

## К ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. М. Качанов

(Ленинград)

В работе явление ползучести рассматривается как длительный процесс нелинейно-вязкого течения. Излагаемая теория описывает наиболее существенные черты ползучести при монотонно изменяющихся напряжениях.

**§ 1. Уравнения ползучести.** Деформация тела складывается из упругой деформации  $\epsilon_x^y, \dots, \gamma_{xz}^y$  и деформации ползучести  $\epsilon_x^u, \dots, \gamma_{xz}^u$

$$\epsilon_x = \epsilon_x^y + \epsilon_x^u, \dots, \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^y + \gamma_{xz}^u \quad (1.1)$$

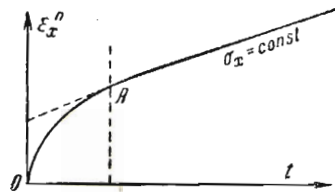
Упругие деформации подчиняются закону Гука. Опытные данные показывают, что ползучесть можно рассматривать как процесс нелинейно-вязкого течения. Таким образом, обозначая через  $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_{xy}, \eta_{yz}, \eta_{zx}$  компоненты тензора скоростей деформации, получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \xi_x &= B(t)T^{m-1}(\sigma_x - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{d}{dt} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right), \dots \quad \left( \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right) \\ \eta_{xy} &= 2B(t)T^{m-1} \tau_{xy} + \frac{1}{G} \frac{d}{dt} \tau_{xy}, \dots \quad (1.2) \end{aligned}$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — число Пуассона,  $T$  — интенсивность касательных напряжений,  $m$  — постоянная (обычно  $m$  значительно больше единицы),  $B(t)$  положительная монотонно убывающая функция времени  $t$ , отсчитываемого от момента начала ползучести  $t_0$  (или, вообще, разности  $t - t_0$ ). Напомним, что

$$T = + \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (1.3)$$

Аналогичные уравнения были предложены многими авторами [1, 2, 3] с тем отличием, что функция  $B(t)$  заменялась постоянной величиной  $B(\infty) > 0$ , к которой  $B(t)$  асимптотически стремится с течением времени. Это упрощение, в основе которого лежит пренебрежение участком неустановившейся скорости ползучести  $OA$  (фиг. 1), ухудшает результаты теории в задачах неустановившейся ползучести, например в задачах релаксации, и вряд ли может быть оправдано.



Фиг. 1

Уравнения (1.2) обобщают среду Максвелла, которая получается из (1.2) при  $m = 1$  и  $B(t) = \text{const}$ . В дальнейшем мы будем иногда исходить из более общих соотношений:

$$\begin{aligned}\xi_x &= f(T^2, t)(\sigma_x - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{d}{dt} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right), \dots \\ \eta_{xy} &= 2f(T^2, t)\tau_{xy} + \frac{1}{G} \frac{d}{dt} \tau_{xy}, \dots\end{aligned}\quad (1.4)$$

где

$$f(T^2, t) = B(t) f_1(T^2)$$

Заметим, что вследствие малости деформаций можно заменить полные производные частными производными по времени.

Введем *дополнительное рассеяние*

$$\Lambda = \int_0^{T^2} f(\zeta, t) d\zeta \quad (\Lambda \equiv B(t) \Lambda_1) \quad (1.5)$$

и упругий потенциал

$$\Pi = \frac{3}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{2G} T^2 \quad \left( k = \frac{1-2\nu}{2E}, \quad E - \text{модуль Юнга} \right) \quad (1.6)$$

Тогда соотношения (1.4) можно представить в виде

$$\xi_x = \frac{\partial}{\partial \sigma_x} \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right), \dots, \eta_{xy} = \frac{\partial}{\partial \tau_{xy}} \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right), \dots \quad (1.7)$$

При описании неустановившейся ползучести чаще всего исходят из уравнений теории малых упруго-пластических деформаций, включающих время в качестве параметра:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= f_*(T^2, t)(\sigma_x - \sigma) + \frac{1}{2G} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right), \dots \\ \gamma_{xy} &= 2f_*(T^2, t)\tau_{xy} + \frac{1}{G} \tau_{xy}, \dots\end{aligned}\quad (1.8)$$

Аналогично предыдущему можно принимать

$$f_*(T^2, t) = \Omega(t) T^{m-1} \quad (1.9)$$

Заметим, что постоянную  $m$ , функции  $B(t)$ ,  $\Omega(t)$  определяют из опытов по растяжению при фиксированных нагрузках. Очевидно, что

$$\Omega(t) = \int_0^t B(t) dt \quad (1.10)$$

и с течением времени приближается к линейной функции  $t$ ; за  $\Omega(t)$  можно взять какую-либо кривую ползучести (фиг. 1).

Уравнения (1.8), вообще говоря, непригодны для описания ползучести и в случае изменяющихся напряжений могут привести к нелепым выводам. Использование этих уравнений объясняется меньшими математическими трудностями, а также правильными качественными результатами, получаемыми при рассмотрении ползучести тел под дей-

ствием постоянных нагрузок (или смещений). Не касаясь здесь попыток создания уравнений ползучести, основанных на изучении структурных изменений металла, а также гибкой феноменологической теории ползучести, недавно предложенной Ю. Н. Работновым<sup>[4]</sup>, исходящей из представлений теории наследственной упругости Больцмана-Вольтерра, перейдем к рассмотрению некоторых частных и общих вопросов теории ползучести как нелинейно-вязкого течения. Последнюю теорию нередко упрекают в том, что даже в простейших неустойчившихся задачах она приводит к неразрешимым математическим трудностям. Ниже будет показано, что можно получить простые приближенные решения многих задач неустойчившейся ползучести на основе некоторого вариационного принципа.

**§ 2. Вариационный принцип в теории ползучести.** Сопоставим действительное напряженное состояние, возникающее в теле под действием заданных сил и скоростей, со всеми близкими мыслимыми напряженными состояниями

$$\sigma_x + \delta\sigma_x, \quad \sigma_y + \delta\sigma_y, \quad \dots; \quad \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}$$

удовлетворяющими дифференциальным уравнениям равновесия (силами инерции вследствие их ничтожности пренебрегаем) и условиям на поверхности тела  $S$ . Для простоты письма массовые силы отбрасываем. Очевидно, что вариации напряжений  $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{zx}$  и вариации внешних сил  $\delta X_n, \delta Y_n, \delta Z_n$  образуют уравновешивающуюся систему. Можно показать<sup>[6]</sup> (см. § 5б), что для любой медленно движущейся сплошной среды

(2.1)

$$\iiint_V (\xi_x \delta\sigma_x + \xi_y \delta\sigma_y + \dots + \eta_{xz} \delta\tau_{xz}) dV = \iint_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS$$

Здесь  $V$  — некоторый объем среды, ограниченный поверхностью  $S$ , а  $v_x, v_y, v_z$  — проекции скорости.

Наложим на вариации напряжений ограничение, именно, потребуем, чтобы вариации напряжений  $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xz}$  не менялись во времени. Тогда

$$\delta \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \sigma_x = 0, \dots$$

Пользуясь соотношениями (1.4), а также условием отсутствия объемных деформаций ползучести, нетрудно теперь найти, что

$$\xi_x \delta\sigma_x + \xi_y \delta\sigma_y + \dots + \eta_{xz} \delta\tau_{xz} = \delta \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) \quad (2.2)$$

Следовательно,

$$\delta \iiint_V \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dV = \iint_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS \quad (2.3)$$

Величину

$$\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \equiv \Phi$$

условимся называть *дополнительной мощностью деформации*. Пусть мощность вариаций внешних сил на истинных скоростях равна нулю:

$$\iint_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS = 0 \quad (2.4)$$

Это условие выполняется, например, в следующих случаях.

1. На  $S$  заданы напряжения (основная задача); тогда

$$\delta X_n = \delta Y_n = \delta Z_n = 0$$

2. На части поверхности  $S_1$  заданы фиксированные смещения, а на остальной части  $S_2 = S - S_1$  напряжения равны нулю (релаксационная задача); тогда

$$v_x = v_y = v_z = 0 \quad \text{на } S_1$$

3. На  $S_1$  заданы фиксированные смещения, на  $S_2 = S - S_1$  заданы напряжения (смешанная задача).

Тогда

$$\delta \iiint_V \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (2.5)$$

т. е. истинное распределение напряжений характеризуется стационарностью дополнительной мощности деформации тела.

В рассматриваемом случае малой деформации под  $V$  следует понимать область, занимаемую телом до его деформации.

В дальнейшем иногда будут применяться обозначения

$$\Lambda^* = \iiint_V \Lambda dV, \quad \Pi^* = \iiint_V \Pi dV$$

Приведем некоторые следствия, интересные для приложений.

1. Пусть к телу приложены сосредоточенные нагрузки  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial P_i} \left( \Lambda^* + \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} \right) = v_i^0 \quad (2.6)$$

где  $v_i^0$  — скорость перемещения точки приложения силы  $P_i$  по направлению действия последней. Соотношение (2.6) легко распространяется на случай обобщенных сил и скоростей.

2. Пусть напряженное состояние тела является функцией некоторого числа «лишних неизвестных»  $X_1, X_2, \dots, X_s$ ; для определения последних из (2.5) получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left( \Lambda^* + \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.7)$$

Эти уравнения будут первого порядка относительно производных  $dX_i/dt$ . К системе (2.7) следует присоединить начальные условия

$$[X_i]_{t=0} = X_{i0} \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.8)$$

Значения  $X_{i0}$  находятся из соответствующей упругой задачи.

В заключение приведем теорему энергии. Рассмотрим мощность внешних сил:

$$\frac{dA}{dt} = \iint_S (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z) dS \quad (2.9)$$

Пусть имеют место соотношения (1.2). Тогда  $\Lambda$  будет однородной функцией напряжений степени  $m + 1$ . Можно доказать, что

$$\frac{dA}{dt} = (m + 1) \Lambda^* + \frac{d\Pi^*}{dt} \quad (2.10)$$

Первое слагаемое в правой части есть мощность пластической деформации, второе — скорость приращения упругой потенциальной энергии тела.

**§ 3. Неустойчившаяся ползучесть при заданных нагрузках.** Пусть на поверхности тела  $S$  заданы напряжения  $X_n, Y_n, Z_n$ , неизменные во времени. Состояние неустойчившейся ползучести определяется вариационным уравнением (2.5). В начальный момент  $t = 0$  распределение напряжений упругое; будем соответствующие напряжения отличать одним штрихом ( $\sigma_x', \sigma_y', \dots, \tau_{xz}'$ ).

Отбросим в соотношениях (1.2) компоненты скорости упругой деформации, заменим  $B(t)$  предельным значением  $B(\infty)$  и при таком законе решим задачу об установившемся течении при тех же нагрузках. Это решение (условимся отличать его двумя штрихами) будем называть состоянием установившейся ползучести; оно удовлетворяет вариационному уравнению<sup>[6]</sup> (§ 56)

$$\delta \iiint_V \Lambda_1 dV = 0 \quad (3.1)$$

Решение даже сравнительно простых задач теории неустойчившейся ползучести наталкивается на большие математические трудности, хотя с качественной стороны картина неустойчившейся ползучести проста и заключается в постепенном изменении распределения напряжений от упругого (при  $t = 0$ ) к установившемуся (при  $t = \infty$ ). Последнее утверждение не доказано; оно подтверждается на примерах (решетки) и приводимым ниже приближенным решением.

Ищем приближенное решение вариационного уравнения (2.5) неустойчившейся задачи в виде

$$\sigma_x = \tau^0(t) \sigma_x' + \tau(t) \sigma_x'', \quad \dots, \quad \tau_{xz} = \tau^0(t) \tau_{xz}' + \tau(t) \tau_{xz}''$$

где  $\tau^0(t), \tau(t)$  — произвольные функции времени. Напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xz}$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия; граничные условия приводят к соотношению

$$\tau^0(t) = 1 - \tau(t)$$

Таким образом,

$$\sigma_x = \sigma_x' + \tau(t) (\sigma_x'' - \sigma_x'), \quad \dots, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}' + \tau(t) (\tau_{xz}'' - \tau_{xz}') \quad (3.2)$$

Теперь  $\Pi^* = \Pi^*(\tau)$ ,  $\Lambda_1^* = \Lambda_1^*(\tau)$  и из (2.5) получаем уравнение для  $\tau(t)$ :

$$B(t) \frac{d\Lambda_1^*}{dt} + \frac{d^2\Pi^*}{d\tau^2} \frac{d\tau}{dt} = 0$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\Omega(t) = \frac{d^2\Pi^*}{d\tau^2} \int_0^\tau \frac{d\tau}{P(\tau)} \quad (3.3)$$

так как  $\Pi^*(\tau)$  квадратичная функция  $\tau$ ; здесь положено

$$P(\tau) \equiv -\frac{d\Lambda_1^*}{d\tau} = -\iiint_V f_1(T^2) \frac{\partial T^2}{\partial \tau} dV \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что  $d^2\Pi^*/d\tau^2 > 0$ . Действительно, пусть  $\sigma^\circ$ ,  $T^\circ$  означают соответственно среднее давление и интенсивность касательных напряжений, относящиеся к разностям:

$$\sigma_x^\circ = \sigma_x'' - \sigma_x', \dots, \tau_{xz}^\circ = \tau_{xz}'' - \tau_{xz}'$$

Тогда ( $\sigma^\circ \neq 0$ ,  $\tau^\circ \neq 0$ )

$$\frac{d^2\Pi^*}{d\tau^2} = 2 \iiint_V \left( \frac{3}{2} k\sigma^{\circ 2} + \frac{1}{2G} T^{\circ 2} \right) dV > 0$$

Рассмотрим теперь  $P(\tau)$ . Решение вариационного уравнения

$$\delta\Lambda_1^* = 0$$

есть  $\sigma_x'', \dots, \tau_{xz}''$ .

Если искать решение этого уравнения в виде (3.2), то для  $\tau(t)$  получится уравнение

$$\iiint_V f_1(T^2) \frac{\partial T^2}{\partial \tau} dV = 0$$

Решение этого уравнения, очевидно, будет  $\tau = 1$ . Таким образом,

$$P(1) = 0 \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{dP}{d\tau} = - \left[ \iiint_V \frac{df_1}{dT^2} \left( \frac{\partial T^2}{\partial \tau} \right)^2 dV + \iiint_V f_1(T^2) \frac{\partial^2 T^2}{\partial \tau^2} dV \right] < 0 \quad (3.6)$$

так как всегда

$$\frac{df_1}{dT^2} > 0, \quad f_1(T^2) > 0, \quad \frac{\partial^2 T^2}{\partial \tau^2} = 2T^{\circ 2} > 0 \quad (3.7)$$

Следовательно,  $P(\tau)$  — монотонно убывающая функция, положительная в интервале  $0 \leq \tau < 1$ . Так как  $f_1(T^2) > 0$ , а  $\partial T^2 / \partial \tau$  — линейная функция  $\tau$ , то  $P(\tau)$  имеет в точке  $\tau = 1$  нуль первого порядка и интеграл в равенстве (3.3) расходится при  $\tau = 1$ .

Функция  $\Omega(t)$  монотонно возрастает, причем  $\Omega(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, уравнение (3.3) определяет  $\tau(t)$  как монотонно возрастающую функцию времени, асимптотически приближающуюся к значе-

нию  $\tau = 1$  при  $t \rightarrow \infty$ ; эта функция представлена сплошной кривой на фиг. 2, где  $t_1^* = k_1 \Omega(t)$ , причем  $k_1$  есть некоторая постоянная, о которой говорится ниже. Для простейших задач (решетки) полученное решение является точным.

В частном случае (1.2) имеем

$$f_1(T^2) = T^{m-1}$$

Тогда

$$P(\tau) = -\frac{2}{m+1} \frac{d}{d\tau} \iiint V T^{m+1} dV \quad (3.8)$$

Если  $m$  — четное число, то  $P(\tau)$  будет полиномом степени  $m$ .

Аналогичным методом могут быть рассмотрены задачи, в которых встречается условие статической эквивалентности (кручение, изгиб). Остановимся на двух примерах.

*Кручение цилиндрического стержня.* Функции напряжений  $F'$  (при  $t = 0$ ) и  $F''$  (для установившегося состояния) удовлетворяют соответственно вариационным уравнениям [6]

$$\begin{aligned} \delta \iint \left[ \frac{T'^2}{2G} - 2\omega F' \right] dx dy &= 0 \\ \delta \iint \left[ \int_{f_1}^{T''^2} f_1(\zeta) d\zeta - 2\omega F'' \right] dx dy &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь  $\omega$  — кручение на единицу длины и

$$T^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2$$

Решение неустановившейся задачи ищем в виде

$$F = F' + \tau(t)(F'' - F')$$

Исходя из вариационного принципа (2.5), находим аналогично предыдущему

$$G\Omega(t) = \iint T'^2 dx dy \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{P(\tau)}, \quad P(\tau) = - \iint f_1(T^2) \frac{\partial T^2}{\partial \tau} dx dy$$

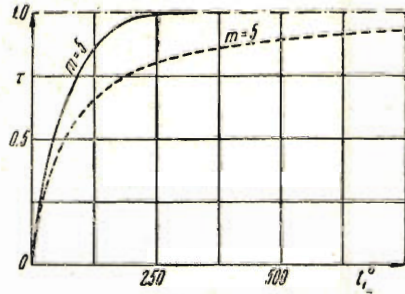
Нетрудно показать с помощью (3.9), что

$$P(1) = 0, \quad \frac{dP}{d\tau} < 0$$

Рассмотрим случай круглого стержня радиуса  $a$ , принимая зависимость (1.2). Здесь  $T = \tau_\varphi = -dF/dr$  и

$$F' = \frac{M}{\pi a^2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad F'' = \frac{M}{2\pi a^2} \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{1+\mu} \right] \quad (3.10)$$

где  $M$  — крутящий момент, а  $\mu = 1/m$ .



Фиг. 2

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad Y_1 = \alpha_1 \xi^\mu - \xi, \quad \alpha_1 = \frac{3 + \mu}{4} \quad (3.11)$$

$$t_1^* = 64G\Omega(t) \frac{1 + \mu}{(1 - \mu)^2} \left( \frac{2M}{\pi a^3} \right)^{m-1}, \quad P_1(\tau) = - \int_0^1 (\xi + \tau Y_1)^m \xi Y_1 d\xi$$

Тогда решение задачи приводится к виду

$$t_1^* = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{P_1(\tau)} \quad (3.12)$$

Сплошная кривая, показанная на фиг. 2, вычислена по уравнению (3.12) для случая  $m = 5$ . Пунктирная линия соответствует решению этой задачи по теории малых упруго-пластических деформаций (1.8). Зависимость (3.12), как и в других задачах, просто вычисляется для целых  $m$ ; в случае дробного  $m$  можно пользоваться интерполяцией.

*Изгиб.* Сечение стержня предполагаем для простоты симметричным относительно плоскостей  $xz$ ,  $yz$  (ось  $z$  направлена по оси стержня); изгибающий момент  $M$  действует в плоскости  $yz$ . Обозначим через  $2b(y)$  ширину профиля, через  $2h$  максимальную высоту его. В область отрицательных  $y$  напряжение  $\sigma_z$  продолжим нечетным образом. Мы приходим к изопериметрической вариационной задаче

$$\delta \int_0^h \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) b(y) dy = 0 \quad (3.13)$$

при условии

$$4 \int_0^h \sigma_z y b(y) dy = M \quad (3.14)$$

причем

$$\Lambda = \frac{B_1(t)}{m+1} \sigma_z^{m+1}, \quad \Pi = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 \quad \left( 2B(t) = 3 \frac{m+1}{2} B_1(t) \right) \quad (3.15)$$

Уравнение Эйлера этой задачи выражает так называемую гипотезу плоских сечений. Приближенное решение поставленной задачи ищем в форме (3.2). Имеем

$$\sigma_z' = \frac{M}{I} y, \quad \sigma_z'' = \frac{M}{I_m} y^\mu \quad (3.16)$$

Здесь  $I$  — момент инерции поперечного сечения, а

$$I_m = 4 \int_0^h y^{1+\mu} b(y) dy$$

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{y}{h}, \quad \beta(\xi) = \frac{b(y)}{h}, \quad \sigma_z^* = \frac{\sigma_z I}{Mh}, \quad \alpha_2 = \frac{I}{I_m h^{1-\mu}} \leq 1$$

Тогда

$$\sigma_z^* = \xi + \tau(t) Y_2 \quad (Y_2 \equiv \alpha_2 \xi^\mu - \xi) \quad (3.17)$$



Условие (3.14), очевидно, будет удовлетворяться; уравнение (3.13) приводит к зависимости

$$t_2^* = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{P_2(\tau)} \quad (3.18)$$

Здесь положено

$$P_2(\tau) = - \int_0^1 [\xi + \tau Y_2]^m Y_2 \beta(\xi) d\xi, \quad t_2^* = E\Omega_1(t) \left(\frac{Mh}{l}\right)^{m-1} \left(\int_0^1 Y_2^2 \beta(\xi) d\xi\right)^{-1}$$

При этом

$$P_2(1) = 0, \quad \frac{dP_2(\tau)}{d\tau} < 0 \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

*Замечание.* Если исходить из уравнений теории малых пластических деформаций (1.8), то вместо вариационного принципа (2.5) будет справедлив вариационный принцип [6]

$$\delta \iiint_V [\Omega(t) \Lambda_1 + \Pi] dV = 0 \quad (3.19)$$

Тогда при той же схеме (3.2) вместо решения (3.3) получим решение

$$\Omega(t) = \frac{d^2 \Pi^*}{d\tau^2} \frac{\tau}{P(\tau)} \quad (3.20)$$

так как вследствие начала Кастильяно  $\delta \Pi^*(0) = 0$  имеем

$$\frac{d\Pi^*}{d\tau} = \tau \frac{d^2 \Pi^*}{d\tau^2}$$

Согласно решению (3.20) функция  $\tau(t)$  монотонно возрастает, стремясь к значению  $\tau(\infty) = 1$ . Таким образом, качественно картина сохраняется; однако по (3.20) функция  $\tau(t)$  стремится к предельному значению более вяло, чем согласно (3.3).

**§ 4. Релаксационные задачи.** Пусть на части поверхности тела  $S_1$  заданы фиксированные смещения, а на остальной части  $S_2 = S - S_1$  напряжения равны нулю. В начальный момент времени  $t = 0$  имеет место упругое распределение напряжений  $\sigma_x', \sigma_y', \dots, \tau_{xz}'$ ; вследствие ползучести напряжения с течением времени приближаются к нулю. Приближенное решение задачи ищем в виде

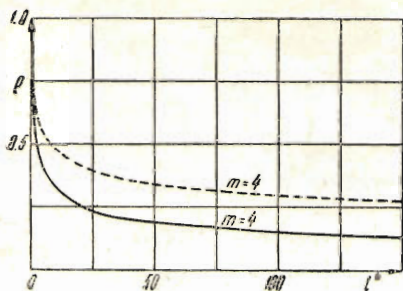
$$\sigma_x = \rho(t) \sigma_x', \quad \sigma_y = \rho(t) \sigma_y', \quad \dots, \quad \tau_{xz} = \rho(t) \tau_{xz}' \quad (4.1)$$

где  $\rho(t)$  — произвольная функция времени. Условие стационарности дополнительной мощности деформации (2.5) приводит к уравнению

$$B(t) \frac{d\Lambda_1^*}{d\rho} + \frac{d^2 \Pi^*}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

Отсюда находим ( $\rho(0) = 1$ )

$$\Omega(t) = - \frac{d^2 \Pi^*}{d\rho^2} \int_1^{\rho} \frac{d\rho}{d\Lambda_1^*/d\rho} \quad (4.3)$$



Фиг. 3

Нетрудно видеть, что

$$d^2\Pi^*/d\rho^2 = 2\Pi^* > 0$$

Далее при  $\rho > 0$  имеем

$$\frac{d\Lambda_1^*}{d\rho} = 2\rho \iiint_V f_1(\rho^2 T'^2) T'^2 dV > 0$$

Остановимся на зависимости (1.2); тогда из (4.3) получаем

$$t^* = \frac{1}{m-1} \left( \frac{1}{\rho^{m-1}} - 1 \right) \quad (4.4)$$

Здесь

$$t^* = \kappa \Omega(t), \quad \kappa = \left( \iiint_V T'^{m+1} dV \right) \left( \iiint_V \Pi' dV \right)^{-1} > 0 \quad (4.5)$$

При фиксированном  $m$  кривая (4.4) вычисляется раз навсегда (сплошная линия на фиг. 3); для каждой конкретной задачи меняются лишь отсчеты по оси абсцисс. Уравнение (4.2) следует также из теоремы энергии (2.10), так как для рассматриваемых задач  $dA/dt = 0$ . Полученное решение для простейших задач является точным; в более сложных задачах оно должно рассматриваться как первое приближение (обычно достаточное для приложений), так как по этому решению распределение напряжений в любой момент времени подобно начальному  $\sigma_x', \sigma_y', \dots, \tau_{zx}'$ . При дальнейшем уточнении решения следует основываться на найденном первом приближении.

Остановимся в заключение на задаче релаксации напряжений в стержне, получившем в начальный момент  $t = 0$  относительное удлинение  $\epsilon_{x0}$ , которое сохраняется и в последующее время  $t > 0$ . Здесь

$$\sigma_x' = E\epsilon_{x0}, \quad \kappa = 2EZ^{-(m+1)/2} \sigma_x'^{m-1}$$

Согласно же теории малых упруго-пластических деформаций (1.8) релаксация напряжений описывается, как нетрудно видеть, зависимостью  $t^* = (1-\rho)\rho^{-m}$ , нанесенной на фиг. 3 пунктиром (для  $m = 4$ ). Кривые релаксации по уравнению (4.4) располагаются ниже этих кривых и характеризуются более резким спаданием напряжений. Это, повидимому, соответствует опытным данным [5].

Поступила в редакцию  
3 V 1949

Ленинградский государственный  
университет

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffreys. On Plasticity and Creep in Solids. Proc. Roy. Soc. London. A.CXXXVIII. 1932.
2. Odqvist. Creep Stresses in a Rotating Disc. Proc. Fourth Intern. Congr. Appl. Mech. 1934.
3. Nadai. The Creep of Metals Under Various Stress Conditions. Th. v. Kármán Anniversary Volume. Pasadena, Cal. 1941.
4. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник Московского государственного университета. 1948. № 10.
5. Малинин Н. Н. Основы расчетов на ползучесть. Машгиз. 1948.
6. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат. 1948.