Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

D-РАЗБИЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА КВАЗИПОЛИНОМОВ
(К УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ)

Ю. И. Неймарк
(Горький)

Многие задачи устойчивости регулирования[1] приводятся к исследованию расположения на комплексной плоскости z корней трансцендентной функции вида

$$\sum_{k,\, s=0}^{n,\, m} a_{ks}\, z^k e^{\tau_s z} \tag{I}$$

названной Н. Г. Чеботаревым квазиполиномом.

Эта задача с математической точки зрения может рассматриваться как обобщение на целые функциии вида (I) известных проблем Эрмита и Рауза-Гурвица[1—3]. Еще задолго до появления в решении этой задачи настоятельной практической необходимости рядом математиков ставился и рассматривался вопрос о необходимых и достаточных условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты степенного ряда целой функции для того, чтобы все ее корни лежали слева от мнимой оси[4, 5, 6]. В этом направлении был получен ряд результатов, в частности, установлена достаточность при некотором дополнительном требовании прямого обобщения на целые функции детерминантного критерия Рауза-Гурвица[6]. Однако естественно, что при рассмотрении произвольной целой функции искомые условия должны состоять в выполнении бесконечного числа неравенств и потому вообще не могут быть непосредственно использованы для решения конкретных задач.

С 1941 г. Н. Г. Чеботарев[7—11] под влиянием И. Н. Вознесенского и А. И. Лурье занялся отысканием эффективного критерия, позволяющего конечным числом шагов установить, имеет ли квазиполином (I) все корни слева от мнимой оси, точнее, своей задачей он считал отыскание неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты квазиполинома для того, чтобы он не имел корней с положительной действительной частью. После доклада Н. Г. Чеботарева осенью 1941 г. на одном из заседаний Московского математического общества, наметившего возможный путь решения этой проблемы, она привлекла внимание ряда математиков и вызвала целую серию математических работ[7—19].

Л. С. Понтрягин[12] доказал, что квазиполином с соизмеримыми показателями, т. е. квазиполином вида

$$\sum_{k,\, s=0}^{n,\, m} a_{ks}\, z^k e^{sz} = f(-iz) + ig(-iz) \tag{II}$$

где $f(\omega)$ и $g(\omega)$ — полиномы с действительными коэффициентами от ω, $\sin\omega$ и $\cos\omega$, имеет все корни слева от мнимой оси лишь тогда, когда он имеет главный член и все корни функций $f(\omega)$ и $g(\omega)$ действительные перемежающиеся. Причем он установил, что для того, чтобы функция $f(\omega)$ не имела комплексных корней, нужно

[1] См., например, работы [20—23, 25, 26, 30—34].

чтобы в достаточно больших интервалах $(-2k\pi, 2k\pi)$ она имела $4km+n$ действительных корня.

Н. Г. Чеботарев[7—11] дал обобщение метода Штурма на полиномы от ω, $\sin\omega$ и $\cos\omega$, что позволило ему, опираясь на результаты Л. С. Понтрягина, дать алгоритм, позволяющий конечным числом шагов установить, имеет ли численно заданный квазиполином вида (II) все корни слева от мнимой оси. Фактическое применение алгоритма Чеботарева требует значительных вычислений и было проделано в работах Н. Г. Чеботарева[17], Цапырина[18] и др. для случаев $m=1$, $n\leqslant 3$ и действительных a_{ks}.

В основе алгоритма Чеботарева лежит так называемый критерий Эрмита-Билера. В связи с этим в ряде работ Н. Г. Чеботарева, Н. Н. Меймана[13—15] и Б. Я. Левина[16] рассматривается вопрос о его применимости к целым функциям, что повлекло к выделению и изучению так называемых HB и B функций.

К рассматриваемому вопросу также относится значительное число работ [20—26, 29—35], посвященных рассмотрению устойчивости систем с волновыми звеньями и так называемыми запаздываниями, в основе которых, с интересующей нас точки зрения, лежит рассмотрение тех или иных сечений пространства квазиполиномов.

В настоящей работе рассматривается задача, объединяющая математическую проблему Н. Г. Чеботарева с приемами исследования практиков. Именно в § 1—6 рассматривается так называемое D-разбиение пространства квазиполиномов и его сечений на области, соответствующие квазиполиномам с разными числами корней справа от мнимой оси.

В § 7 рассматривается вопрос о применимости к целым функциям детерминантных критериев, аналогичных критериям Рауза и Эрмита-Гурвица для полиномов. Получаемые результаты представляют собой развитие иным методом соответствующих результатов Г. Громмера[4], Н. Г. Чеботарева[5] и М Крейна[6]. Последний параграф посвящен отысканию числа корней с положительной действительной частью для заданного квазиполинома.

§ 1. Равностепенная непрерывность зависимости корней квазиполинома от его коэффициентов

1. Как известно, корни полинома

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

при $a_n\neq 0$ суть непрерывные функции коэффициентов $a_n, a_{n-1},\ldots, a_0$. Более того, для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ можно указать настолько малое $\delta>0$, что при изменениях коэффициентов a_j по модулю менее чем на δ все корни полинома меняются по модулю менее чем на ε. Напротив, при $a_n=0$ равностепенная непрерывность в указанном выше смысле не имеет места, так как при $a_n\to 0$ и, например, $a_{n-1}\neq 0$ один из корней полинома $p(z)$ неограниченно возрастает. (Можно, конечно, и в случае $a_n=0$ „добиться“ непрерывности, считая корни близкими, если они близки на сфере Римана.)

Если $f(z, a_1,\ldots, a_n)$ произвольная целая функция z, непрерывно зависящая от параметров $a_1,\ldots,a_n$, то, с одной стороны, для любого ее конечного корня z_j и любого $\varepsilon>0$ существует настолько малое положительное δ, что $|\Delta z_j|<\varepsilon$ при $|\Delta a_k|<\delta$; а с другой стороны, вообще для заданного $\varepsilon>0$ не существует $\delta>0$ такого, чтобы при $|\Delta a_k|<\delta$ для всех корней целой функции f имело место $|\Delta z_j|<\varepsilon$.

2. *Теорема 1*. При $a_{nm} \neq 0$ и $a_{n0} \neq 0$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\Delta z_\nu| < \varepsilon$ для всех корней $z_1, z_2, \ldots$ квазиполинома

$$\sum_{k,\, s=0}^{n,\, m} a_{ks} z^k e^{\tau_s z} \quad \text{при} \quad |\Delta a_{ks}| < \delta \tag{1.1}$$

Причем, например, при $a_{nm} \neq 0$, но $a_{n0} = 0$ равностепенной непрерывности зависимости корней квазиполинома (1.2) от коэффициентов нет. Однако для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|\Delta a_{ks}| < \delta$ для всех корней, лежащих на полуплоскости $\operatorname{Re} z > -M$, где M — любое фиксированное число, $|\Delta z_\nu| < \varepsilon$.

Установим справедливость теоремы сначала для квазиполинома с соизмеримыми показателями, т. е. квазиполинома вида

$$P(z, e^{\tau z}) = \sum_{k,\, s=0}^{n,\, m} a_{ks} z^k e^{\tau_s z} \tag{1.2}$$

Уравнение $P(z, e^{\tau z}) = 0$ можно заменить системой:

$$P(z, t) = 0, \qquad t = e^{\tau z} \qquad \left(z = \frac{1}{\tau}(\ln t + 2k\pi i)\right)$$

или

$$z^{-n} P(z, t) = \left(a_{nm} + \frac{a_{n-1\, m}}{z} + \ldots + \frac{a_{0m}}{z^n}\right) t^m + \ldots + a_{n0} + \ldots + \frac{a_{00}}{z^n} =$$
$$= A_m(z)\, t^m + A_{m-1}(z)\, t^{m-1} + \ldots + A_0(z) = 0$$

Пусть $t_1^\infty, \ldots, t_m^\infty$ корни полинома $P(\infty, t)$. Поскольку a_{nm} и a_{n0} отличны от нуля, то $t_j^\infty \neq 0$, ∞ и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать настолько малое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$\frac{1}{\tau}\left|\ln t_j - \ln t_j^\infty\right| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad \left|t_j - t_j^\infty\right| < \varepsilon_1$$

Пусть $|a_{ks}| < M$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $s = 0, \ldots, m$. Тогда в силу равностепенной непрерывности корней $t_1, t_2, \ldots, t_m$ полинома $z^{-n} P(z, t)$ от его коэффициентов $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$ по ε_1 можно найти такое N, что $|a_{ks}| < M$ и $|\Delta a_{ns}| < \delta_1$ для всех $|z| \geqslant N$.

Для корней квазиполинома (1.2), лежащих в круге $|z| \leqslant N$, по ε можно подобрать такое $\delta_2 > 0$, чтобы при $|\Delta a_{ks}| < \delta_2$ их возможные изменения были по модулю меньше ε.

Итак, при $|\Delta a_{ks}| < \min(\delta_1, \delta_2)$ изменения всех корней квазиполинома (1.2) по модулю не превосходят ε, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь произвольный квазиполином (1.1) при условии $a_{nm} \neq 0$, $a_{n0} \neq 0$. Его корни удовлетворяют уравнениям

$$F(z, t) = \left(a_{nm} + \frac{a_{n-1\, m}}{z} + \ldots\right) t^{\tau_m} + \ldots = A_m t^{\tau_m} + \ldots + A_0.$$

$$z = \ln t + 2k\pi i$$

Предыдущее доказательство можно целиком повторить, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|\Delta A_s| < \delta$ для всех корней t_j функции F будет $|\Delta t_j| < \varepsilon$. Равностепенная непрерывность корней t_j функции F от ее коэффициентов A_s вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Пусть Ω совокупность функций вида

$$A_m t^{\tau_m} + A_{m-1} t^{\tau_{m-1}} + \ldots + A_0$$

где $0 < \alpha \leqslant |A_m|$, $|A_j| \leqslant \beta < +\infty$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\Delta t| < \varepsilon$ при $|\Delta A_s| < \delta$ для всех корней функций из Ω.

Прежде всего очевидно, что можно ограничиться рассмотрением корней, лежащих, например, в угле $0 < \arg t < \pi$ и внутри некоторого круга $|t| < R$.

Допустим противное. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существует последовательность корней $t_1, t_2, \ldots$ функций $F_1, F_2, \ldots$, для которых соответствующие максимальные значения $\delta_j \to 0$.

Из последовательности функций $F_1, F_2, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $F_{\mu_1}, F_{\mu_2}, \ldots$, равномерно сходящуюся в области $G(0 \leqslant \arg t \leqslant \pi,\ |t| \leqslant R)$ к некоторой функции F из Ω. По ε подберем δ так, чтобы при изменениях коэффициентов функций F менее чем на δ для корней, лежащих в G, $|\Delta t| < \varepsilon$. С некоторого номера μ_q коэффициенты функции F_{μ_k} отличаются от коэффициентов функции F менее чем на $\delta/2$. Следовательно, и изменения корней функций F_{μ_k} при $\mu_k > \mu_q$ будут по модулю меньше ε, если только менять их коэффициенты менее чем на $\delta/2$, что противоречит предположению.

Корни квазиполинома (1.1) с достаточно большими модулями при $a_{nm} \neq 0$ и $a_{n_0} \neq 0$ сколь угодно близки к корням квазиполинома

$$a_{nm} e^{\tau_m z} + a_{nm-1} e^{\tau_{m-1} z} + \ldots + a_{n0} \tag{1.3}$$

При $a_{nm} \to 0$ точная верхняя граница действительных частей корней квазиполинома (1.3), а следовательно, и (1.2) неограниченно возрастает, и поэтому при $a_{nm} = 0$ нет равностепенной непрерывности.

3. Перейдем к рассмотрению зависимости корней квазиполинома от его показателей τ_s.

Лемма 2. Функция

$$a_m t^{\tau_m} + a_{m-1} t^{\tau_{m-1}} + \ldots + a_0 \tag{1.4}$$

при соизмеримых показателях τ_s имеет конечное число корней; напротив, если показатели $\tau_m, \ldots, \tau_1$ несоизмеримы и ни для каких целых чисел α_j, не равных одновременно нулю

$$\alpha_m \tau_m + \ldots + \alpha_1 \tau_1 \neq 0$$

то функция (1.4) имеет бесконечное число корней, заполняющих всюду плотно некоторую конечную систему концентрических колец:

$$\alpha_1 \leqslant |t| \leqslant \beta_1, \quad \ldots \quad, \alpha_q \leqslant |t| \leqslant \beta_q$$

В силу леммы Кронекера о диофантовых приближениях во втором случае аргументы

$$t^{\tau_m}, \ldots, t^{\tau_1}$$

могут принять с любой степенью точности любую систему значений. Поэтому замыкание точечного множества корней рассматриваемого квазиполинома совпадает с множеством корней квазиполиномов вида

$$\xi_m t^{\tau_m} + \xi_{m-1} t^{\tau_{m-1}} + \ldots + \xi_0 \tag{1.5}$$

где $\xi_m, \ldots, \xi_0$ — произвольные комплексные числа с модулями, равными соответственно модулям коэффициентов $a_m, \ldots, a_0$ квазиполинома (1.4).

Обозначим множество корней квазиполиномов (1.5) через Ω. Ясно, что если $t \subset \Omega$, то при любом φ и $te^{i\varphi} \subset \Omega$. Поэтому Ω состоит из множества концентрических окружностей. Покажем, что среди этих окружностей конечное число граничных. Из

$$\sum i\xi_k t^{\tau_k} d\varphi_k + \tau_k \xi_k t^{\tau_k - 1} dt = 0$$

следует, что dt не произвольно при произвольных $d\varphi_k$ лишь при условии, что для всех k

$$\arg \xi_k t^{\tau_k} = \pm \psi$$

Однако условия

$$\arg \xi_k t^{\tau_k} = \pm \psi, \qquad \sum \xi_k t^{\tau_k} = 0$$

могут выполняться лишь для конечного числа значений $|t|$.

Заметим, что $t \subset \Omega$ означает, что из $m+1$ отрезков длин

$$|a_m t^{\tau_m}|, \ldots, |a_0|$$

можно составить замкнутый $m+1$-угольник. Для возможности такого построения необходимо и достаточно, чтобы длина ни одного из этих отрезков не превосходила суммы длин остальных.

Поэтому, если обозначить Ω_k множество точек плоскости t, удовлетворяющих условию

$$\sum_{s \neq k}' |a_s t^{\tau_s}| - |a_k t^{\tau_k}| \geqslant 0$$

то

$$\Omega = \Omega_0 \Omega_1 \ldots \Omega_m \tag{1.6}$$

Множество Ω, определяемое соотношением (1.6), при непрерывном изменении a_k и τ_s меняется непрерывно. Заметим еще, что при любых показателях τ_s все корни функции (1.5) принадлежат множеству Ω, определяемому согласно (1.6).

Из леммы 2 с очевидностью следует неравностепенность непрерывной зависимости корней квазиполинома от его показателей.

Для дальнейшего укажем еще одну лемму.

Лемма 3. Если квазиполином

$$\psi(z) = a_m e^{\tau_m z} + a_{m-1} e^{\tau_{m-1} z} + \ldots + a_0 \tag{1.7}$$

имеет корень $z = \lambda$, то в сколь угодно узкой полосе

$$\operatorname{Re} \lambda - \varepsilon < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} \lambda + \varepsilon$$

квазиполином (1.7) имеет бесконечное число корней.

Это утверждение непосредственно следует из квазипериодичности функции $\psi(z)$ вдоль мнимой оси.

Пусть C_λ круг с центром в точке $z = \lambda$, лежащий внутри рассматриваемой полосы и не содержащей нулей (1.7), отличных от λ. Пусть еще на границе круга $|\psi(z)| > \delta$. В силу квазипериодичности $\psi(z)$ для любого n существует такое T, что

$$|\psi(z + iT) - \psi(z)| < \frac{\delta}{2n}$$

Следовательно, в каждом из кругов $C_{\lambda+ikT}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, равном кругу C_λ и с центром в точке $\lambda + ikT$, содержится столько же корней, сколько и в круге C_λ.

§ 2. Условия конечности числа корней на правой полуплоскости

1. Рассмотрения § 1 позволяют сформулировать лемму.

Лемма 4. При $a_{nm} \neq 0$ для любого $\varepsilon > 0$ существует M такое, что корни квазиполинома (1.1), лежащие в области

$$\operatorname{Re} z > \varepsilon, \qquad |z| > M$$

отличаются по модулю от корней функции

$$a_{nm} e^{\tau_m z} + a_{nm-1} e^{\tau_{m-1} z} + \ldots + a_{n0} \tag{2.1}$$

стоящей перед старшей степенью z, менее чем на ε.

Поэтому выполнение для почти всех корней функции (2.1) условия $\operatorname{Re} z < \delta$ для любого $\delta > 0$ необходимо, а выполнение для почти всех корней функции (2.1) условия $\operatorname{Re} z < -\delta$ для какого-нибудь $\delta > 0$ достаточно для того, чтобы квазиполином имел конечное число корней на правой полуплоскости. Но условие $\operatorname{Re} z < \delta$ согласно лемме 3 выполняется для почти всех корней функции (2.1), лишь если выполняется условие $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ для всех его корней. Итак, условие $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ необходимо и условие $\operatorname{Re} z < -\delta$ при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ достаточно.

2. Л. С. Понтрягин [12] показал, что если квазиполином с соизмеримыми показателями не имеет главного члена, то необходимо существует бесконечное число корней с сколь угодно большими действительными частями. Просмотр доказательства показывает, что оно проходит и для произвольного квазиполинома, т. е. наличие главного члена необходимо для того, чтобы квазиполином имел конечное число корней на правой полуплоскости.

3. Согласно предыдущему квазиполином с соизмеримыми показателями и главным членом $a_{nm} z^n e^{\tau m z}$ имеет конечное число корней с положительной действительной частью, если все корни t_j^∞ полинома

$$a_{nm} t^m + a_{nm-1} t^{m-1} + \ldots + a_{n0} \tag{2.2}$$

лежат внутри единичного круга $|t| \leqslant 1$, и имеет бесконечное число корней на правой полуплоскости, если хотя бы один его корень лежит вне этого круга[1]. Осталось рассмотреть случай, когда некоторые из корней полинома (2.2) лежат на границе круга $|t| \leqslant 1$.

Для корней квазиполинома (1.2) при $a_{nm} \neq 0$, лежащих справа от прямой $\operatorname{Re} z = -M$, имеет место асимптотическая формула

$$z_{jk} = \frac{1}{\tau} \{\ln t_j^\infty + 2 k\pi i\} + \varepsilon_{jk}, \quad \text{где } \varepsilon_{jk} \to 0 \text{ при } k \to \pm\infty$$

Корню t_j^∞ с модулем, равным единице, отвечает серия корней

$$z_{jk} = \frac{2k\pi}{\tau} i + \varepsilon_{jk}$$

неограниченно приближающихся к мнимой оси. При $|t_j(i\omega)| \equiv 1$ корни этой серии лежат на мнимой оси. Покажем, что если

$$\lim |t_j(i\omega)| = 1 \quad \text{при} \quad \omega \to \pm\infty$$

и если приближение происходит слева (справа), то корни соответствующей серии с некоторого k располагаются слева (справа) от мнимой оси.

В окрестности точки $z = \infty$ для корня t_j имеет место разложение

$$t_j = t_j^\infty + a_{j1} z^{-1/k} + a_{j2} z^{-2/k} + \ldots \tag{2.3}$$

Пусть приближение $|t_j|$ к единице при неограниченном возрастании z вдоль мнимой оси порядка $P/k = \alpha p$. Тогда для отрезков $s_0, s_1, \ldots, s_p$ ряда (2.3) для любых фиксированных $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ и некоторого $A_p > 0$ при $z = i\omega$ и $|z| > M$ выполняются неравенства

$$1 - |s_0| = 0, \quad |1 - |s_1|| < \frac{\varepsilon_1}{\omega^\alpha}, \quad \ldots,$$

$$|1 - |s_{p-1}|| < \frac{\varepsilon_{p-1}}{\omega^{\alpha(p-1)}}, \quad 1 - |s_p| > \frac{A_p}{\omega^{\alpha p}} \tag{2.4}$$

Из $e^{\tau z} = t$ имеем $\operatorname{Re} z = \tau^{-1} \ln |t_j|$; поэтому для любого $\delta_0 > 0$ существует такое M_0, что $\operatorname{Re} z < \delta_0$ при $|z| > M_0$.

Полагая $z = i\omega + \xi$, где $|\xi| < \delta_0$, из второго неравенства (2.4) находим, что

$$\operatorname{Re} z < \frac{\delta_1}{\omega^\alpha} \text{ при } |z| > M_1, \ldots, \operatorname{Re} z < \frac{\delta_{p-1}}{\omega^{\alpha(p-1)}} \text{ при } |z| > M_{p-1}$$

---

[1] Это утверждение содержится в упомянутой работе Л. С. Понтрягина [12].

Но согласно последнему неравенству (2.4) для некоторого достаточно большего M^* из

$$|z| > M^* \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} z < \frac{\delta_{p-1}}{\omega^{\alpha(p-1)}}$$

следует $|t_j| < 1$, т. е. в правой полуокрестности

$$\operatorname{Re} z > 0, \qquad |z| > \max(M_0, M_1, \ldots M_{p-1}, M^*)$$

точки $z = \infty$ нет корней рассматриваемой серии. Отсюда следует теорема.

Теорема 2. Квазиполином (1.2) имеет конечное число корней с положительной действительной частью тогда и только тогда, когда он имеет главный член и для всех корней t_j сооответствующего полинома $P(i\omega, t)$ при достаточно больших по модулю ω

$$|t_j(i\omega)| \leqslant 1 \tag{2.5}$$

4. Множество чисел вида

$$\alpha_m \tau_m + \alpha_{m-1} \tau_{m-1} + \ldots + \alpha_1 \tau_1$$

где $\alpha_m, \ldots, \alpha_1$ — произвольные целые числа, образует по отношению к операции сложения абелеву группу. Как известно, она может быть представлена в виде прямого произведения циклических подгрупп, поэтому существуют числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ $(p \leqslant m)$, не допускающие линейных однородных соотношений с целыми коэффициентами, такие, что, в частности,

$$\tau_s = \sum \alpha_{sj} \nu_j \qquad \left(\begin{matrix} \alpha_{sj} \text{ — целые числа} \\ s = m, m-1, \ldots .1 \end{matrix}\right) \tag{2.6}$$

Будем называть числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ базисом показателей $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Если показатели соизмеримы, то $p = 1$ и базис состоит из одного числа ν_1. Если же между показателями нет линейной зависимости с целыми коэффициентами, то $p = m$ и сами показатели являются своим базисом. Вообще, если показатели $\tau_1, \ldots \tau_m$ допускают k и не более независимых линейных однородных соотношений с целыми коэффициентами, то $p = m - k$.

Заметим, что если эти соотношения заданы, то базис находится конечным числом операций.

5. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ базис показателей для чисел τ_s, определяемых (2.6). Представим квазиполином (2.1) в виде

$$\sum a_{ns} \xi_1^{\alpha_{s_1}} \ldots \xi_p^{\alpha_{s_p}} t^{\alpha_{s_1} \nu_1 + \ldots + \alpha_{s_p} \nu_p} \tag{2.7}$$

где

$$z = x + iy, \qquad e^{\nu_j yi} = \xi_j, \qquad e^x = t$$

Числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ при подходящем y могут принять с любой степенью точности любую систему значений на окружности $|\xi| = 1$.

Поэтому замыкание множества корней функции (2.7) совпадает с множеством Ω корней функций

$$\sum a_{ns}\,\xi_1^{\alpha_{s_1}}\ldots\xi_p^{\alpha_{s_p}}\,t^{\alpha_{s_1}\nu_1+\ldots+\alpha_{s_p}\nu_p} \tag{2.8}$$

где $\xi_1,\ldots,\xi_p$ — произвольные числа с модулем, равным единице.

Заметим, что если $t\subset\Omega$, то и $te^{i\varphi}\subset\Omega$ при любом φ. Поэтому для того, чтобы у квазиполиномов (2.1) не было корней с положительной действительной частью, необходимо и достаточно, чтобы все (и комплексные) корни функций (2.8) лежали в круге $|t|\leqslant 1$ (условие (А)·

Найдем, каким условиям должны для этого удовлетворять коэффициенты a_{ns}, или, что то же, найдем область в пространстве a_{ns}, для точек которой все корни функций (2.8) лежат в круге $|t|\leqslant 1$.

При непрерывном изменении чисел $\nu_1,\ldots,\nu_p$ появление у функций (2.8) корней вне круга $|t|\leqslant 1$ возможно либо за счет перехода ими через окружность $|t|=1$, либо за счет возникновения корней в точке $t=\infty$, что возможно лишь при обращении в нуль коэффициента при старшей степени t.

Отсюда следует, что при непрерывном переходе от $\nu_1,\ldots,\nu_p$ к $\nu_1',\ldots,\nu_p'$, при котором все время

$$a_{m_1}\nu_1+\ldots+\alpha_{m_p}\nu_p>\alpha_{s_1}\nu_1+\ldots+\alpha_{s_p}\nu_p \qquad (s=m-1,\ldots,1)$$

числа корней вне круга $|t|\leqslant 1$ у функций (2.8) измениться не могут.

Действительно, пусть π_0 область пространства коэффициентов a_{ns}, в которой функции (2.8) не имеют корней вне единичного круга. Область π_0 лежит вне множества N этого пространства, для точек которого по крайней мере одна из функций (2.8) имеет корень на единичной окружности, т. е. вне отображения p-мерного тора $(\xi_1,\ldots,\xi_p)$ в пространство коэффициентов $a_{nm},\ldots,a_{no}$ преобразованием

$$\sum a_{ns}\,\xi_1^{\alpha_{s_1}}\ldots\xi_p^{\alpha_{s_p}}=0$$

При непрерывном изменении $\nu_1,\ldots,\nu_p$ множество N не меняется; поэтому невозможно и изменение числа корней вне единичного круга у функций (2.8), соответствующих какой-нибудь точке области π_0, за счет перехода корней через единичную окружность. С другой стороны, в силу указанного ограничения на изменения $\nu_1,\ldots,\nu_p$ невозможно и возникновение корней из бесконечности.

Таким образом, отыскивая условия отсутствия корней вне круга $|t|\leqslant 1$ у функций (2.8) можно предполагать показатели при t соизмеримыми, т. е. считать эти функции полиномами от t. Неравенства, определяющие область π_0, можно теперь найти следующим путем.

В функциях (2.8), которые считаем полиномами от t, выполним замену

$$\xi_j=\frac{ix_j+1}{ix_j-1}\,,\qquad \xi=\frac{x+1}{x-1}$$

После преобразований придем к полиному от x вида

$$\sum A_k(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, x^k$$

коэффициенты которого суть полиномы от p действительных переменных $x_1, \ldots, x_p$.

Этот полином от x не должен иметь корней справа от мнимой оси ни при каких $x_1, \ldots, x_p$, т. е. при всех $x_1, \ldots, x_p$ должны выполняться неравенства

$$\Delta_2(x_1, x_2, \ldots x_p) > 0, \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \Delta_{2q}(x_1, \ldots, x_p) > 0$$

Нарушение этих неравенств возможно[39] лишь при нарушении неравенства $\Delta_{2q} > 0$; поэтому для их выполнения необходимо и достаточно, чтобы они выполнялись при $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ и при всех $x_1, \ldots, x_p$ выполнялось неравенство $\Delta_{2q} > 0$.

Для того чтобы полином Δ_{2q} был положителен при всех действительных $x_1, \ldots, x_p$, необходимо и достаточно, чтобы он был положителен при $x_1 = x_2 = \ldots = x_p$ и ни при каких $x_1, \ldots, x_{p-1}$, как полином от x_p, не имел действительных корней. Для этого необходимо и достаточно выполнение одного из условий вида

$$\Delta_2(x_1, \ldots, x_{p-1}) > 0, \ldots, \Delta_{2q_1}(x_1, \ldots, x_{p-1}) > 0$$

нарушение каждого из которых возможно лишь при нарушении одного и того же условия $\Delta_{2q_1} > 0$. Поэтому нужно лишь выполнение одного из них для $x_1 = \ldots = x_p = 0$ и выполнение условия $\Delta_{2q_1}(x_1, \ldots, x_{p-1}) > 0$ для всех $x_1, \ldots, x_{p-1}$.

Продолжая этот процесс еще $p-1$ раз, придем к искомым неравенствам для коэффициентов a_{ns}.

В частности, при $p = m$ в качестве базиса можно взять сами показатели $\tau_m, \tau_{m-1}, \ldots, \tau_1$. И поэтому искомое условие состоит в отсутствии при любых $\xi_1, \ldots, \xi_m$ на круге $|\xi| = 1$ у функций

$$\sum a_{ns}\, \xi_s\, t^{\tau_s} \tag{2.9}$$

корней вне круга $|t| \leqslant 1$.

Функции (2.9) можно заменить функциями вида

$$a_{nm}\, \xi_m\, t + a_{n,m-1}\, \xi_{m-1} + \ldots + a_{n0}$$

и поэтому нужно, чтобы при любых $\xi_1, \ldots, \xi_m$ на единичной окружности $|\xi| = 1$

$$|t| = \left| \frac{a_{n,m-1}\, \xi_{m-1} + \ldots + a_{n0}}{a_{nm}\, \xi_m} \right| \leqslant 1$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$|a_{n,m-1}| + \ldots + |a_{n0}| \leqslant |a_{nm}| \tag{2.10}$$

§ 3. Параметрическая грубость. Условия параметрической грубости для квазиполинома

Пусть $f(z; a_1, \ldots, a_n)$ целая функция z и непрерывная функция параметров $a_1, \ldots, a_n$.

Будем говорить, что она параметрически груба при $a_1 = a_1^\circ, \ldots a_n = a_n^\circ$ по отношению к параметрам $a_1, \ldots, a_n$, если при любых, но достаточно малых их изменениях у нее не меняется число корней с положительной действительной частью (см. [41]).

Полином $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, не имеющий чисто мнимых нулей, в том числе и корня $z = \infty$, параметрически груб по отношению к своим коэффициентам. Из предыдущего непосредственно имеем следующие леммы.

Лемма 5. Для грубости по коэффициентам квазиполинома (1.1) с конечным числом корней на правой полуплоскости необходимо и достаточно, чтобы в достаточно узкой полосе $|\operatorname{Re} z| < \delta$ он не имел корней.

Лемма 6. Квазиполином (1.1) с конечным числом корней на правой полуплоскости груб по показателям $\tau_1, \ldots, \tau_m$ и коэффициентам a_{ks} и не имеет чисто мнимых нулей, если его коэффициенты a_{ns} удовлетворяют условию

$$|a_{nm}| - |a_{n,m-1}| - \ldots - |a_{n0}| > 0 \tag{3.1}$$

Утверждение леммы 6 можно дополнить следующей.

Лемма 7. Квазиполином (1.1), не имеющий корней в полосе $|\operatorname{Re} z| < \delta$ для сколь угодно малого фиксированного $\delta > 0$, не меняет числа корней на правой полуплоскости при всех достаточно малых изменениях показателей $\tau_1, \ldots, \tau_m$, при которых сохраняются все имеющие место между ними линейные зависимости с целыми коэффициентами, т. е. он груб по отношению к базису показателей.

§ 4. D-разбиение пространства квазиполиномов

1. Придадим рассматриваемой нами проблеме геометрическую форму. Пространство параметров a_{ks}, τ_j (a_{ks} — комплексные числа, задаваемые с точностью до множителя, не равного нулю, и τ_j — действительные числа, причем $\tau_m > \tau_{m-1} > \ldots > \tau_1 > \tau_0 = 0$) квазиполинома (1.1) назовем пространством квазиполиномов и обозначим $R_{2n,m}$.

Пусть $D(s)$ множество квазиполиномов этого пространства, имеющих s корней с положительной действительной частью. Разбиение пространства $R_{2n,m}$ на множества $D(0)$, $D(1), \ldots, D(\infty)$ назовем D-разбиением. Аналогично определим D-разбиение пространства $\Phi_{2n}^{\tau_1, \ldots, \tau_m}$ коэффициентов квазиполинома (1.1) с фиксированными показателями.

Дальнейшая задача будет состоять в описании D-разбиения пространств $R_{2n,m}$ и Φ_{2n} квазиполиномов, в исследовании их плоских двумерных сечений и подпространств и в отыскании неравенств, определяющих каждое из множеств $D(s)$.

2. При непрерывном изменении параметров a_{ks}, τ_j число корней справа от мнимой оси квазиполинома (1.1) может измениться либо за счет перехода некоторых его корней через мнимую ось, либо за счет возникновения на правую полуплоскость из точки $z=\infty$ или исчезновения в существенно особой точке $z=\infty$ с правой полуплоскости некоторых его корней. Первая возможность может иметь место лишь при переходе через квазиполином, допускающий чисто мнимый корень; вторая, наверняка, не будет иметь места, если мы перемещаемся в пространстве $R_{2n,m}$ вне множества s_p квазиполиномов, имеющих хоть один корень в сколь угодно малой, но фиксированной правой полуокрестности $\operatorname{Re} z>0$, $|z|>p$ точки $z=\infty$, для чего достаточно, чтобы перемещение происходило вне множества

$$\Sigma=\lim_{p\to\infty} s_p'$$

где s_p' — замыкание множества s_p.

Если квазиполином f не принадлежит замкнутому множеству Σ, то он и некоторая его окрестность не принадлежат к некоторому s_p', т. е. квазиполином f и квазиполиномы некоторой его окрестности имеют конечное число корней на правой полуплоскости, и, следовательно, согласно теореме 3 коэффициенты f удовлетворяют условию (3.1), которое мы назовем условием грубости, а выделяемую неравенством (3.1) область назовем областью грубости. Интересно отметить, что в пространстве $R_{2n,m}$ есть целые области, заполненные всюду плотно негрубыми точками, принадлежащими множествам $D(s<\infty)$.

3. Пусть N множество квазиполиномов пространства $R_{2n,m}$, допускающих по крайней мере один чисто мнимый корень, т. е. множество квазиполиномов по крайней мере для одного действительного ω, удовлетворяющих условию

$$\sum a_{ks}(i\omega)^k e^{\tau_s \omega i}=0 \tag{4.1}$$

Назовем точку f пространства $R_{2n,m}$ предельной точкой множества N, если существует последовательность точек N, соответствующая последовательности неограниченно возрастающих ω, сходящаяся в точке f.

Найдем множество N_ω предельных точек N. Пусть N^* множество квазиполиномов $R_{2n,m}$, для которых квазиполином

$$a_{nm}e^{\tau_m z}+a_{n,m-1}e^{\tau_{m-1}z}+\ldots+a_{n0} \tag{4.2}$$

имеет по крайней мере один чисто мнимый корень, и пусть N_ω^* множество предельных точек N^*. Из леммы 3 получаем, что $N_\omega^*\equiv N_\omega$.

Для того чтобы квазиполином (4.2) имел чисто мнимый корень, необходимо выполнение неравенств

$$\begin{gathered}|a_{nm}|\leqslant|a_{n,m-1}|+\ldots+|a_{n0}|\\ |a_{n,m-1}|\leqslant|a_{nm}|+|a_{n,m-2}|+\ldots+|a_{n0}|\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ |a_{n0}|\leqslant|a_{nm}|+\ldots+|a_{n1}|\end{gathered} \tag{4.3}$$

Поэтому и для точек N_ω эти неравенства выполняются. С другой стороны, если эти неравенства выполнены, то соответствующий квазиполином принадлежит N_ω.

Действительно, пусть для квазиполинома (4.2) эти неравенства выполнены. Изменим его показатели τ_s сколь угодно мало и так, чтобы они после изменения не допускали линейных зависимостей с целыми коэффициентами.

Замыкание множества корней функции

$$a_{nm} t^{\tau_m} + a_{n,m-1} t^{\tau_{m-1}} + \ldots + a_{n0}$$

совпадающее с множеством корней функций

$$\xi_m t^{\tau_m} + \xi_{m-1} t^{\tau_{m-1}} + \ldots + \xi_1 t^{\tau_1} + a_{n0}$$

где

$$|\xi_m| = |a_{nm}|, \ |\xi_{m-1}| = |a_{n,m-1}|, \ldots, |\xi_1| = |a_{n1}|$$

содержит окружность $|t| = 1$, поскольку для этого достаточно возможности выполнения равенства

$$\xi_m + \xi_{m-1} + \ldots + \xi_1 + a_{n0} = 0$$

Следовательно, сколь угодно мало измененный квазиполином (4.2) имеет корни, сколь угодно близкие к мнимой оси. Теперь, сколь угодно мало меняя еще и его коэффициенты, придем к квазиполиному, имеющему сколь угодно большой чисто мнимый корень, что и требовалось.

4. Множество N_ω разбивает пространство $R_{2n,m}$ на $m+1$ гомоморфных евклидову пространству областей π_0, π, . . , π_m, одна из которых, пусть π_0, область грубости. D-разбиение любой строго вутренней части области грубости π_0 производится точками множества N, соответствующими квазиполиномам, имеющим корни только на некотором конечном отрезке мнимой оси.

Теперь непосредственно ясно, что в любой строго внутренней части области грубости π_0 содержится конечное число компонент различных областей D.

5. Фиксируем показатели τ_m, τ_{m-1}, . . . , τ_1 и рассмотрим D-разбиение проективного пространства Φ_{2n} квазиполиномов (1.1).

При непрерывном перемещении в пространстве Φ_{2n} переход из одного множества D в другое возможен либо при пересечении поверхности N, соответствующей квазиполиномам, допускающим чисто мнимый корень, либо при $a_{nm} = 0$, когда возможно возникновение корней, из точки $z = \infty$ на правую полуплоскость или исчезновение их с правой полуплоскости в точке $z = \infty$.

Множество предельных точек поверхности N представляет собой замыкание множества точек пространства Φ_{2n}, для которых квазиполином (4.2) допускает чисто мнимый корень.

Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ базис показателей $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Запишем квазиполином (4.2) в виде

$$a_{nm} t_1^{\alpha_{m1}} \ldots t_p^{\alpha_{mp}} + \ldots + a_{n0} \qquad (t_k = e^{\nu_k z}) \tag{4.4}$$

Замыкание множества функций (4.4), допускающих чисто мнимый корень, совпадает с множеством значений a_{ns}, удовлетворяющих для какой-нибудь системы точек $t_1, \ldots, t_p$ единичной окружности условию

$$a_{nm} t_1^{\alpha_{m1}} \ldots t_p^{\alpha_{mp}} + \ldots + a_{n0} = 0 \tag{4.5}$$

Таким образом, N_ω представляет собой отображение p-мерного тора $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ в пространстве Φ_{2n} преобразованием (4.5).

Точка (a_{ks}) может принадлежать границе множества N_ω, лишь если при произвольных $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_p$ определяемые из соотношения

$$\sum t_1^{\alpha_{s1}} \ldots t_p^{\alpha_{sp}} da_{ns} + \sum a_{ns} \alpha_{sh} t_1^{\alpha_{s1}} \ldots t_p^{\alpha_{sp}} a_{sk} d\varphi_k = 0$$

дифференциалы $da_{nm}, \ldots, da_{n0}$ не произвольны, т. е. лишь если выполняются условия

$$\arg \sum_s a_{ns} \alpha_{sk} t_1^{\alpha_{s1}} \ldots t_p^{\alpha_{sp}} d\varphi_k = \pm\psi \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

Таким образом, точки границы N_ω удовлетворяют для некоторых $t_1, \ldots, t_p$ на окружности $|t| = 1$ и ψ уравнениям

$$\sum a_{ns} t_1^{\alpha_{s1}} \ldots t_p^{\alpha_{sp}} = 0, \quad \arg \sum \alpha_{sk} a_{ns} t_1^{\alpha_{s1}} \ldots t_p^{\alpha_{sp}} = \pm\psi \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

Исключая из этих $2 + p$ соотношений $p + 1$ неизвестных $\arg t_1, \ldots, \arg t_p, \psi$, найдем явное уравнение алгебраической поверхности, часть которой дает границу N_ω.

Заметим, что N_ω зависит только от коэффициентов α_{sj}, точнее, от инвариантов матрицы $\|\alpha_{kj}\|$ по отношению к преобразованиям базиса.

Поверхность N_ω разбивает пространство Φ_{2n} на конечное число областей $\pi_0, \pi_1 \ldots$ Множествами $D(s < \infty)$ будут заполнены те из этих областей, для которых по крайней мере в одной точке выполнено условие (А).

Кроме областей π_j, удовлетворяющих условию (А) при $a_{nm} \neq 0$, только точки, граничные к ним, могут принадлежать $D(s < \infty)$.

Легко видеть, что если M граничная точка такой области π_j, то она принадлежит $D(s < \infty)$, если существует путь, идущий к точке M из области π_j и пересекающий поверхность N в конечном числе точек.

Действительно, в этом случае квазиполином, соответствующий точке M, является предельным для квазиполиномов, имеющих на правой полуплоскости не более $s < \infty$ корней, и, следовательно, и сам по известной лемме Гурвица имеет на правой полуплоскости не более s корней. Ниже будет показано, что имеет место и обратное утверждение, т. е. точка границы π_j принадлежит $D(s < \infty)$, лишь если существует путь, идущий к этой точке из π_j и пересекающий N в конечном числе точек.

§ 5. D-разбиение w-плоскости квазиполиномов

Целью настоящего параграфа является рассмотрение D-разбиения w-плоскости квазиполиномов $f + wg$, где f и g — фиксированные квазиполиномы, а w — параметр, пробегающий все комплексные значения.

Рассмотрим сначала D-разбиение w-плоскости целых функций $f + wg$, где f и g — произвольные фиксированные целые функции. Целые функции этой плоскости, имеющие по крайней мере один чисто мнимый корень, образуют кривую N, представляющую отображение мнимой оси плоскости z на w-плоскость преобразованием

$$w = w(z) = -f(z)\, g^{-1}(z) \tag{5.1}$$

Пусть N_ω множество предельных точек кривой N (точка w_0 предельная для N, если существует стремящаяся к точке $z = \infty$ последовательность точек мнимой оси, для которых соответствующие точки w стремятся к точке w_0). Очевидно, что N_ω состоит не более чем из двух компонент и разбивает w-плоскость (сферу) на области $\pi_0, \pi_1, \ldots,$ среди которых не более одной двусвязной, а остальные односвязные.

Пусть M_ε множество точек, отстоящих от точек N_ω не более чем на ε. Если N_ω состоит более чем из двух компонент, то и M_ε при достаточно малом положительном ε состоит не менее чем из трех компонент, и тогда существует последовательность точек мнимой оси $i\omega_1, i\omega_2, \ldots,$ стремящихся к точке $z = \infty$, и такие две компоненты M_ε, для которых соответствующие $w_1, w_2, \ldots$ принадлежат поочередно то одной то другой из этих двух компонент. На каждой из частей кривой N, отвечающей отрезкам мнимой оси $(i\omega_k, i\omega_{k+1})$, есть точка w_k', лежащая вне M_ε. Но точки последовательности $w_1', w_2', \ldots$ имеют по крайней мере одну предельную, и она не принадлежит N_ω, т. е. получается противоречие.

Далее, пусть π_1 и π_2 две не менее чем двусвязные области и γ_1 и γ_2 контуры в областях π_1 и π_2 соответственно, не стягиваемые в них в точку.

Контуры γ_1 и γ_2 разбивают w-сферу на три области, в каждой из которых содержится по крайней мере по одной компоненте N_ω, что по только что доказанному невозможно.

При непрерывном изменении w переход из одного множества D в другое возможен либо через пересечение кривой N, либо через появление или исчезновение корня в точке $z = \infty$. Возникновение корня из точки $z = \infty$ на правую полуплоскость или исчезновение его с правой полуплоскости в точке $z = \infty$ может иметь место не более чем для одной точки плоскости w, либо в противном случае вся плоскость w, за исключением не более двух точек, принадлежит множеству $D(\infty)$. Действительно, если таких точек две, то существует на правой полуплоскости плоскости z два пути γ_1 и γ_2, идущих к точке $z = \infty$, вдоль которых мероморфная функция $w(z) = -f(z)\, g^{-1}(z)$ стремится к двум различным пределам, и тогда согласно теореме Иверсена $w(z)$ в угле между кривыми γ_1 и γ_2 принимает бесчисленное число раз все значения, кроме не более двух. Эти значения w, при которых возможно возникновение корня на правую полуплоскость или исчезновение корня с правой полуплоскости, или, что то же, значения, к которым может стремиться мероморфная функция $w(z)$ при стремлении z по некоторому пути на правой полуплоскости к точке $z=\infty$, будем обозначать w_∞.

Пусть s_p отображение правой полуокрестности $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| < p$ точки $z=\infty$ на плоскость w преобразованием (5.1). При этом s_p связное открытое множество и $\lim s_p \equiv D(\infty)$, когда $p \to \infty$. Пусть еще s_p' замыкание s_p и $\lim s_p' = T_\infty$ при $p \to \infty$. При этом T_∞ — связное замкнутое множество и $T_\infty \supset D(\infty) + N_\omega$.

Легко видеть, что[1]

$$T_\infty - D(\infty) - N_\omega = \Sigma w_\infty \tag{5.2}$$

Действительно, пусть точка w принадлежит T_∞ и не принадлежит $D(\infty) + N_\omega$ и пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ корни $f + wg$, лежащие на правой полуплоскости или мнимой оси. Существует настолько малое $\varepsilon > 0$, что для всех изменений w, меньших ε, изменения корней $z_1, \ldots, z_n$ менее сколь угодно малого фиксированного $\delta > 0$, что ε-окрестность точки w лежит вне множества $\varepsilon(N_\omega)$ точек плоскости w, отстоящих от N_ω менее чем на ε, и такое, что при непрерывных перемещениях в ε-окрестности точки w в окрестности $|z| > p$, где $p > \max |z_k| + \delta$, не происходит переходов через мнимую ось. Если w не принадлежит Σw_∞, то ко всему сказанному выше можно еще выбрать ε настолько малым, чтобы в ε-окрестности точки w не было точек множества Σw_∞.

Из этого следует, что $\varepsilon/2$-окрестность точки w лежит целиком вне множества s_p', а потому и T_∞, что противоречит предположению. Отсюда следует теорема.

Теорема 1. 1. Множество N_ω замкнуто непусто и состоит не более чем из двух компонент, разбивающих w-плоскость на области $\pi_0, \pi_1, \ldots,$ среди которых не более одной двусвязной, а остальные односвязные.

2. Если множество $\Sigma D(s)$ $(s < \infty)$ содержит более двух точек, то Σw_∞ состоит не более чем из одной точки.

3. Множество T_∞ связно, замкнуто, непусто и

$$T_\infty = D(\infty) + N_\omega + \overline{\Sigma w_\infty} \tag{5.3}$$

---

[1] Не предполагая множество Σw_∞ конечным, (5.2) следует написать в виде

$$T_\infty - D(\infty) - N_\infty \subset \Sigma w_\infty$$

где $\overline{\Sigma w_\infty}$ означает замыкание Σw_∞.

Даже для простейшего случая $f + w$ множество асимптотических значений Σw_∞ может быть бесконечным или совпадать со всей плоскостью w. Правда, для этого требуется, чтобы целая функция f была бесконечного порядка. Если же f конечного порядка ρ, то асимметрических значений не более 2ρ.

4. Если π_k содержит более двух точек, принадлежащих множествам $D(s<\infty)$, то $\pi_k \subset \Sigma D(s<\infty)$ и в π_k нет точек множества Σw_∞.

Последнее утверждение непосредственно следует из связности множества T_∞ и существования в этом случае не более одной точки w_∞.

Рассмотрим теперь D-разбиение областей π_k, заполненных множествами $D(s<\infty)$. Очевидно, что всякая строго внутренняя часть π_k разбивается кривой N на конечное число односвязных областей и любые ее две точки можно соединить путем, пересекающим кривую N в конечном числе точек. Направление пробегания кривой N

$$w = -\frac{f(i\omega)}{g(i\omega)} \tag{5.4}$$

соответствующее изменению ω от $-\infty$ до $+\infty$, примем за положительное. Чтобы дальнейшее не вызывало неясностей, будем временно мыслить кривую N на римановой поверхности функции $w(z)$, расположенной над плоскостью w.

Пусть над точкой w плоскости w лежат точки $w_1, w_2, \ldots,$ римановой поверхности, из которых конечное число $w_1, \ldots, w_n$ лежат на кривой N. Пусть еще точки $w_1, \ldots, w_n$ римановой поверхности простые, так что точке w соответствует равно n точек на мнимой оси плоскости z.

Если при непрерывном переходе через кривую N из точек $w_1, w_2, \ldots, w_n$ для k из них кривая N будет пересекаться с левой стороны, а для $n-k$ из них, наоборот, с правой стороны, то при этом с левой полуплоскости z на правую переходит $k-n+k$ корней.

Правило штриховки. Будем, пробегая кривую N на плоскости w соответственно изменению ω от $-\infty$ до $+\infty$, штриховать ее слева. При этом в некоторых местах кривая N может оказаться заштрихованной несколько раз. Если кривая N на некотором участке заштрихована с разных сторон, то будем считать штриховки попарно с разных сторон уничтожающимися. При переходе через кривую N со стороны k-кратной штриховки мы переходим из области $D(s)$ в область $D(s+k)$.

Таким образом, для построения D-разбиения любой из областей π_j, заполненной множествами $D(s<\infty)$, достаточно:

1) построить и заштриховать кривую N;

2) знать, к какой области D или к какого типа границе принадлежит какая-нибудь точка π_j.

Заметим, что для построения D-разбиения любой внутренней части области π_j нужно строить кривую N лишь для некоторого конечного интервала значений ω.

Рассмотрим теперь D-разбиение w-плоскости квазиполиномов:

$$\sum_{k,\,s=0}^{n,\,m} a_{ks} z^k e^{\tau_s z} + w \sum_{k,\,s=0}^{n,\,m} b_{ks} z^k e^{\tau_s z} = A(z, t) + wB(z, t)$$

1. Параметрическое уравнение кривой N будет

$$w = -\frac{\Sigma a_{ks} (i\omega)^k e^{\tau_s \omega i}}{\Sigma b_{ks} (i\omega)^k e^{\tau_s \omega i}} \tag{5.5}$$

2. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ базис показателей $\tau_1, \ldots, \tau_m$ и $\tau_s = \Sigma\alpha_{sj}\nu_j$. Множество предельных точек N_ω представляет собой множество значений, принимаемых рациональной функцией

$$w = -\frac{\Sigma a_{ns}\xi_1^{\alpha_{s1}}\ldots\xi_p^{\alpha_{sp}}}{\Sigma b_{ns}\xi_1^{\alpha_{s1}}\ldots\xi_p^{\alpha_{sp}}} \tag{5.6}$$

когда $\xi_1, \ldots, \xi_p$ принимают независимо друг от друга всевозможные значения с модулями, равными единице. В частности, если $p = 1$, то N_ω уникурсальная алгебраическая кривая; если $p = m$, то N_ω множество точек w-плоскости, удовлетворяющих неравенствам

$$|a_{nj} + wb_{nj}| \leqslant |a_{nm} + wb_{nm}| + \ldots + |a_{nj+1} + wb_{nj+1}| + \tag{5.7}$$

$$+ |a_{nj-1} + wb_{nj-1}| + \ldots + |a_{n0} + wb_{n0}| \qquad (j = m, m-1, \ldots, 0)$$

3. Точкой w_∞ может быть лишь точка $w = -a_{nm}/b_{nm}$.

4. Кривая N_ω разбивает w-плоскость на конечное число областей $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_q$. При $p = 1$ кривая N_ω есть граница разбиения w-плоскости полиномов $A(\infty, t) + wB(\infty, t)$ на области с разным числом корней в круге $|t| \leqslant 1$. Лишь области π_j, соответствующие полиномам с m корнями в круге $|t| \leqslant 1$, заполнены множествами $D(s < \infty)$.

При $p = m$ области π_j, заполненные множествами $D(s < \infty)$, находятся из неравенства

$$|a_{nm} + wb_{nm}| > |a_{n,m-1} + wb_{n,m-1}| + \ldots + |a_{n0} + wb_{n0}| \tag{5.8}$$

Пример 1. Рассмотрим D-разбиение w-плоскости квазиполиномов

$$A(z) + wB(z)e^{\tau z} \tag{5.9}$$

где A и B — полиномы от z.

Кривая N имеет параметрическое уравнение

$$w = -\frac{A(i\omega)}{B(i\omega)}e^{-\tau\omega i}$$

и может быть получена из кривой

$$w_0 = -\frac{A(i\omega)}{B(i\omega)}$$

путем замены каждой ее точки (ρ, φ) точкой $(\rho, \varphi - \tau\omega)$.

Кривая N_ω представляет собой окружность с центром в точке $w = 0$ и радиусом

$$R = \left|\frac{A(\infty)}{B(\infty)}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$$

Внутренность этой окружности, кроме точки $w_\infty = 0$, принадлежит $D(\infty)$, внешность заполнена множествами $D(s < \infty)$.

В качестве точки w-плоскости с известным числом корней справа от мнимой оси можно взять точку $w = \infty$, соответствующую квазиполиному $B(z)e^{\tau z}$, имеющему столько же корней справа от мнимой оси, сколько и полином $B(z)$. Заметим, что D-разбиение w-плоскости полиномов $A+wB$ переходит непрерывно в D-разбиение w-плоскости квазиполиномов (5.9) при непрерывном изменении показателя τ от 0 только в области $|z|>R$.

Пример 2. D-разбиение w-плоскости действительных квазиполиномов

$$A(z)\,\mathrm{sh}\,\tau z + wB(z)\,\mathrm{ch}\,\tau z$$

Параметрическое уравнение кривой N имеет вид

$$w = -\frac{A(i\omega)}{B(i\omega)}\,i\,\mathrm{tg}\,\tau\omega$$

поэтому кривая N может быть получена из кривой

$$w_0 = -i\frac{A(i\omega)}{B(i\omega)}$$

заменой каждой ее точки (ρ, φ) точкой $(\rho\,\mathrm{tg}\,\tau\omega, \varphi)$. При этом N_ω мнимая ось. Кривая N вообще при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ сматывается и затем вновь наматывается на мнимую ось (большой круг на сфере Римана), бесконечное число раз пересекая ее в точках $w=0$ и $w=\infty$. Полуплоскость, определяемая неравенством

$$\left|\frac{A(\infty)+wB(\infty)}{A(\infty)-wB(\infty)}\right|>1 \tag{5.10}$$

соответствует квазиполиномам с конечным числом корней справа от мнимой оси. В качестве точек, соответствующих квазиполиномам с известным числом корней справа от мнимой оси, можно брать точки $w=0$ и $w=\infty$, изображающие квазиполиномы $A(z)\,\mathrm{sh}\,\tau z$ и $B(z)\,\mathrm{ch}\,\tau z$, имеющие бесконечное число чисто мнимых корней. Однако при смещении на полуплоскость, определяемую неравенством (5.10), только конечное число из них сместится на правую полуплоскость, именно, столько, против скольких штриховок кривой N мы при этом идем.

Пример 3. Хотя общие рассмотрения D-разбиения были проделаны нами в предположении линейности вхождения параметра w, однако совершенно ясно, что ничто не мешает рассмотреть, например, D-разбиение w-плоскости квазиполиномов

$$w^m A_m(z)\,e^{\tau mz} + w^{m-1}A_{m-1}(z)\,e^{\tau(m-1)z} + \ldots + A_0(z)$$

Пусть $w_{01}(z), w_{02}(z), \ldots, w_{0m}(z)$ корни полинома

$$A_m w^m + A_{m-1}w^{m-1} + \ldots + A_0$$

Тогда уравнение граничной кривой N можно представить в виде

$$w_1 = w_{01}(i\omega)\,e^{-\tau\omega i}, \ldots, w_m = w_{0m}(i\omega)\,e^{-\tau\omega i}$$

При этом N_ω состоит из m концентрических окружностей с центром в точке $w=0$ и радиусами $|w_{01}(\infty)|, \ldots |w_{0m}(\infty)|$.

Область π_0, соответствующая квазиполиномам с конечным числом корней на правой полуплоскости,— часть плоскости w, внешняя ко отношению к предельной окружности самого большого радиуса R. Точка $w = \infty$ соответствует квазиполиному $A_m(z)\,e^{\tau mz}$, имеющему столько же корней справа от мнимой оси, сколько и полином $A_m(z)$. При $m=1$ приходим к D-разбиению примера 1. Заметим, что точки границы области π_0 принадлежат множествам $D(s<\infty)$ тогда и только тогда, когда кривая N наматывается на нее и сматывается с нее изнутри или в частном случае на нее налагается, т. е. только тогда, когда

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} |w_{0s}(i\omega)| \leqslant R \qquad (s=1, 2, \ldots, m)$$

где в случае равенства приближение происходит не справа. Это повторяет утверждение теоремы 2 § 2.

§ 6. D-разбиение $\nu\mu$-плоскости квазиполиномов

Квазиполиномы $\nu\mu$-плоскости[1]

$$\nu \sum a_{ks} z^k e^{\tau_s z} + \mu \sum b_{ks} z^k e^{\tau_s z} + \sum c_{ks} z^k e^{\tau_s z} = \nu A + \mu B + C \tag{6.1}$$

допускающие чисто мнимый корень, удовлетворяют для некоторого действительного ω уравнениям

$$\nu A(i\omega) + \mu B(i\omega) + C(i\omega) = 0$$

или, разделяя мнимую и действительную части, уравнениям

$$\nu A_1(\omega) + \mu B_1(\omega) + C_1(\omega) = 0, \qquad \nu A_2(\omega) + \mu B_2(\omega) + C_2(\omega) = 0 \tag{6.2}$$

Отсюда следует, что N состоит из кривой N'

$$\nu = -\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^{-1}, \qquad \mu = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^{-1}$$

и прямых

$$\{\nu A(i\omega) + \mu B(i\omega) + C(i\omega)\}_{\omega=\omega_k} = 0$$

соответствующих особым значениям ω, для которых уравнения (6.2) сводятся к одному.

При этом N_ω согласно предыдущему представляет собой отображение p-мерного тора $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ на плоскость ν, μ преобразованием

$$\nu \sum a_{ns} \xi_1^{\alpha_{s1}} \ldots \xi_p^{\alpha_{sp}} + \mu \sum b_{ns} \xi_1^{\alpha_{s1}} \ldots \xi_p^{\alpha_{sp}} + \sum C_{ns} \xi_1^{\alpha_{s1}} \ldots \xi_p^{\alpha_{sp}} = 0$$

Возникновение корней на правой полуплоскости из точки $z = \infty$ или их исчезновение с правой полуплоскости в этой точке возможно лишь при $\nu a_{nm} + \mu b_{nm} + c_{nm} = 0$.

[1] Если желательно изобразить совокупность квазиполиномов (6.1) так, чтобы нашлось место и квазиполиномам для бесконечных значений ν и μ, то следует прибегнуть к полусфере Пуанкаре и в частном случае, когда $A = (\alpha + i\beta)\,B$ $(\beta \neq 0)$, к сфере. В последнем случае два действительных параметра ν и μ могут быть заменены одним комплексным $w = \nu + (\alpha + i\beta)\,\mu$, что приводит к случаю § 1.

Будем штриховать один, два, ... или ни одного раза ту из сторон кривой N' или особых прямых так, чтобы при непрерывном переходе с штрихованной стороны на нештрихованную с левой полуплоскости на правую через мнимую ось переходил один, два, ... или ни одного корня квазиполинома (6.1).

Если для некоторой точки N', отвечающей $z = i\omega$, определитель Δ системы (6.2) положителен[1], то следует штриховать левую сторону кривой N', и если $\Delta < 0$, то следует штриховать правую ее сторону; это непосредственно вытекает из рассмотрения отображения окрестности точки $z = i\omega$ на окрестность рассматриваемой точки кривой N' преобразованием $\nu A(z) + \mu B(z) + C(z) = 0$. (Положительное направление пробегания кривой N' выбирается, как и ранее, соответственно возрастанию ω от $-\infty$ до $+\infty$.)

Отсюда, в частности, следует, что штриховка кривой N' меняется при переходе через бесконечно удлиненную прямую и может еще меняться только при переходе через особые значения ω.

Пусть ω^* особое значение ω и M_{ω^*} соответствующая ему особая прямая. Эта прямая проходит через точку ν^*, μ^* кривой N', соответствующую $\omega = \omega^*$. Штриховка особой прямой M_{ω^*} может меняться только в точке ν^*, μ^*. Это непосредственно следует из того, что при обходе любого замкнутого контура L число корней на правой полуплоскости остается неизменным, и того, что малой окрестности точки ν^*, μ^* соответствует на плоскости бесконечное число окрестностей, которые на сфере Римана могут быть сделаны все сколь угодно малыми, т. е. отрезок, получаемый из прямой M_{ω^*} выбрасыванием точки ν^*, μ^*, рассматривая его на полусфере Пуанкаре, штрихуется с одной «стороны» и весь с одной и той же кратностью. Естественно, что по разные стороны от точки ν^*, μ^* эта прямая заштрихована с разных сторон. Теперь, рассматривая малый круговой обход вокруг точки ν^*, μ^*, находим правило штриховки особых прямых.

Если кривая N' пересекает в точке ν^*, μ^* особую прямую M_{ω^*} и меняет в ней штриховку, то особая прямая штрихуется столько же раз, сколько и кривая N' вблизи точки ν^*, μ^*, и так, чтобы штриховки прямой M_{ω^*} и кривой N' в окрестности точки ν^*, μ^* были обращены друг к другу. Если же кривая N' в точке ν^*, μ^* не меняет штриховки, то M_{ω^*} не штрихуется.

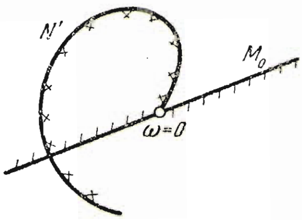
Заметим еще, что наличие особых прямых можно рассматривать как вырожденный случай, соответствующий распадению кривой N. Однако такое вырождение неизбежно, если мы рассматриваем, напри-

[1] В более общем случае, когда, допустим, коэффициенты квазиполинома F — дважды непрерывно дифференцируемые функции параметров ν, μ, роль Δ будет играть якобиан

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{Re}\dfrac{\partial F}{\partial \nu} & \operatorname{Im}\dfrac{\partial F}{\partial \nu} \\ \operatorname{Re}\dfrac{\partial F}{\partial \mu} & \operatorname{Im}\dfrac{\partial F}{\partial \mu} \end{vmatrix}$$

мер, $\nu\mu$-плоскость действительных квазиполиномов, поскольку поверхность N в пространстве действительных квазиполиномов распадается на сдвоенную поверхность N', соответствующую наличию пары чисто мнимых сопряженных корней, и гиперплоскость, соответствующую наличию нулевого корня.

В общем случае D-разбиения $\nu\mu$-плоскости действительных квазиполиномов «граница» состоит из сдвоенной, двукратно заштрихованной кривой N' и особой прямой M_0, соответствующей особому значению $\omega = 0$ и заштрихованной однократно, как показано на фиг. 1. Кривая N' в этом случае при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ пробегается дважды во встречных направлениях и так, что значениям $-\omega$ и $+\omega$ соответствует одна и та же точка кривой N', причем $\Delta(-\omega) = -\Delta(\omega)$. Поэтому кривая N' оказывается заштрихованной двукратно.



Фиг. 1

В заключение рассмотрим некоторые приеры частных D-разбиений по нелинейно входящим параметрам.

Пример 1. D-разбиение τ, ν-плоскости[1] квазиполиномов

$$A(z) + \nu B(z) e^{\tau z} \tag{6.3}$$

где A и B — действительные полиномы от z.

Полагая $z = i\omega$ и приравнивая квазиполином (5.13) нулю, найдем что N состоит из серии кривых ($k = 0, \pm 1, \ldots$)

$$\tau = \frac{1}{\omega}\left\{\arg\frac{A(i\omega)}{B(i\omega)} + 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right\}, \qquad \nu = \pm \mid A(i\omega) B^{-1}(i\omega) \mid$$

и особой прямой $A(0) + \nu B(0) = 0$. При этом N_ω представляет пару прямых $\nu = \pm \mid A(\infty) B^{-1}(\infty) \mid$. Условию (5.8) удовлетворяют точки, лежащие вне полосы $\mid \nu \mid \leqslant \mid A(\infty) B^{-1}(\infty) \mid$. Точке $\tau = 0$, ν соответствует полином $A(z) + \nu B(z)$. Якобиан системы будет $\Delta = -\nu\omega \mid B \mid^2$.

Пример 2. D-разбиение $\tau\nu$-плоскости квазиполиномов

$$A(z)\,\mathrm{sh}\,\tau z + \nu B(z)\,\mathrm{ch}\,\tau z \tag{6.4}$$

Кривая N состоит из точек $\tau\nu$-плоскости, удовлетворяющих для какого-нибудь действительного ω условию

$$A(i\omega)\, i \sin \tau\omega + \nu B(i\omega) \cos \tau\omega = 0$$

из которого следует, что N состоит из бесконечно кратной прямой $\nu = 0$ и серии кривых $\nu = \nu_k \,\mathrm{tg}\, \tau\omega_k$, где ω_k — положительные корни уравнения

$$\mathrm{Im}\, i \frac{A(i\omega)}{B(i\omega)} = 0 \quad \text{и} \quad \nu_k = -i\frac{A(i\omega_k)}{B(i\omega_k)}$$

[1] Замена τz на z позволяет рассматриваемую совокупность квазиполиномов представить в виде

$$A\left(\frac{z}{\tau}\right) + \nu B\left(\frac{z}{\tau}\right) e^{z}$$

Общее правило штриховки здесь неприменимо, поскольку N состоит из одних особых кривых. Найти правило штриховки в этом вырожденном случае можно, например, рассматривая прямые $\tau = \mathrm{const}$ как линии пересечения рассматриваемой плоскости с уже рассмотренной w-плоскостью $A(z)\,\mathrm{sh}\,\tau z + wB(z)\,\mathrm{ch}\,\tau z$. Именно, примем направление, в котором пробегается кривая $\nu = \nu_k \,\mathrm{tg}\,\tau\omega_k$ при возрастании τ, за положительное; тогда эту кривую, отвечающую особому значению $\omega = \omega_k$, следует по выходе из начала штриховать двукратно слева (справа), если вспомогательная кривая $w = iA(i\omega)B^{-1}(i\omega)$ при $\omega = \omega_k$ пересекает действительную ось снизу (сверху), и затем после каждого перехода через бесконечность и прямую $\nu = 0$ штриховку нужно менять. Осталось заметить, что точки прямой $\tau = 0$ соответствуют полиному $B(z)$.

§ 7. Детерминантный критерий для квазиполиномов

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о применимости к целым функциям детерминантных критериев, аналогичных критериям Рауза и Эрмита-Гурвица для полиномов. Получаемые результаты представляют собой развитие иным методом соответствующих результатов Громмера и Крейна.

Условимся обозначать целую функцию $F = f(-iz) + ig(iz)$, где $f(\omega) = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots$ и $g(\omega) = b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots$ действительные целые функции, одним из следующих символов

$$F = \{f \parallel g\} = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \end{Bmatrix} \tag{7.1}$$

Назовем τ-переходом переход от целой функции $\{f \parallel g\}$ к функции

$$\begin{Bmatrix} \tau_{11}f + \tau_{12}g \\ \tau_{21}f + \tau_{22}g \end{Bmatrix} \tag{7.2}$$

и назовем λ-переходом (однократным) переход от целой функции

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{j-1} & a_j & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_j & \dots \end{Bmatrix}$$

к функции

$$\begin{Bmatrix} f + \lambda\omega^{-t} g \\ g \end{Bmatrix} \qquad (t \leqslant j) \tag{7.3}$$

Будем говорить, что к функции $\{f \parallel g\}$ применим τ-переход, или λ-переход, если при $\Delta = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21} > 0$ или соответственно при $t < j$ и любом действительном λ или $t = j$ и λ таком, что отрезок $[0, \lambda]$ не содержит точки $-a_0 b_j^{-1}$, τ или соответственно λ-переход не меняет числа ее корней, лежащих справа от мнимой оси. К полиномам τ- и λ-переходы применимы [42].

Символ (7.2) с точностью до числового множителя изображает функцию

$$f(-iz) + \frac{\tau_{12} + i\tau_{22}}{\tau_{11} + i\tau_{21}}\, g(-iz)$$

Полагая $(\tau_{12}+i\tau_{22})(\tau_{11}+i\tau_{21})^{-1}=w$, мы сведем рассмотрение D-разбиения пространства (τ_{11}, τ_{12}, τ_{21}, и τ_{22}) функций (7.2) к рассмотрению D-разбиения w-плоскости $f+wg$, причем условию $\Delta>0$ соответствует условие $\operatorname{Im} w>0$. Поэтому применимость τ-перехода означает, что полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ принадлежит одному и тому же множеству D.

Используя результаты § 5 и замечая, что кривая N, а следовательно, и N_ω целиком лежат на действительной оси плоскости w, приходим к альтернативе:

либо $E(\operatorname{Im} w>0)s_\infty=0$ или $E(\operatorname{Im} w>0)\subset s_\infty$ и τ-переход применим,

либо $E(\operatorname{Im} w>0)$, за исключением не более двух точек, принадлежит s_∞ и τ-переход не применим[1].

Символ (7.3) обозначает функцию $f(-iz)+ig(-iz)+\lambda(-iz)^t g(-iz)$. Поэтому вопрос о применимости λ-перехода приводится к рассмотрению D-разбиения λ-плоскости $f(-iz)+ig(-iz)+\lambda(-iz)^t g(-iz)$.

Здесь N_ω состоит из одной точки $\lambda=\infty$ и кривая N пересекает действительную ось только в одной точке $\lambda=-a_0 b_j^{-1}$, Поэтому приходим к альтернативе:

либо $E(\operatorname{Im} w<0)s_\infty=0$ или $E(\operatorname{Im} w>0)\subset s_\infty$ и λ-переход применим,

либо $E(\operatorname{Im} w>0)$, за исключением не более двух точек, принадлежит s_∞ и тогда λ-переход применим или вообще не применим в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит точка i множеству s_∞.

От функции F, пользуясь τ-переходом, перейдем к функции

$$F_1=\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots \end{Bmatrix} \tag{7.4}$$

у которой $b_0=0$.

Вообще, если b_j первый в ряде $b_1, b_2\dots$ отличный от нуля коэффициент, то от функций

$$F_1=\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 \dots a_j \dots \\ 0 & 0 \dots b_j \dots \end{Bmatrix}$$

многократным последовательным применением λ-перехода можно перейти к функции

$$\begin{Bmatrix} a_0+\lambda_0 b_j & a_1+\lambda_0 b_{j+1}+\lambda_1 b_j, \dots a_{j-1}+\lambda_0 b_{2j-1}+\dots+\lambda_{j-1} b_j & a_j\dots \\ 0 & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & b_j\dots \end{Bmatrix}.$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}$ находятся из уравнений

$$a_0+\lambda_0 b_j=a_1+\lambda_0 b_{j+1}+\lambda_1 b_j=\dots=a_{j-1}+\lambda_0 b_{2j-1}+\dots+\lambda_{j-1} b_j=0 \tag{7.6}$$

Тем самым определен переход от целой функции F к функции вида $z^j F_j$. При этом переходе с левой и правой полуплоскостей возникает j нулевых корней, именно, при j четном с каждой из полуплоскостей отродится по $j/2$ корней и при j нечетном, равном $2m+1$,

[1] Функции, удовлетворяющие условию $E(\operatorname{Im} w>0)s_\infty=0$, совпадает с B-функциями, выделенными Н. Мейманом [13–15]. Им же установлена применимость τ-перехода к B-функциями.

с правой полуплоскости отродится m и левой $m+1$, если $a_0 b_j < 0$, и если $a_0 b_j > 0$, то, наоборот, с правой $m+1$ и левой m.

Рассмотрим теперь последовательность переходов

$$F \to F_{j_1} \to F_{j_2} \to \ldots$$

Эта последовательность может оборваться, лишь если в результате некоторого перехода получится функция F_{j_k}, у которой все коэффициенты $b_j = 0$, т. е. функция вида $f(-iz)$, где f — действительная целая функция. В этом случае первоначальная функция F была вида $P(z) f(-iz)$, где $P(z)$ — полином.

Назовем бесконечную матрицу.

$$\begin{array}{r|cc|cc|ccc|l}
B_2 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\hline
A_e = B_4 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_2 \\
 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\hline
 & \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
B_6 & \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_4
\end{array} \qquad (1.7)$$

матрицей функции $F = \{a_0 \; a_1, \ldots \| b_0, \; b_1, \ldots\}$.

Нетрудно видеть, что при τ-переходе знаки определителей $B_2, B_4, \ldots$, определенных непосредственно в матрице (7.7), не меняются. Далее можно показать, что при переходе от функции F к функции F_{j_1} с правой полуплоскости при $j_1 = 2m$ возникает m корней и при $j_1 = 2m+1$ возникает m или $m+1$ корней в зависимости [42] от знака определителя B_{2j_1}, при этом знаки B_{2j} для функции F_{j_1} такие же, как у величин B_{2j_1+2j} / B_{2j_1}. Таким образом, становится ясным, что при переходе от F к F_{j_n} возникает с правой полуплоскости столько же корней, сколько перемен знака в ряде определителей $1, -B_2, B_4, \ldots (-1)^{j_n} B_{2j_n}$

Пусть p число перемен знака в бесконечном ряде определителей Эрмита-Гурвица

$$1, -B_2, \quad B_4, \ldots \qquad (7.8)$$

целой функции $F = \{f \| g\}$ и s' число ее корней, лежащих справа от мнимой оси и отличных от общих корней f и g. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если p конечно, то $s' = p$, причем τ-переход и λ-переход применимы и множество $E(\operatorname{Im} w < 0) \subset s_\infty$ пусто. Если $p = \infty$, то либо $E(\operatorname{Im} w < 0) \subset s_\infty$ и $s' = p$, причем τ- и λ-переходы применимы, либо множество $E(\operatorname{Im} w < 0)$ принадлежит s_∞, за исключением не более двух точек, и если $i \subset s_\infty$, то $s' = p$, а если i не принадлежит s_∞, то $s' < p = \infty$.

При $p = 0$ согласно результатам Громмера и Крейна $s' = 0$.

Применение τ-перехода не меняет числа p, а следовательно, и s'. Поэтому τ-переход, а следовательно, и λ-переход применимы и $E(\operatorname{Im} w < 0) s_\infty = 0$.

При $p < \infty$ после конечного числа переходов приходим к функции F_{j_n}, для которой $p = 0$. Поэтому $s' = 0$ для F_{j_n} и для нее, а следовательно, и всех F_{j_k} имеет место $E(\operatorname{Im} w < 0)s_\infty = 0$ и, следовательно, к функциям F_{j_k} применим τ- и λ-переходы.

Отсюда заключаем, что число s' для функции F равно числу перемен знака в ряде (7.8). Утверждение теоремы при $p=\infty$ непосредственно следует из альтернативы предыдущего пункта.

Пусть к функции $F = f(-iz) + ig(-iz)$ применим τ-переход. Рассмотрение поведения корней функции $\{f \parallel \lambda g\}$ при непрерывном уменьшении λ от 1 до 0 тотчас приводит к утверждению: число корней F, лежащих справа от мнимой оси, равно сумме половины числа комплексных корней функции $f(\omega)$ и числа чисто мнимых корней функции $f(-iz)$, смещаемых на правую полуплоскость достаточно малой аддитивной добавкой $\lambda ig(-iz)$. Поэтому имеет место теорема.

Теорема 2. Если число p перемен знака в ряде определителей Эрмита-Гурвица функции $\{f \parallel -f'\}$ конечно, то число комплексных корней $f(z)$ без учета их кратностей равно $2p$.

Следствие. Если число перемен знака в ряде (7.8) функции $\{f \parallel g\}$ равно $p < \infty$ и в ряде (7.8) функции $\{f \parallel -f'\}$ нет перемен знака, то функция $\{f \parallel g\}$ имеет ровно p корней с положительной действительной частью.

Заметим, что τ-переход переводит квазиполином в квазиполином же. Неприменимость τ-перехода (следует мыслить его как непрерывный переход) может произойти лишь из-за возникновения корней из существенно особой точки на правую полуплоскость или исчезновения их в этой точке с правой полуплоскости, что возможно лишь при обращении главного члена в нуль или возникновении нового.

Поэтому к квазиполиному с главным членом при условии, что $\tau_m > \tau_{m-1} > \ldots > \tau_1$ и $\tau_m > |\tau_1|$, заведомо применим τ-переход. При отсутствии главного члена и выполнении этих условий τ-переход также применим, поскольку после τ-перехода квазиполином опять не имеет главного члена. Отсюда согласно теоремам 1 и 2 следует, что для отсутствия у квазиполинома $F = \{f \parallel g\}$ корней справа от мнимой оси необходимо и достаточно, чтобы в рядах определителей Эрмита-Гурвица функций $\{f \parallel g\}$ и $\{f \parallel -f'\}$ не было перемен знака.

Применение этого критерия требует вычисления или во всяком случае оценки знаков бесконечного числа определителей и это сделать совсем не просто, даже если квазиполином задан численно. Поэтому ниже специально для квазиполиномов будет дан эффективный способ.

§ 8. Определение числа корней с положительной действительной частью у заданного квазиполинома

В настоящем параграфе даются выражения для числа имеющих положительную действительную часть корней квазиполинома (1.1). Составление этих выражений, если коэффициенты и показатели — рациональные числа, требует конечного числа операций. Эти же выражения позволяют дать систему неравенств, определяющую квазиполиномы с s корнями на правой полуплоскости.

Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ базис показателей квазиполинома

$$\sum_{k,\, s=0}^{n,\, m} a_{ks} z^k e^{\tau_s z} \qquad (\tau_s = \sum \alpha_{sj} \nu_j) \tag{8.1}$$

Если квазиполином (8.1) принадлежит $D(s<\infty)$ и $a_{nm} \neq 0$, то он принадлежит замыканию области π_0 квазиполиномов, для которых функция

$$\sum a_{ns} \xi_1^{\alpha_{s1}} \ldots \xi_p^{\alpha_{sp}} t^{\alpha_{s1}\nu_1 + \ldots + \alpha_{sp}\nu_p} \tag{8.2}$$

не имеет корней вне круга $|t|<1$ ни при каких $\xi_1, \ldots, \xi_p$ на окружности $|\xi|=1$. У функции (8.2), как известно, числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ могут быть заменены любыми другими, к которым возможен непрерывный переход при соблюдении неравенств

$$\sum a_{mj}\nu_j > \sum \alpha_{sj}\nu_j \qquad (s = m-1, \ldots, 1)$$

Заметим, что замены базиса $\nu_1, \ldots, \nu_p$ вида $\nu_j = \sum \beta_{jk}\nu_k'$, где $|\beta_{jk}| \neq 0$, позволяют матрицу перехода $\| \alpha_{sj} \|$ привести к виду

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{pp} \\ \alpha_{p+1,\,1} & \alpha_{p+1,\,2} & \alpha_{p+1,\,3} & \ldots & \alpha_{p+1,\,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \ldots & \alpha_{mp} \end{matrix} \right\|$$

Приведение к этому виду можно выполнить, переставляя столбцы и прибавляя к одним столбцам другие, умноженные на некоторые целые числа.

Область π_0 заполнена множествами $D(s<\infty)$ и точка границы π_0 принадлежит $D(s<\infty)$, лишь если существует путь, идущий к этой точке из π_0 и пересекающий поверхность N в конечном числе точек (условие А*). Достаточность этого условия установлена в § 2, необходимость непосредственно следует из необходимости существования такого пути на w-плоскости, взятой в пространстве Φ_{2n} так, чтобы она пересекалась с π_0 по некоторой области, на границе которой лежит рассматриваемый квазиполином.

Как отмечалось, условие A можно записать в виде неравенства на коэффициенты a_{ns}.

Отметим еще, что согласно предыдущему можно сформулировать утверждение.

Теорема об аппроксимации. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ базис показателей $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ и $\nu_{1e}, \ldots, \nu_{pe}$ последовательности рациональных чисел, аппроксимирующих базис, тогда D-разбиения последовательности $\Phi_{2n}^{\nu_{1e}, \ldots, \nu_{pe}}$ аппроксимируют D-разбиение последовательности $\Phi_{2n}^{\nu_1, \ldots, \nu_p}$, причем в любой внутренней части π_0 пространства $\Phi_{2n}^{\nu_1, \ldots, \nu_p}$ равномерна. Отсюда, в частности, следует, что квазиполином, не имеющий корней в достаточно малой окрестности мнимой оси $|\operatorname{Re} z| < \varepsilon$, груб по коэффициентам a_{ks} и параметрам $\nu_1, \ldots, \nu_p$ базиса.

Случай $p = 1$. *Теорема 1.* Квазиполином (8.1), где $\tau_s = s\tau$, принадлежит $D(s < \infty)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие A^* и

$$s = \sum \varepsilon_k \left[-\frac{\gamma_k}{2\pi}, \frac{\tau\omega_k - \gamma_k}{2\pi} \right)^* \tag{8.3}$$

где символ $[\alpha, \beta)$ означает число целочисленных точек с одного конца в замкнутом интервале $[\alpha, \beta)$, берущееся со знаком плюс, если $\alpha < \beta$, и минус, если $\alpha > \beta$.

В условии (8.3) ω_k — значения действительного параметра ω, а γ_k — аргумента в точках пересечения кривых $t = t_j(i\omega)$, т. е. кривых $P(i\omega, t) = 0$ с единичной окружностью $|t| = 1$, причем в соответствующем члене суммы $\varepsilon_k = +1$, если при возрастании ω единичная окружность пересекается извне, и $\varepsilon_k = -1$, если изнутри, и $s_{\tau=0}$ — число корней полинома $P(z, 1)$, лежащих справа от мнимой оси[1].

Рассмотрим D-разбиение октанта $\tau > 0$, $\nu > 0$ плоскости $\nu\tau$ квазиполиномов $P(z, \nu e^{\tau z})$. Кривая N в этом случае имеет уравнение

$$\tau = \frac{1}{\omega} \{\arg t_j(i\omega) + 2\pi l\}, \qquad \nu = |t_j(i\omega)| \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{8.4}$$

где $t_j(i\omega)$ — решения уравнения $P(i\omega, t) = 0$ и l пробегает все целые значения. Соответствующий якобиан будет

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} \frac{\partial P}{\partial \tau} & \operatorname{Im} \frac{\partial P}{\partial \tau} \\ \operatorname{Re} \frac{\partial P}{\partial \nu} & \operatorname{Im} \frac{\partial P}{\partial \nu} \end{vmatrix}_{z=i\omega} = \left\{ \left| \frac{\partial P}{\partial \nu} \right|^2 \operatorname{Im} \frac{\frac{\partial P}{\partial \tau}}{\frac{\partial P}{\partial \nu}} \right\}_{z=i\omega} = -\omega\nu \left| \frac{\partial P}{\partial t} \right|^2$$

При этом N_ω состоит из m прямых $\nu = |t_j(\infty)|$, параллельных оси τ. Условие A^* состоит в том, чтобы эти прямые лежали в полосе $\nu \leqslant 1$, и если некоторые предельные прямые совпадают с границей $\nu = 1$ этой полосы, то нужно, чтобы кривые (8.4) подходили к ней при $\omega \to \pm\infty$ не извне.

Утверждение теоремы 1 можно теперь непосредственно получить из рассмотрения непрерывного перехода по плоскости $\tau\nu$ от полинома $P(z, 1)$ к квазиполиному $P(z, e^{\tau z})$ при монотонном возрастании τ. Действительно, при таком переходе мы пересекаем кривую N в точках τ_{kl}, $\nu = +1$, ω_k, определяемых из уравнений

$$|t_j(i\omega_k)| = 1, \qquad \tau_{ke} = \frac{1}{\omega_k} \{\arg t_j(i\omega_k) + 2\pi l\} \tag{8.5}$$

[1] Предполагается, что полином $P(z, 1)$ не имеет бесконечных корней. В противном случае к числу его корней с положительной действительной частью нужно добавить число бесконечных его корней, смещающихся на правую полуплоскость при переходе от него к полиному $P(z, 1 + \varepsilon)$, где ε — малое положительное число.

Пересечение кривой N при таком непрерывном переходе происходит с штрихованной или нештрихованной стороны в зависимости от того, пересекает ли при возрастании ω кривая N в этой точке прямую $\nu=1$, по которой происходит перемещение снизу вверх или сверху вниз, ω от знака якобиана Δ преобразования z-плоскости в $\tau\nu$-плоскость.

Каждому нечетному корню ω_k, т. е. корню, соответствующему пересечению кривой $t=t_j(i\omega)$ и окружности $|t|=1$, уравнения (8.5) соответствует

$$\left[-\frac{\gamma_k}{2\pi},\ \frac{\tau\omega_k-\gamma_k}{2\pi}\right)$$

точек пересечения с кривой N. Теперь осталось лишь напомнить, что при каждом пересечении при непрерывном переходе кривой N с нештрихованной стороны s убывает на единицу, а при пересечении с штрихованной стороны, напротив, возрастает на единицу.

Замечание 1. При переходе γ_k через нуль не происходит изменения числа s, поскольку изменение соответствующего члена суммы компенсируется изменением $s_{\tau=0}$.

Замечание 2. Вычислять ω_k и γ_k нужно лишь с такой точностью, чтобы установить, между какими целыми числами лежат числа

$$x_k=\frac{\tau\omega_k-\gamma_k}{2\pi}$$

Если x_k не целое число, то для этого требуется конечная точность, и если коэффициенты a_{ks} и τ алгебраические, то x_k не может быть целым, поскольку $\operatorname{tg}\tau\omega_k$ и $\operatorname{tg}\gamma_k$ согласно теореме Эрмита-Линдемана не могут быть одновременно алгебраическими при $\tau\omega_k\neq 0$.

Замечание 3. Корни полинома $P(i\omega,\ t)$ не лежат вне единичного круга $|t|\leqslant 1$, если корни полинома

$$(x-1)^n\, P\left(i\omega,\ \frac{x+1}{x-1}\right)$$

не лежат справа от мнимой оси, т. е. если выполнены неравенства Эрмита-Гурвица $\Delta_2(\omega)\geqslant 0,\ \ldots,\ \Delta_{2n}(\omega)\geqslant 0$. Условие A* эквивалентно выполнению этих неравенств для всех ω, больших некоторого Ω. Этот же ряд определителей можно использовать для того, чтобы устанавливать, как (изнутри или извне) пересекают кривые $t=t_j(i\omega)$ единичную окружность.

Замечание 4. Условие (8.3) теоремы 1 может быть записано в виде счетной системы конечных групп неравенств. Так, например, для $m=1$ оно эквивалентно выполнению по крайней мере для одного варианта знаков в ряде определителей Эрмита-Гурвица полинома $P(z,1)$ и одной системы не более чем $m+1$ целых чисел $\alpha_k\,(=\pm 1,0)$ и $\beta_k\,(-\infty<\beta_k<+\infty)$, подчиненных условию $\Sigma\alpha_k+\beta_k+s_{\tau=0}=s$ ($s_{\tau=0}$ — число перемен знака в только что упомянутом ряде определителей) неравенств

$$\alpha_k<\gamma_k<\alpha_{k+1},\qquad \beta_k<\tau\omega_k-\gamma_k<\beta_{k+1}$$

где γ_k и ω_k — функции коэффициентов квазиполинома.

Как только квазиполином задан численно, то оценка для него с любой степенью точности чисел ω_k и γ_k выделяет из этой счетной системы неравенств конечную систему.

Конкретизируем формулировку теоремы 1 для случаев $m=1$ и $m=2$. Эти случаи рассматривались в работах [17, 18, 29, 35].

Для $m=1$, т. е. квазиполинома вида $P(z)-Q(z)e^{\tau z}$, числа ω_k будут корнями уравнения

$$|P(i\omega_k)Q^{-1}(i\omega_k)|=1 \quad \text{и} \quad \gamma_k=\arg P(i\omega_k)Q^{-1}(i\omega_k)$$

При этом, если перенумеровать нечетные корни ω_k в порядке убывания, то $\varepsilon_k=(-1)^k$. Последнее следует из того, что кривая $t=t_1(i\omega)$ пересекает окружность $|t|=1$ поочередно извне и изнутри и при ω_1 пересекает эту окружность обязательно, если выполнено условие A

$$\left|\frac{P}{Q}\right|_{z=i\omega}\leqslant 1 \quad \text{при} \quad |\omega|>\Omega$$

изнутри. Для действительного квазиполинома можно ограничиться положительными ω_k, но считать $\varepsilon_k=2(-1)^k$. Это утверждение при $n=2_*$ и $s=0$ приводит к неравенствам, установленным в работах [17,18].

Для $m=2$, т. е. квазиполинома $P(z)+Q(z)e^{\tau z}+R(z)e^{2\tau z}$, числа ω_k будут корнями уравнения $f^2+g^2=F^2$ и

$$\gamma_k=\arg\frac{f+ig}{F}$$

где

$$f=Q_1(R_1-P_1)+Q_2(R_2-P_2),\quad g=Q_1(P_2+R_2)-Q_2(P_1+R_1)$$

причем $F=|P|^2-|R|^2$ и P_1, Q_1, R_1 и P_2, Q_2, R_2 соответственно действительные и мнимые части полиномов $P(i\omega)$, $Q(i\omega)$ и $R(i\omega)$.

Значение ε_k можно найти из следующих соображений. Пусть $t_1(i\omega)$ и $t_2(i\omega)$ решения уравнения

$$\{P+Qt+Rt^2\}_{z=i\omega}=0$$

При очень больших ω t_1 и t_2 лежат внутри единичного круга. Очевидно, $|t|\ |t_2|=|P/R|$, поэтому окружность $|t|=|P/R|$ разделяет корни t_1 и t_2. Теперь легко находим, что если корни перенумеровать в порядке убывания, то $\varepsilon_1=-1$ и $\varepsilon_k=-\varepsilon_{k-1}$ при $F(\omega_{k-1})F(\omega_k)>0$, $\varepsilon_k=\operatorname{sign}F(\omega_k)\cdot 1$ при $F(\omega_{k-1})F(\omega_k)<0$. Условие A в случае действительных P, Q и R состоит в выполнении неравенств

$$(p_n+q_n+r_n)(p_n-r_n)>0,\qquad (p_n+q_n+r_n)(p_n-q_n-r_n)>0$$

где p_n, q_n и r_n коэффициенты при старшей n-й степени у полиномов P, Q и R.

Общий случай $1\leqslant p\leqslant m$. *Теорема* 2. Пусть ω_k, μ_k значения параметра ω и μ в точках пересечения кривой $P(i\mu, e^{\tau_s\omega i})=0$ на комплексной плоскости μ с действительной осью, тогда $s=\sum\varepsilon_k+s_{\mu\to\infty}$, где сумма берется по всем k, для которых $1 < \mu_k / \omega_k < +\infty$ и $\varepsilon_k = +1$, если кривая $\mu(\omega)$ пересекает действительную ось сверху, и $\varepsilon_k = -1$, если она пересекает действительную ось снизу, а $s_{\mu\to\infty}$ — число s при очень больших действительных μ у квазиполинома $P(\mu z, e^{\tau_s z})$ или, что то же, квазиполинома $P(z, e^{\tau_s z/\mu})$.

Утверждение этой теоремы легко получить, рассматривая непрерывный переход на μ-плоскости квазиполиномов $P(\mu z, e^{\tau_s z})$ от квазиполинома $P(\infty z, e^{\tau_s z})$ к квазиполиному $P(z, e^{\tau_s z})$ соответственно монотонному изменению μ от $+\infty$ до 1.

Поступила в редакцию
16 III 1949

Горьковский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermite. Oeuvres. Paris. 1905. T. I. P. 397.
2. Routh E. J. A. Treatise on the Stability of Given State of Motion. 1877.
3. Hurwitz. A. Math. Ann. 1895. Bd. 46. S. 273.
4. Grommer J. Über ganze transzendente Functionen mit lauter reellen Nullstellen. Journ. für reine und angewandte Mathematik. 1914. Bd. 144.
5. Чеботарев Н. Г. Über die Realität von Nullstellen ganzer transzendenter Functionen. Math. Annal. 1928. Bd. 99.
6. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков. 1938.
7. Чеботарев Н. Г. К проблеме Гурвица для целых трансцендентных функций. ДАН. 1941. Т. 33. № 9.
8. Чеботарев Н. Г. Об одном видоизменении способов Штурма и Фурье. ДАН. 1942. Т. 34. № 1.
9. Чеботарев Н. Г. Об одном частном виде трансцендентных уравнений. ДАН. 1942. Т. 34. № 2.
10. Чеботарев Н. Г. О целых функциях с вещественными перемежающимися корнями. ДАН. 1942. Т. 35. № 7.
11. Чеботарев Н. Г. Об одном видоизменении постановки задачи Гурвица. ДАН. 1942. Т. 35. № 8.
12. Понтрягин Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Изв. АН СССР. Серия матем. 1942. Т. 6. № 3.
13. Мейман Н. Н. К проблеме Эрмита-Гурвица для целых трансцендентных функций. ДАН. 1943. Т. 40. № 2.
14. Мейман Н. Н. К вопросу о распределении нулей целой функции. ДАН. 1943. Т. 40. № 5.
15. Мейман Н. Н. Об одном классе целых функций. ДАН. 1948. Т. 62. № 3.
16. Левин Б. Я. Критерий Эрмита для целых функций экспоненциального вида. ДАН. 1942. Т. 41. № 2,3.
17. Чеботарев Н. Г. Задача Гурвица для трансцендентных функций. Тр. Ленинградской Военной Воздушной Академии. 1945. Вып. 7.
18. Цапырин В. Н. К проблеме Гурвица для трансцендентных уравнений ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 3.
19. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауза-Гурвица для полиномов и целых функций. Изд. Акад. Наук СССР. 1949.
20. Андронов А. А., Майер А. Г. Простейшие системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2 — 3.
21. Соколов А. А. Критерий устойчивости систем регулирования с распределенными параметрами и его приложения. Инженерный сборник. 1946. Т. II. Вып. 2.

22. Кабаков И. П. О процессе регулирования давления пара. Инженерный сборник. 1946. Т. II. Вып. 2.
23. Кабаков И. П., Соколов А. А. О влиянии гидравлического удара в тупиковом маслопроводе на процесс проточного безрычажного регулирования скорости паровой турбины. Инженерный сборник. 1946. Т. II. Вып. 2.
24. Волошин Н. Учет явления запаздывания. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9. № 4.
25. Цыпкин Я. З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью. Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2-3.
26. Цыпкин Я. З. Устойчивость одного класса систем автоматического регулирования с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9. № 3.
27. Неймарк Ю. И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9. № 3.
28. Неймарк Ю. И. Структура D-разбиения пространства квазиполиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста. ДАН. 1948. Т. 60. № 9.
29. Воробьев Ю. В. Об исследовании устойчивости одного класса систем автоматического регулирования с волновым процессом в отдельных звеньях. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9. № 4.
30. Аранович Г. В. О влиянии гидравлического удара на устойчивость регулирования водяных турбин. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9. № 3.
31. Hartree P., Porter A., Callender A., Stevenson A. Time-Lag in a Control System (I). Phil. Trans. Roy. Soc. 1936. Vol. 235. No. 756. P. 415. (II). Proc. Roy. Soc. 1937. Vol. 161. No. 907. P. 460.
32. Reinhardt F. Der Parallelbetrieb von Synchrongeneratoren mit Kraftmaschinenreglern konstanter Vorzögerungszeit. Wiss. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Werken. 1939. Bd. 18, Nr. 1. S. 24.
33. Minorsky N. Self-Excited Oscillation in Dynamical Systems Possesing Retarded Actions. J. Appl. Mechanics. 1942. Vol. 9. No. 2.
34. Неймарк Ю. И. К вопросу влияния гидравлического удара на регулирование турбин. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9. № 4.
35. Воробьев Ю. В., Дроздович В. Н. О методах исследования устойчивости систем регулирования с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика. 1949. Т. 10. № 2.
36. Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия. Изв. Практического СПб. технологического института. 1877. Т. I.
37. Stodola A. Über die Regulierung von Turbinen. Schweizerische Bauzeitung. (I). 1893. Bd. 22. (II). 1894. Bd. 23.
38. Nyquist H. Regeneration Theory. The Bell System Technical Journal. 1932. Vol. 11. No. 1. P. 126.
39. Неймарк. Ю. И. Структура D-разбиения пространства полиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста. ДАН. 1948. Т. 59. № 5.
40. Михайлов А. В. Метод гармонического анализа в теории регулирования. Автоматика и телемеханика. 1938. № 3.
41. Андронов А., Понтрягин Л. Грубые системы. ДАН. 1937. Т. 14. № 5.
42. Неймарк Ю. И. К задаче распределения корней полиномов. ДАН. 1947 Т. 58. № 3.