы (2.5) и краевые условия (3.2), получим следующие выражения для компонентов перемещений с точностью до λ^3 :

$$u = \frac{px}{E_1 h} + \lambda \left\{ \frac{8p\nu_2 \beta^3}{lL(\gamma)} \left[\frac{1}{lE_1 h} L_3(x) + \frac{\beta}{D_1} L_4(x) \right] - \frac{4pa^2 \nu_1}{l^2 E_1 h} x - \right. \\ - \left. \frac{px}{l^2 E_1 h} \left(\frac{1}{3} x^2 - l^2 \right) \right\} + \lambda^2 \left\{ \frac{px}{E_1 h} + \frac{px^3}{l^3 E_1 h} \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{2}{3} l^2 \right) + \right. \\ + \frac{4pa^4}{l^4 E_2 h} x + \frac{4pa^2 \nu_1 D_1}{l^4 E_1^2 h^2} (2 - \nu_2) x - \frac{4\nu_2 \beta^3}{aL(\gamma)} [\psi_1 L_3(x) + \psi_2 \beta L_4(x)] - \\ - \frac{2pa^2 D_1 \beta}{l^3 E_1 h L(\gamma)} (\nu_1 - 8) \left[\frac{1}{lE_1 h} L_7(x) + \frac{\beta}{D_1} L_8(x) \right] + \\ + \frac{2pa^2 D_1 x}{l^3 E_1 h L(\gamma)} (\nu_1 - 8) x \left[\frac{4}{lE_1 h} L_1(x) + \frac{\beta}{D_1} L_2(x) \right] + \\ + \frac{8pa^2 D_1}{l^3 E_2 h \beta L(\gamma)} (2\nu_2 l^2 - 8a^2 - \nu_2 x^2) \left[\frac{1}{lE_1 h} L_3(x) + \frac{\beta}{D_1} L_4(x) \right] - \\ - \left. \frac{4p\nu_2 \beta^3}{3l^3 L(\gamma)} (x^3 - 3l^2 x) \left[\frac{1}{lE_1 h} L_5(x) + \frac{\beta}{D_1} L_6(x) \right] \right\} \quad (3.14)$$

$$w = \frac{pa\nu_1}{E_1 h} + \lambda \left\{ \frac{8pa\beta^2}{lL(\gamma)} \left[\frac{1}{lE_1 h} L_5(x) + \frac{\beta}{D_1} L_6(x) \right] + \frac{2pa}{l^2 E_2 h} \left(\frac{E_2}{E_1} x^2 - a^2 \right) \right\} + \\ + \lambda^2 \left\{ \frac{2pa^3}{l^2 E_2 h} + \frac{4pa^3 D_1}{l^4 E_1 E_2 h^2} (2 - \nu_2) - \frac{2pa}{l^2 E_2 h} \left(a^2 - \frac{E_2}{E_1} l^2 + 2a^2 \nu_2 \right) x^2 - \right. \\ - \frac{2pa}{3l^4 E_1 h} x^4 - \frac{4\beta^2}{L(\gamma)} [\psi_1 L_5(x) + \psi_2 \beta L_6(x)] - \frac{2pa\beta^3}{l^3 L(\gamma)} x \left[\frac{1}{lE_1 h} L_3(x) + \right. \\ + \left. \frac{\beta}{D_1} L_4(x) \right] + \frac{2pa\beta^2}{l^3 L(\gamma)} x^2 \left[\frac{1}{lE_1 h} L_5(x) + \frac{\beta}{D_1} L_6(x) \right] + \\ + \left. \frac{4pa\beta}{3l^3 L(\gamma)} (x^3 - 3l^2 x) \left[\frac{1}{lE_1 h} L_7(x) + \frac{\beta}{D_1} L_8(x) \right] \right\} \quad (3.15)$$

Усилия выпишем с точностью до λ^2 :

$$T_1 = p + \lambda \frac{p}{l^2} (l^2 - x^2) \quad (3.16)$$

$$T_2 = \lambda \left\{ \frac{2pa^2}{l^2} - \frac{8pE_2 h \beta^2}{iL(\gamma)} \left[\frac{1}{lE_1 h} L_5(x) + \frac{\beta}{D_1} L_6(x) \right] \right\} \quad (3.17)$$

Перерезывающая сила N_1 и моменты M_1 , M_2 могут быть определены по формулам (2.4), если известны компоненты перемещений u и w . Напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} + \frac{12M_1}{h^3} Z, \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{h} + \frac{12M_2}{h^3} Z$$

Удлинение определяется с точностью до λ^3 по формуле

$$\delta = u_0 + \lambda (u_1 + w_0 f') + \lambda^2 \left(u_2 + w_1 f' - \frac{1}{2} f'^2 u_0 \right)$$

Таблица 1

$\gamma = \frac{2l}{\beta}$	x_1	x_2	x_3	$\gamma = \frac{2l}{\beta}$	x_1	x_2	x_3	$\gamma = \frac{2l}{\beta}$	x_1	x_2	x_3
0.2	5.000	0.068	0.100	2.2	0.756	0.697	0.979	4.2	1.012	1.053	1.042
0.4	2.502	0.027	0.200	2.4	0.785	0.780	1.011	4.4	1.016	1.047	1.032
0.6	1.674	0.060	0.300	2.6	0.820	0.857	1.060	4.6	1.018	1.040	1.023
0.8	1.26	0.107	0.400	2.8	0.857	0.921	1.078	4.8	1.015	1.033	1.015
1.0	1.033	0.167	0.500	3.0	0.893	0.977	1.090	5.0	1.017	1.030	1.008
1.2	0.890	0.237	0.596	3.2	0.926	1.009	1.091	5.2	1.015	1.015	1.005
1.4	0.803	0.317	0.689	3.4	0.966	1.048	1.085	5.4	1.012	1.000	1.001
1.6	0.755	0.408	0.755	3.6	0.982	1.050	1.076	5.6	1.011	1.009	0.909
1.8	0.73	0.5505	0.855	3.8	0.992	1.054	1.064	5.8	1.009	1.005	0.966
2.0	0.738	0.600	0.925	4.0	1.005	1.058	1.050	0.9	1.006	1.003	0.997

Таблица 2

x	$E_1=12 E_2=1.4 \times 10^5$ $\nu_1=12 \nu_2=0.46$		$12 E_1=E_2=1.4 \times 10^5$ $\nu_1=12 \nu_2=0.46$		$E_1=E_2=E$ $\nu_1=\nu_2=\nu=0.46$	
	$\frac{10^4}{p} T_2$	$\frac{10^6}{pl} M_1$	$\frac{10^4}{p} T_2$	$\frac{10^6}{pl} M_1$	$\frac{10^4}{p} T_2$	$\frac{10^6}{pl} M_1$
0	891	-12	890	-14	887	-14
0.1	975	-12	860	-12	878	-14
0.2	1192	80	830	50	856	98
0.3	1129	160	1141	178	1331	166
0.4	-378	-2760	1413	-2000	1235	2160
0.5	-4612	0	-17300	0	-13724	0

Полное удлинение, которое получает оболочка под действием растягивающих нагрузок, равномерно распределенных по краю, примет вид

$$\delta = \frac{2pl}{E_1 h} + \frac{4}{3} \lambda \frac{pl}{E_1 h} + \lambda^2 \left\{ \frac{16pl}{15E_1 h} + \frac{4pa^2}{lE_1 h} - \frac{8pa^4}{l^3 E_2 h} - \frac{8pa^2 D_1}{l^3 E_1^3 h^2} + \right. \\ \left. + \frac{4pa^2 \beta^2}{l^2} \left[\frac{\beta}{D_1} \chi_1(\gamma) - \frac{2}{lE_1 h} \chi_2(\gamma) \right] + \frac{8pa^2 D_1 \beta}{l^4 E_1^2 h^2} \chi_3(\gamma) \right\}$$

В табл. 1 приведены значения функций χ_1 , χ_2 и χ_3 для значений аргумента γ от 0 до 6.0. Эта таблица заимствована из книги [3] А. И. Лурье и дополнена нами. При аргументе γ больше 6.0 значения функций χ_1 , χ_2 , χ_3 практически можно принять равными единице.

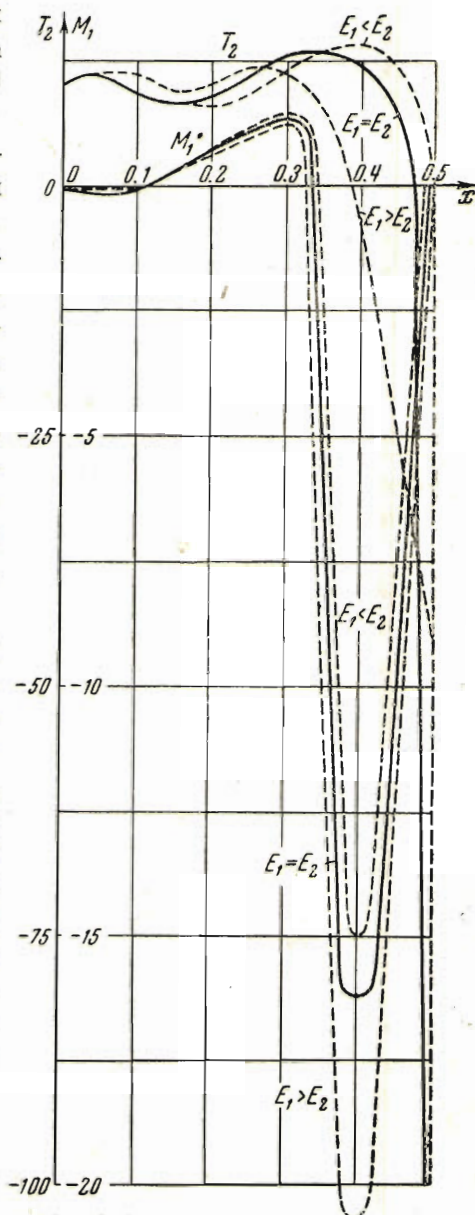
В качестве примера приводим результаты вычисления для растяжения вогнутой оболочки, размеры которой $2l/a = 3$, $2l/h = 60$, $\lambda = 0.1$.

В табл. 2 даются значения усилия T_2 и момента M_1 по длине оболочки (учитывая первое приближение) для анизотропного и изотропного материала: E_1 — модуль Юнга при растяжении оболочки вдоль образующей, а E_2 — вдоль параллели.

Распределение T_2 и M_1 по длине половины оболочки дано на фиг. 2. Сопоставление кривых дает представление о влиянии анизотропии материала на распределение T_2 и M_1 .

Усилие T_1 в первом приближении изменяется по параболическому закону, принимая свое наибольшее значение $T_1 = p(1 + \lambda)$ в среднем сечении. Таким образом, можно сказать, что вогнутость оболочки, хотя и незначительная, увеличивает по абсолютной величине значения усилий и моментов. Полное удлинение с учетом второго приближения в этом случае для изотропной оболочки будет иметь вид

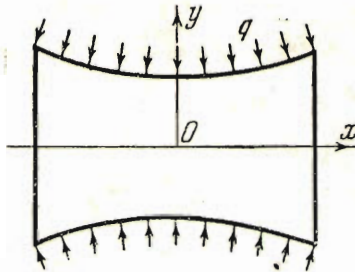
$$\delta = 1.081 \frac{2pl}{Eh}$$



Фиг. 2

§ 4. Симметричная деформация оболочки под действием внешнего давления

Рассмотрим упругое равновесие тонкой вогнутой оболочки, изгибаемой нормальными усилиями, равномерно распределенными по боковой поверхности (фиг. 3).



Фиг. 3

Обозначая через q интенсивность внешнего давления на единицу площади, для компонент главного вектора внешних сил имеем $X = 0$, $Z = q$. Пусть концы поперечному свободные. Тогда условия на краях запишутся в виде

$$T_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad M_1 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (4.1)$$

Они распадаются соответственно для каждой группы дифференциальных уравнений (2.6), (2.8) и (2.10):

$$T_1^0 = 0, \quad N_1^0 = 0, \quad M_1^0 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (4.2)$$

$$T_1^1 = 0, \quad N_1^1 = 0, \quad M_1^1 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (4.3)$$

$$T_1^2 = 0, \quad N_1^2 = 0, \quad M_1^2 = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (4.4)$$

Уравнения (2.6) представляют собой уравнения равновесия ортотропной цилиндрической оболочки радиуса a под действием равномерного внешнего давления.

Таблица 3

x	$E_1 = 12 E_2 = 1.4 \times 10^5$ $\nu_1 = 12 \nu_2 = 0.46$		$12 E_1 = E_2 = 1.4 \times 10^5$ $12 \nu_1 = \nu_2 = 0.46$		$E_1 = E_2 = E$ $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.46$	
	$\frac{10^3}{qa} T_2$	$\frac{10^5}{qal} M_1$	$\frac{10^3}{qa} T_2$	$\frac{10^5}{qal} M_1$	$\frac{10^1}{qa} T_2$	$\frac{10^5}{qal} M_1$
0	900	-40	900	-38	900	-38
0.1	904	-42	904	-38	904	-38
0.2	916	-46	917	-36	916	-42
0.3	935	-40	947	-40	937	-44
0.4	965	-14	954	-28	964	-32
0.5	990	0	996	0	997	0

Решение этой задачи сводится к следующему:

$$w_0 = \frac{\nu_2 qa}{E_2 h} x, \quad \omega_0 = \frac{qa^2}{E_2 h}, \quad T_2^0 = -qa \quad (4.5)$$

$$T_1^0 = N_1^0 = M_1^0 = M_2^0 = 0$$

Аналогично тому, как это делалось в § 3, найдем решение систем (2.8) и (2.9), учитывая условия на краях (5.3) и (5.4). Для компонент перемещений с точностью до λ^3 получается

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{\nu_2 qa}{E_2 h} x + \lambda \left[\frac{16 qa \nu_2 \beta^3}{l^2 E_2 h L(\gamma)} L_3(x) + \frac{qa}{l^2 E_1 h} (1 - \nu_1) \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{2 qa^3}{l^2 E_2 h} x \right] + \lambda^2 \left\{ - \frac{\nu_2 \beta^3}{a L(\gamma)} [4 \psi_3 L_3(x) + 4 \psi_4 \beta L_4(x)] - \right. \\
 & \left. - \frac{4 qa^3 \nu_2 D_1}{l^4 E_2^2 h^2} \left(8 + 2 \nu_2 - 3 \frac{E_2}{E_1} \right) x + \frac{4 qa^3}{l^4 E_2 h} (1 - \nu_2) \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{qa}{2 l^4 E_1 h} \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} l^2 x^3 \right) + \frac{qa}{2 E_1 h} x + \frac{8 qa \beta^3}{l^4 E_2 h L(\gamma)} (\nu_2 l^2 - 4 a^2) L_3(x) - \right. \\
 & \left. - \frac{4 qa^3 \beta D_1 (\nu_1 - 8)}{l^4 E_1 E_2 h^2 L(\gamma)} L_7(x) + \frac{16 qa^3 D_1 (\nu_1 - 8)}{l^4 E_1 E_2 h^2 L(\gamma)} x L_1(x) - \right. \\
 & \left. - \frac{4 qa \nu_2 \beta^3}{l^4 E_2 h L(\gamma)} x^2 L_3(x) - \frac{2 qa \beta^2 \nu_2}{3 l^4 E_2 h L(\gamma)} (x^3 - 2 l^2 x) L_5(x) \right\} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{qa^2}{E_2 h} + \lambda \left[\frac{16 qa^2 \beta^2}{l^2 E_2 h L(\gamma)} L_5(x) + \frac{qa^2}{l^2 E_2 h} ((2 - \nu_2)(x^2 - l^2) + 2 \nu_2 x^2) \right] - \\
 & - \lambda^2 \left\{ \frac{4 \beta^2}{L(\gamma)} [\psi_3 L_5(x) + \psi_4 \beta L_6(x)] + \frac{qa^2}{2 E_2 h} (\nu_2 - 2) + \frac{2 qa^4}{l^2 E_2 h} + \right. \\
 & \left. + \frac{4 qa^4 D_1}{l^4 E_2^2 h^2} \left(8 + 2 \nu_2 - 3 \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{qa^2}{2 l^4 E_2 h} \left(\frac{E_2}{E_1} l^2 - l^2 - 2 \nu_2 l^2 + 4 a^2 \right) x^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{qa^2}{2 l^4 E_2 h} \left(2 + \frac{1}{3} \nu_2 - \frac{4}{3} \frac{E_2}{E_1} \right) x^4 - \frac{3 qa^2 \beta}{3 l^4 E_2 h L(\gamma)} x^3 L_7(x) - \right. \\
 & \left. - \frac{4 qa^2 \beta^2}{l^4 E_2 h L(\gamma)} x^2 L_5(x) + \frac{4 qa^2 \beta^3}{l^4 E_2 h L(\gamma)} x L_3(x) + \frac{8 qa^2 \beta}{l^4 E_2 h L(\gamma)} x L_7(x) \right\} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Усилия с точностью до λ^2 имеют вид

$$T_1 = \lambda \frac{qa}{l^2} (l^2 - x^2) \quad (4.8)$$

$$T_2 = -qa - 4\lambda \left[\frac{qa}{l^2} (x^2 - l^2) + \frac{4 qa \beta^2}{l^2 L(\gamma)} L_5(x) \right] \quad (4.9)$$

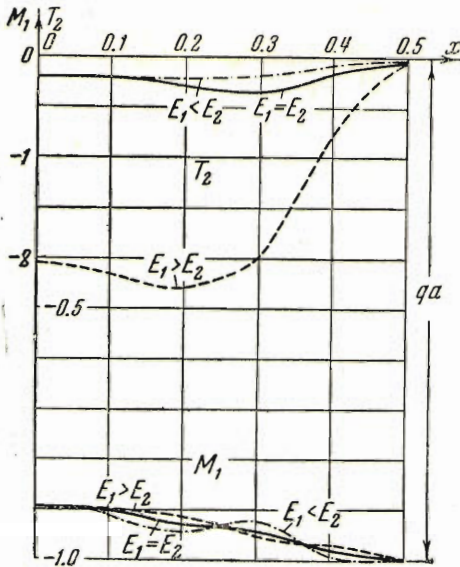
Здесь

$$\begin{aligned}
 \psi_3 = & \frac{qa^2 \beta}{l^3 E_2 h} (1 - 8 \nu_2) \chi_3(\gamma) - \frac{4 qa^2 \nu_2 \beta^2}{l^4 E_2 h} \chi_2(\gamma) - \frac{qa^2}{l^4 E_2 h} \left(8 \nu_2 l^2 - 4 \frac{E_2}{E_1} l^2 + 7 l^2 + 8 a^2 \right) \\
 \psi_4 = & - \frac{8 qa^2}{3 l E_2 h \beta^2} \chi(\gamma) - \frac{qa^2 \beta}{l^4 E_2 h} \chi_3(\gamma) + \frac{qa^2}{l^3 E_2 h} \left(12 \frac{E_2}{E_1} - 8 \nu_2 - 31 \right)
 \end{aligned}$$

Перерезывающая сила N_1 и моменты M_1 и M_2 определяются по формулам (2.4).

В качестве примера вычислений в табл. 3 приведены результаты для сжатия внешним давлением оболочки, указанной в конце § 4.

На фиг. 4 даются графики T_2 и M_1 для половины оболочки. Сопоставление кривых дает представление о влиянии анизотропии на распределение усилия T_2 и M_2 в первом приближении. Что касается влияния вогнутости оболочки, то оказывается, что вогнутость оболочки уменьшает значение кольцевого усилия T_2 по сравнению с усилием T_2^0 в цилиндрической оболочке радиуса a .



Фиг. 4

Заметим, что для выпуклой оболочки, меридиан которой задается уравнением

$$r = a \left[1 + \lambda \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \right]$$

решение получается из решений для вогнутой заменой в формулах λ на минус λ .

Укажем также, что для практических задач в окончательных формулах можно ограничиться

только главными членами, не зависящими от функций А. Н. Крылова, — отброшенные члены вносят незначительную поправку.

Поступила в редакцию
28 XII 1948

Саратовский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Дополнение и поправки к теории тонких оболочек. Лява. Сб. «Пластинки и оболочки» под ред. А. А. Гвоздева. Госстройиздат. 1939.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935.
3. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат. 1947.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат. 1947.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Изд. Военно-морской академии. Л. 1947.
6. Панов Д. Ю. О кручении стержней, близких к призматическим. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 2.
7. Штаерман П. Я. К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек. Изв. Киевского политехнического и сельскохозяйственного институтов. 1924.
8. Уманский А. А. О расчете балок на упругом основании. Ленгострансиздат. 1933.