

## К ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Н. В. Бутенин

(Ленинград)

В работе рассматривается поведение механической системы с двумя степенями свободы, близкой к линейной консервативной, при действии на нее внешней синусоидальной силы. Рассмотрение ведется вдали от «резонанса», т. е. предполагается, что частота внешней силы далека от обеих нормальных частот соответствующей линейной консервативной системы. В качестве конкретного примера приводится механическая система с гироскопическим стабилизатором.

Насколько известно автору, вопрос о действии внешней синусоидальной силы на нелинейную механическую систему с гироскопическим стабилизатором в литературе до сих пор не рассматривался<sup>1</sup>.

§ 1. Уравнения установления процесса движения. Пусть движение механической системы описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \alpha_1 \frac{dy}{dt} - n_1^2 x &= \mu f \left( x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dx}{dt} - n_2^2 y &= \mu g \left( x, \frac{dx}{dt}, x, \frac{dy}{dt} \right) + Q \sin t \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $f$  и  $g$  — нелинейные функции,  $\mu$  — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к системе, описывающей линейную консервативную механическую систему.

При  $\mu = 0$  система (1.1) имеет решение

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + b \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + d \cos t \\ y &= ak_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + bk_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + c \sin t \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d &= \frac{\alpha_1 Q}{1 + (n_1^2 + n_2^2 - \alpha_1 \alpha_2) + n_1^2 n_2^2} \\ c &= \frac{-(1 + n_1^2) Q}{1 + (n_1^2 + n_2^2 - \alpha_1 \alpha_2) + n_1^2 n_2^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Главные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяются как корни уравнения

$$\omega^4 + (n_1^2 + n_2^2 - \alpha_1 \alpha_2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0 \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> Вопрос о вынужденных колебаниях в сложном генераторе рассмотрен А. Г. Майером<sup>[1]</sup>. Автором ранее был рассмотрен вопрос о действии внешней силы на нелинейную механическую систему с двумя степенями свободы, в которой гироскоп употребляется в качестве успокоителя<sup>[2]</sup>.

В решении уравнения (1.2) коэффициенты распределения  $k_1$  и  $k_2$  определяются по формулам

$$k_1 = \frac{\omega_1^3 + n_1^2}{\kappa_1 \omega_1} = \frac{\kappa_2 \omega_1}{\omega_1^3 + n_2^2}, \quad k_2 = \frac{\omega_2^3 + n_1^2}{\kappa_1 \omega_2} = \frac{\kappa_2 \omega_2}{\omega_2^3 + n_2^2} \quad (1.5)$$

При  $\mu \neq 0$  решение системы (1.1) будем искать в виде

$$x = a \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + b \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + d \cos t \quad (1.6)$$

$$y = (ak_1 + a_2) \cos(\omega_1 t + \varphi_1 - \gamma_1) + (bk_2 + b_2) \cos(\omega_2 t + \varphi_2 - \gamma_2) + c \sin t$$

В решении (1.6) будем считать  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  медленно меняющимися функциями времени, т. е. будем считать, что производные этих функций по  $t$  имеют порядок  $\mu$ , вторые производные по  $t$  — порядок  $\mu^2$  и т. д.

Поправки на амплитуды и фазы главных колебаний, т. е.  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , будем считать медленно меняющимися функциями порядка  $\mu$ . Для удобства в дальнейшем представим решение (1.6) в виде

$$x = a \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + b \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + d \cos t$$

$$y = (ak_1 + a_2) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (bk_2 + b_2) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + c \sin t + a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + b_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (1.7)$$

где  $a_1$  и  $b_1$  имеют порядок  $\mu$  (членами порядка  $\mu^2$  пренебрегаем).

Подставляя решение (1.7) в систему уравнений (1.1) и принимая  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $d$  и  $c$  такими же, как и в линейной задаче, получим

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{da}{dt} (2\omega_1 - \kappa_1 k_1) - \kappa_1 a_1 \omega_1 \right] \cos \xi + \left[ \frac{db}{dt} (2\omega_2 - \kappa_1 k_2) - \kappa_1 b_1 \omega_2 \right] \cos \eta + \\ & + \left[ a \frac{d\varphi_1}{dt} (\kappa_1 k_1 - 2\omega_1) + \kappa_1 a_2 \omega_1 \right] \sin \xi + \\ & + \left[ b \frac{d\varphi_2}{dt} (\kappa_1 k_2 - 2\omega_2) + \kappa_1 b_2 \omega_2 \right] \sin \eta = \mu f^* \\ & \left[ \frac{da}{dt} (\kappa_2 - 2k_1 \omega_1) - a_1 (\omega_1^2 + n_2^2) \right] \sin \xi + \\ & + \left[ \frac{db}{dt} (\kappa_2 - 2k_2 \omega_2) - b_1 (\omega_2^2 + n_2^2) \right] \sin \eta + \\ & + \left[ a \frac{d\varphi_1}{dt} (\kappa_2 - 2k_1 \omega_1) - a_2 (\omega_1^2 + n_2^2) \right] \cos \xi + \\ & + \left[ b \frac{d\varphi_2}{dt} (\kappa_2 - 2k_2 \omega_2) - b_2 (\omega_2^2 + n_2^2) \right] \cos \eta = \mu g^* \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$f^*(\xi, \eta, t) = f(a \sin \xi + b \sin \eta + d \cos t, a \omega_1 \cos \xi + b \omega_2 \cos \eta - d \sin t, ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + c \sin t, -ak_1 \omega_1 \sin \xi - bk_2 \omega_2 \sin \eta + c \cos t)$$

$$g^*(\xi, \eta, t) = g(a \sin \xi + b \sin \eta + d \cos t, a \omega_1 \cos \xi + b \omega_2 \cos \eta - d \sin t, ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + c \sin t, -ak_1 \omega_1 \sin \xi - bk_2 \omega_2 \sin \eta + c \cos t)$$

$$\text{причем } \xi = \omega_1 t + \varphi_1, \quad \eta = \omega_2 t + \varphi_2 \quad (1.9)$$

По предположению  $a, b, \varphi_1, \varphi_2$  медленно меняющиеся функции времени; следовательно, можно считать, что изменения амплитуд будут происходить значительно медленнее по сравнению с колебаниями, происходящими в системе<sup>1</sup>. Поэтому можно, умножив последовательно выражения (1.8) на  $\cos \xi, \cos \eta, \sin \xi, \sin \eta$ , взять их средние значения за периоды  $2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2$  и  $2\pi$ . Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} (2\omega_1 - \kappa_1 k_1) - a_1 \kappa_1 \omega_1 &= \mu A_1 \\ \frac{db}{dt} (2\omega_2 - \kappa_1 k_2) - b_1 \kappa_1 \omega_2 &= \mu B_1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} a \frac{d\varphi_1}{dt} (\kappa_1 k_1 - 2\omega_1) + a_2 \kappa_1 \omega_1 &= \mu A_2 \\ b \frac{d\varphi_2}{dt} (\kappa_2 k_1 - 2\omega_2) + b_2 \kappa_1 \omega_2 &= \mu B_2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} (\kappa_2 - 2k_1 \omega_1) - a_1 (\omega_1^2 + n_2^2) &= \mu A_3 \\ \frac{db}{dt} (\kappa_2 - 2k_2 \omega_2) - b_1 (\omega_2^2 + n_2^2) &= \mu B_3 \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} a \frac{d\varphi_1}{dt} (\kappa_2 - 2k_1 \omega_1) - a_2 (\omega_1^2 + n_2^2) &= \mu A_4 \\ b \frac{d\varphi_2}{dt} (\kappa_2 - 2k_2 \omega_2) - b_2 (\omega_2^2 + n_2^2) &= \mu B_4 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \frac{\cos \xi}{\sin \xi} d\xi d\eta dt \\ B_{1,2} &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \frac{\cos \eta}{\sin \eta} d\xi d\eta dt \\ A_{3,4} &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \frac{\sin \xi}{\cos \xi} d\xi d\eta dt \\ B_{3,4} &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \frac{\sin \eta}{\cos \eta} d\xi d\eta dt \end{aligned} \tag{1.14}$$

причем  $f^* = f^*(\xi, \eta, t)$  и  $g^* = g^*(\xi, \eta, t)$  определены (1.9).

Исключая теперь из выражений (1.10) и (1.12) величины  $a_1, b_1$ , получим уравнения для  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 A_3 - \frac{\kappa_2}{k_1} A_1 \right) \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 B_3 - \frac{\kappa_2}{k_2} B_1 \right), \end{aligned} \tag{1.15}$$

<sup>1</sup> Обоснованию к развитию указанного предположения посвящена довольно большая литература [3-8]



В уравнениях (1.15) переменная  $\tau$  определяется формулой

$$\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

Исключая из выражений (1.11) и (1.13) величины  $a_2$  и  $b_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= -\frac{1}{an_1^3} \left( \kappa_1 A_4 + \frac{\kappa_2}{k_1} A_2 \right) \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \frac{1}{bn_1^3} \left( \kappa_1 B_4 + \frac{\kappa_2}{k_2} B_2 \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

При вычислениях следует иметь в виду соотношения

$$\begin{aligned} \frac{n_2^2 + \omega_1^2}{\kappa_1 \omega_1} &= \frac{\kappa_2}{k_1 \kappa_1}, \quad \frac{n_2^2 + \omega_2^2}{\kappa_1 \omega_2} = \frac{\kappa_2}{k_2 \kappa_1} \\ \kappa_1 \kappa_2 - n_1^2 - n_2^2 - 2\omega_1^2 &= -(\omega_1^2 - \omega_2^2) \end{aligned}$$

Значения  $a$  и  $b$ , соответствующие установившимся режимам, мы найдем, приравняв правые части уравнений (1.15) нулю<sup>[12]</sup>:

$$\kappa_1 A_3 - \frac{\kappa_2}{k_1} A_1 = 0, \quad \kappa_1 B_3 - \frac{\kappa_2}{k_2} B_1 = 0, \quad (1.17)$$

Найденные из (1.17) значения  $a$  и  $b$  подставляем затем в уравнения (1.16), откуда и определяем поправки на частоту для соответствующего установившегося режима<sup>1</sup>.

**§ 2.** Вынужденные колебания механической системы с гироскопическим стабилизатором. В качестве конкретного примера рассмотрим однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией. Известно<sup>[10]</sup>, что при отсутствии сервомомента, ускоряющего прецессию рамы гироскопа, такая механическая система не имеет устойчивых режимов. Поэтому для получения устойчивых режимов вводят специальный сервомомент<sup>[9]</sup>.

Мы будем аппроксимировать сервомомент кубической параболой. Такой момент, например, можно осуществить, используя асинхронный мотор, вращение ротора которого связано при помощи шестерен с вращением рамы гироскопа<sup>[14]</sup>. Предположим также, что на вагон будет действовать внешняя синусоидальная сила.

Уравнения движения такой механической системы будут<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} A_0 \frac{d^2 x}{dt^2} - C\omega \frac{dy}{dt} - ph_1 x &= -\gamma'' \frac{dx}{dt} + M_x \left( x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) \\ J_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + C\omega \frac{dx}{dt} - Ph_2 y &= -\gamma' \frac{dy}{dt} + Q' \sin qt \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= A' + B' + \frac{P}{g} h_1^2, \\ J_0 &= J_b + \frac{Q_1 + Q_2}{g} h^2 + A' + C_1 + \frac{P}{g} (h + h_1)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> Уравнения установления процесса движения при отсутствии внешней силы<sup>[8, 9]</sup> по виду аналогичны уравнениям (1.15).

Смысл величин в равенствах (2.1) и (2.2), следующий (фиг. 1):

- $y$  — угол отклонения вагона от вертикали;
- $x$  — угол поворота рамы гироскопа;
- $\omega$  — собственная угловая скорость гироскопа;
- $J_b$  — момент инерции вагона относительно

рельса;

$A'$  — экваториальный момент инерции гироскопа;

$B'$  — экваториальный момент инерции рамы;

$C$  — полярный момент инерции гироскопа;

$C_1$  — полярный момент инерции рамы;

$Q_1$  — вес гироскопа;  $Q_2$  — вес рамы;

$P$  — вес системы (без груза);  $p$  — вес груза  $E$ ;

$\gamma'$  — коэффициент вязкого трения для вагона;

$\gamma''$  — коэффициент вязкого трения для рамы;

$M_x$  — стабилизирующий сервомомент;

$h$  — расстояние от оси вращения рамы гироскопа до рельса;

$h_1$  — расстояние от оси вращения рамы гироскопа до груза  $E$ , создающего неустойчивость изображенного на фиг. 1 положения рамы;

$h_2$  — расстояние центра тяжести системы (без груза) до рельса;

Член  $Q' \sin qt$  в уравнении (2.1) есть внешняя сила, действующая на вагон, причем  $q$  — частота внешней силы.

Вводим обозначения

$$x_1 = \frac{C\omega}{A_0}, \quad x_2 = \frac{C\omega}{J_0}, \quad n_1^2 = \frac{ph_1}{A_0}, \quad n_2^2 = \frac{Ph_2}{J_0}, \quad \tau_1 = qt \quad (2.3)$$

и аппроксимируем сервомомент  $M_x$ , кубической параболой

$$M_x = \left[ \alpha' - \beta' \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \frac{dx}{dt} = \left[ \alpha' - \beta' q^2 \left( \frac{dx}{d\tau_1} \right)^2 \right] q \frac{dx}{d\tau_1} \quad (\alpha' > 0, \beta' > 0)$$

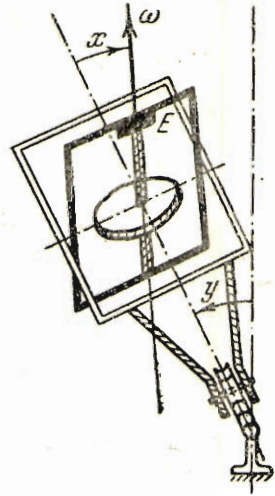
Тогда уравнения (2.1) приведутся к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau_1^2} - \frac{x_1}{q} \frac{dy}{d\tau_1} - \frac{n_1^2}{q^2} x &= - \frac{\gamma''}{A_0 q} \frac{dx}{d\tau_1} + \frac{1}{A_0 q} \left[ \alpha' - \beta' q^2 \left( \frac{dx}{d\tau_1} \right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau_1} \\ \frac{d^2y}{d\tau_1^2} + \frac{x_2}{q} \frac{dx}{d\tau_1} - \frac{n_2^2}{q^2} y &= - \frac{\gamma'}{J_0 q} \frac{dy}{d\tau_1} + \frac{Q'}{J_0 q^2} \sin \tau_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сделаем предположение о близости рассматриваемой системы к линейной консервативной, т. е. предположим, что безразмерные величины

$$\frac{\gamma''}{A_0 q} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{J_0 q} \ll 1, \quad \frac{\alpha'}{A_0 q} \ll 1, \quad \frac{\beta' q}{A_0} \ll 1$$

т. е. предполагаем, что затухание, а также сервомомент достаточно малы по сравнению с моментами сил инерции при парциальных колебаниях.



Фиг. 1

Уравнения движения механической системы окончательно будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau_1^2} - \frac{x_1}{q} \frac{dy}{d\tau_1} - \frac{n_1^2}{q^2} x &= \mu \frac{n_1}{q} \left[ \frac{dx}{d\tau_1} - \beta \left( \frac{dx}{d\tau_1} \right)^3 \right] \\ \frac{d^2y}{d\tau_1^2} + \frac{x_2}{q} \frac{dx}{d\tau_1} - \frac{n_2^2}{q} y &= \mu \frac{n_1}{q} \left( -\lambda \frac{dy}{d\tau_1} \right) + Q \sin \tau_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\mu = \frac{\alpha' - \gamma''}{A_0 n_1}, \quad \beta = \frac{\beta'}{\alpha' - \gamma''} q, \quad \lambda = \frac{A_0 \gamma'}{I_0 (\alpha' - \gamma'')}, \quad Q = \frac{Q'}{I_0 q^3}$$

Уравнения (2.5) имеют вид (1.1), причем

$$\begin{aligned} f\left(x, \frac{dx}{d\tau_1}, y, \frac{dy}{d\tau_1}\right) &= \frac{n_1}{q} \left[ \frac{dx}{d\tau_1} - \beta \left( \frac{dx}{d\tau_1} \right)^3 \right] \\ g\left(x, \frac{dx}{d\tau_1}, y, \frac{dy}{d\tau_1}\right) &= \frac{n_1}{q} \left( -\lambda \frac{dy}{d\tau_1} \right) \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (2.5) будем искать в виде (1.7), в котором согласно (1.3), (1.4), (1.5) и (2.5) будут

$$\begin{aligned} d &= \frac{x_1 Q q^3}{q^4 + (n_1^2 + n_2^2 - x_1 x_2) q^2 + n_1^2 n_2^2}, & C &= \frac{-Q q^2 (q^2 + n_1^2)}{q^4 + (n_1^2 + n_2^2 - x_1 x_2) q^2 + n_1^2 n_2^2} \\ k_1 &= \frac{\omega_1^2 + n_1^2}{x_1 \omega_1} = \frac{x_2 \omega_1}{\omega_1^2 + n_2^2}, & k_2 &= \frac{\omega_2^2 + n_1^2}{x_2 \omega_2} = \frac{x_3 \omega_2}{\omega_2^2 + n_2^2} \end{aligned}$$

Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  будут корнями уравнения

$$\omega^3 + (n_1^2 + n_2^2 - x_1 x_2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0 \quad (2.6)$$

Определяя для уравнений (2.5) при помощи формул (1.14) величины  $A_1, A_3, B_1, B_3$ , мы получим, что уравнения (1.15) для рассматриваемой механической системы будут иметь вид

$$\frac{du}{d\tau} = Au(a_0 - u - 2v - 2d^2), \quad \frac{dv}{d\tau} = Bv(b_0 + 2u + v + 2d^2) \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{a^2 \omega_1^2}{q^2} > 0, & v &= \frac{b^2 \omega_2^2}{q^2} > 0, & A &= \frac{3\beta(\omega_1^2 + n_2^2)}{2n_1^2}, & B &= \frac{3\beta(\omega_2^2 + n_2^2)}{2n_1^2} \\ a_0 &= \frac{4}{3\beta} \left( 1 - \lambda \frac{x_1}{x_2} k_1^2 \right), & b_0 &= -\frac{4}{3\beta} \left( 1 - \lambda \frac{x_1}{x_2} k_2^2 \right), & \tau &= \mu \frac{n_1^2 t}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (1.14) следует, что  $\varphi_1 = \text{const}$ ,  $\varphi_2 = \text{const}$  при любых  $a$  и  $b$ .

Задача исследования возможных видов движения рассматриваемой механической системы сводится к исследованию возможных видов разбиения фазовой плоскости  $uv$  на фазовые траектории, что в свою очередь сводится к разысканию и исследованию особых точек, предельных циклов, сепаратрице уравнений (2.7).

Значения  $u$  и  $v$ , соответствующие особым точкам уравнений (2.7), найдем из условий

$$Au(a_0 - u - 2v - 2d^2) = 0, \quad Bv(b_0 + v + 2u + 2d^2) = 0 \quad (2.9)$$



Особые точки системы уравнений (2.7) будут <sup>1</sup>:

$$1) P_1(u_2 = 0, v_1 = 0)$$

При  $d \neq 0$  эта точка соответствует движению системы с частотой  $q$  вынуждающей силы. При  $d = 0$  точка  $P_1$  соответствует состоянию равновесия системы.

$$2) P_2(u_2 = a_0 - 2d^2, v_2 = 0)$$

При  $d \neq 0$  точка  $P_2$  соответствует бигармоническому движению системы с частотами  $\omega_1$  и  $q$ , при  $d = 0$  — периодическому движению системы с частотой  $\omega_1$ .

$$3) P_3(u_3 = 0, v_3 = -b_0 - 2d^2)$$

При  $d \neq 0$  точка  $P_3$  соответствует бигармоническому движению системы с частотами  $\omega_2$  и  $q$ , при  $d = 0$  — периодическому движению с частотой  $\omega_2$ .

$$4) P_4(u_4 = -1/3[2b_0 + a_0 + 2d^2], v_4 = 1/3[2a_0 + b_0 - 2d^2])$$

При  $d \neq 0$  точка  $P_4$  соответствует тригармоническому движению системы с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $q$ , при  $d = 0$  — бигармоническому движению с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Проведем исследование устойчивости особых точек системы (2.7). Корни характеристического уравнения будут <sup>[12]</sup>:

для точки  $P_1$

$$\lambda_1 = A(a_0 - 2d^2), \quad \lambda_2 = B(b_0 + 2d^2)$$

для точки  $P_2$

$$\lambda_1 = B(2a_0 + b_0 - 2d^2), \quad \lambda_2 = -A(a_0 - 2d^2)$$

для точки  $P_3$

$$\lambda_1 = A(a_0 + 2b_0 + 2d^2), \quad \lambda_2 = -B(b_0 + 2d^2)$$

для точки  $P_4$  характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^2 + (Au_4 - Bv_4)\lambda + 3ABu_4v_4 = 0$$

Если точка  $P_4$  существует, то  $u_4 > 0$  и  $v_4 > 0$ , и, следовательно,

$$3ABu_4v_4 > 0$$

т. е. действительных корней разных знаков характеристическое уравнение иметь не будет. Таким образом, точка  $P_4$  будет особой точкой типа узла или фокуса.

Для того чтобы  $P_4$  была устойчивой особой точкой, нужно, чтобы действительные части корней характеристического уравнения были

<sup>1</sup> Мы рассматриваем только первый квадрант фазовой плоскости *и* в. так как  $u = a^2\omega_1^2/q^2 > 0$ ,  $v = b^2\omega_2^2/q^2 > 0$

отрицательны, т. е. должно выполняться следующее неравенство:

$$-\frac{1}{3} [A(2b_0 + a_0 + 2d^2) + B(2a_0 + b_0 - 2d^2)] > 0$$

Отсюда после преобразования получим

$$-\frac{2A+B}{2B+A} (b_0 + 2d^2) > a_0 - 2d^2$$

Н. Н. Баутин показал, что уравнения (2.7) предельных циклов не имеют и при смене устойчивости точка  $P_4$  будет центром.

Для достаточно больших  $u$  и  $v$  в силу положительности  $A$  и  $B$

$$\frac{du}{d\tau} < 0, \quad \frac{dv}{d\tau} > 0$$

Положение и характер состояний равновесия (особых точек), таким образом, определяются величинами  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $d$ .

Меняя параметры рассматриваемой механической системы, можно получить различные значения  $a_0$  и  $b_0$ , следовательно, различные режимы движения системы.

В качестве параметра, характеризующего изменение параметров системы, возьмем отношение парциальных частот

$$\zeta = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

Решая уравнение (2.6), получим

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2} [-(n_1^2 + n_2^2 - x_1 x_2) + \sqrt{(n_1^2 + n_2^2 - x_1 x_2)^2 - 4n_1^2 n_2^2}] \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2} [-(n_1^2 + n_2^2 - x_1 x_2) - \sqrt{(n_1^2 + n_2^2 - x_1 x_2)^2 - 4n_1^2 n_2^2}] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Используя (2.8) и (2.10), выразим величины  $a_0$  и  $b_0$  в следующем виде:

$$a_0 = \frac{4}{3\beta} [1 - \lambda_0 M(\zeta)], \quad b_0 = -\frac{4}{3\beta} [1 - \lambda_0 N(\zeta)] \quad \left(\zeta = \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} M(\zeta) &= \zeta \frac{(\sigma_0 - 1)\zeta + 1 + \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}{(\sigma_0 + 1)\zeta - 1 + \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}, & \sigma_0 &= \frac{C^2 \omega^3}{A_0 P h_2} \\ N(\zeta) &= \zeta \frac{(\sigma_0 - 1)\zeta + 1 - \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}{(\sigma_0 + 1)\zeta - 1 - \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}, & \lambda_0 &= \frac{\gamma'}{\alpha' - \gamma''} \frac{p h_1}{P h_2} \end{aligned}$$

Мы будем рассматривать только такие значения  $n_1^2$ ,  $n_2^2$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , при которых  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  будут действительными и положительными, т. е. будем предполагать, что соответствующая консервативная система стабилизирована гироскопом.

Для рассматриваемого случая консервативная система будет стабилизирована только для  $\zeta > \zeta_0$ , где

$$\zeta_0 = \frac{\sigma_0 + 1 + 2\sqrt{\sigma_0}}{(\sigma_0 - 1)^2}$$



На фиг. 2 (для  $\lambda_0 < 1$ ) и фиг. 3 ( $\lambda_0 > 1$ ) построены графики  $a_0 = a_0(\zeta)$ ,  $b_0 = b_0(\zeta)$  согласно (2.11) при фиксированных значениях параметров  $\sigma_0$  и  $\lambda_0$ .

Отметим, что при изменении  $\sigma_0$  качественный вид графиков для  $a_0$  и  $b_0$  не меняется.

Меняются лишь численные значения величин  $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots$

При помощи этих графиков мы устанавливаем соотношения между  $a_0$  и  $b_0$  для различных  $\zeta$ .

Исследование поведения системы приводится к исследованию числа и характера особых точек уравнений (2.7). Результаты вычислений, считая, что меняется величина  $d$ , пропорциональная амплитуде приложенной внешней силы, частота которой  $q = \text{const}$ , приведены в табл. 1

Из рассмотрения табл. 1 следует, что интересующими нас случаями будут 2, 3, 4, при которых возможны устойчивые стационарные режимы.

Рассмотрим, каков будет характер изменения стационарных режимов при изменении величины амплитуды внешней силы.

*Случай 2.* При отсутствии внешней силы ( $d = 0$ ) система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

При включении внешней силы при

$$2a_0 - |b_0| > 2d^2 > 0$$

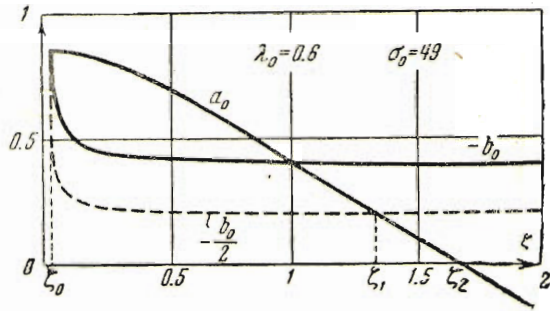
система совершает устойчивое тригармоническое движение с частотами  $\omega_1, \omega_2, q$  (частота внешней силы). При

$$a_0 > 2d^2 > 2a_0 - |b_0|$$

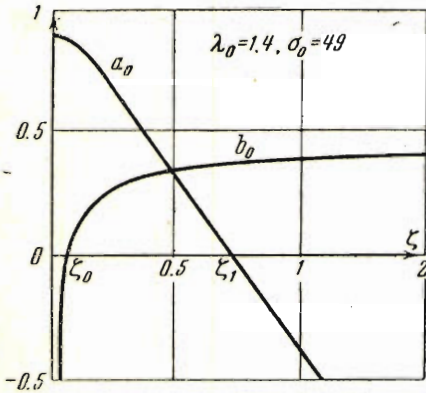
система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами  $\omega_1, q$ . Дальнейшее увеличение амплитуды внешней силы приводит систему к гармоническому движению с частотой  $q$  внешней силы. Однако при

$$2d^2 > |b_0|$$

система становится неустойчивой. На фиг. 4 приведены картины фазовой плоскости для случая 2.



Фиг. 2



Фиг. 3

Таблица 1

Случай	$d$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$\lambda_0 < 1$					
1. $\zeta_0 < \zeta < 1$	$d = 0$	Седло	Седло	Седло	Неуст. фокус или узел
$a_0 > 0$	$2 b_0  - a_0 > 2d^2 > 0$	Седло	Седло	Седло	Неуст. фокус или узел
$b_0 < 0$	$ b_0  > 2d^2 > 2 b_0  - a_0$	Седло	Седло	Неуст. узел	—
$a_0 >  b_0 $	$a_0 > 2d^2 >  b_0 $	Неуст. узел	Седло	—	—
$a_0 < 2 b_0 $	$2d^2 > a_0$	Седло	—	—	—
2. $1 < \zeta < \zeta_1$	$d = 0$	Седло	Седло	Седло	Уст. узел или фокус
$a_0 > 0$	$2a_0 -  b_0  > 2d^2 > 0$	Седло	Седло	Седло	Уст. узел или фокус
$b_0 < 0$	$a_0 > 2d^2 > 2a_0 -  b_0 $	Седло	Уст. узел	Седло	—
$a_0 <  b_0 $	$b_0 > 2d^2 > a_0$	Уст. узел	—	Седло	—
$2a_0 >  b_0 $	$2d^2 >  b_0 $	Седло	—	—	—
3. $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$	$d = 0$	Седло	Уст. узел	Седло	—
$a_0 > 0$	$a_0 > 2d^2 > 0$	Седло	Уст. узел	Седло	—
$b_0 < 0$	$ b_0  > 2d^2 > a_0$	Уст. узел	—	Седло	—
$2a_0 <  b_0 $	$2d^2 >  b_0 $	Седло	—	—	—
4. $\zeta_2 < \zeta$	$d = 0$	Уст. узел	—	Седло	—
$a_0 < 0$	$ b_0  > 2d^2 > 0$	Уст. узел	—	Седло	—
$b_0 < 0$	$2d^2 > a_0$	Седло	—	—	—
$\lambda_0 > 1$					
5. $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$	$d = 0$	Неуст. узел	Седло	—	—
$a_0 > 0$	$a_0 > 2d^2 > 0$	Неуст. узел	Седло	—	—
$b_0 > 0$	$2d^2 > a_0$	Седло	—	—	—
6. $\zeta_3 < \zeta$	$d = 0$	Седло	—	—	—
$a_0 < 0, b_0 > 0$	$d > 0$	Седло	—	—	—

(В таблице не приведен случай для  $\lambda_0 > 1$ , аналогичный случаю 1 для  $\lambda_0 < 1$ ).

Случай 3. При отсутствии внешней силы ( $d = 0$ ) система совершает гармоническое движение с частотой  $\omega_1$ . При включении внешней силы при

$$a_0 > 2d^2 > 0$$

система совершает бигармоническое движение с частотами  $\omega_1$  и  $q$ .

При

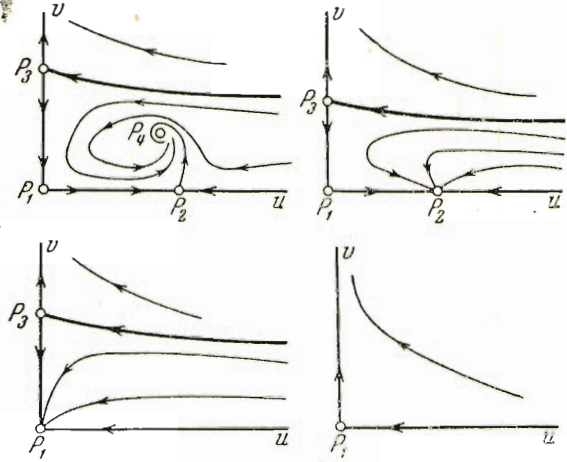
$$|b_0| > 2d^2 > a_0$$

система совершает гармоническое движение с частотой  $q$ .

При

$$2d^2 > |b_0|$$

система неустойчива.



Фиг. 4

Случай 4. При отсутствии внешней силы ( $d = 0$ ) система находится в равновесии.

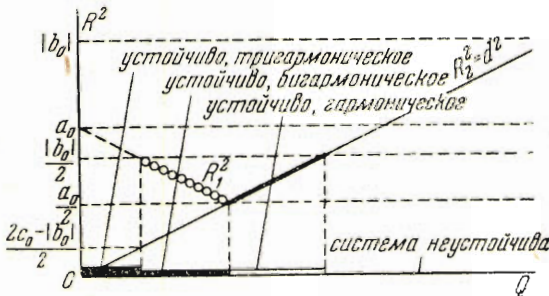
При включении внешней силы при

$$a_0 |b_0| > 2d^2 > 0$$

система совершает периодическое движение с частотой  $q$ . При

$$2d^2 > |b_0|$$

система становится неустойчивой.



Фиг. 5

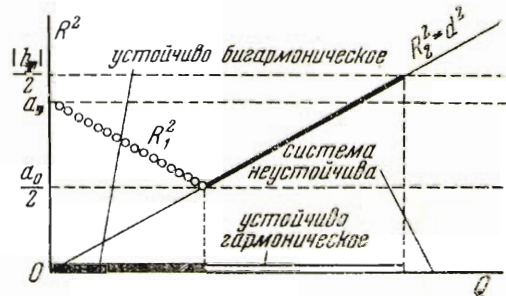
На фиг. 5 и 6 представлены графики изменения величин

$$R_1^2 = u_2 + d^2 = a_0 - d^2$$

$$R_2^2 = d^2$$

при изменении амплитуды внешней силы соответственно для случаев 2 и 3.

Выводы. При действии на механическую автоколебательную систему с двумя степенями свободы внешней синусоидальной силы характер устойчивых режимов движения существенно зависит от величины амплитуды этой силы.



Фиг. 6



Механическая система, которая рассматривалась в настоящей работе, при отсутствии сервомомента, осуществляющего автоколебания системы, неустойчива. Для такой системы возможны устойчивые тригармонические, бигармонические и периодические движения в зависимости от величины амплитуды внешней силы и значений параметров системы. При достижении амплитудой внешней силы определенного значения система становится неустойчивой. Отметим, что в механических автоколебательных системах, которые при отсутствии сервомомента устойчивы, при изменении амплитуды внешней силы возможны только устойчивые бигармонические и периодические движения, причем увеличение величины амплитуды внешней силы не приводит к потере устойчивости механической системы<sup>[2]</sup>.

Поступила в редакцию  
4 III 1949

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Майер А. Г. К теории вынужденных колебаний в сложном генераторе. Ученые записки Горьковского государственного университета. 1937. Вып. 6.
2. Бутенин Н. В. Действие внешней синусоидальной силы на автоколебательную систему с гироскопическими силами. Труды Ленинградской военно-воздушной инженерной академии. 1945. Вып. 7.
3. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. ЖЭТФ. 1934. Т. 4. Стр. 117.
4. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР. 1945.
5. Булгаков Б. В. О применении метода Ван-дер-Поля к псевдoliniейным колебательным системам со многими степенями свободы. ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 6.
6. Крылов Н. И., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики. ОНТИ. 1934. Ч. 1.
7. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат. 1948.
8. Бутенин Н. В. Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов. ЖЭТФ. 1940. Т. 10. Вып. 11.
9. Бутенин Н. В. Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами. ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 5.
10. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика. ГТТИ. 1934. Ч. 3. Стр. 576.
11. Власов Н. П. Автоколебательная система с однофазным асинхронным мотором. ЖТФ. 1935. Т. 5. Вып. 4.
12. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. ОНТИ. 1937. Стр. 259.