Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ БЭРСТОУ

Д. Ю. Панов (Москва)

Бэрстоу, повидимому, первый применил для исследования уравнения движения самолета способ приближенного вычисления корней уравнения четвертой степени основанный на разложении

$$\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E \approx (\lambda^2 + B\lambda + C\lambda)\left(\lambda^2 + \frac{CD - EB}{C^2}\lambda + \frac{E}{C}\right) \qquad (1)$$

справедливом в том случае, если корни резко различаются по модулю (см., например, [1]). Иногда формулы такого типа могут быть полезны и при решении других задач. В этой заметке приводятся формулы, пригодные в более общем случае.

Пусть известно, что многочлен четного порядка имеет только сопряженные комплексные корни, резко различающиеся по модулю. Точнее, будем предполагать, что этот многочлен может быть разложен на произведение двучленов, коэффициенты которых резко различаются по величине:

$$\lambda^{2n} + a_1\lambda^{2n-1} + a_2\lambda^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}\lambda + a_{2n} = (\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)(\lambda^2 + p_2\lambda + q_2)\ldots(\lambda^2 + p_n\lambda + q_n)$$

$$p_1 \gg p_2 \gg p_3 \gg \ldots \gg p_n, \qquad q_1 \gg q_2 \gg q_3 \gg \ldots \gg q_n$$

Очевидно, будем иметь

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i, \qquad a_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i + \sum\sum p_i p_j, \qquad a_3 = \sum\sum q_i p_j + \sum\sum\sum p_i p_j p_k$$

$$a_4 = \sum\sum q_i q_j + \sum\sum\sum q_i p_i p_k + \sum\sum\sum\sum p_i p_j p_k p_l, \ldots \qquad (A)$$

В этих формулах кратные суммы распространяются на всевозможные различные сочетания индексов. Будем в этих формулах отбрасывать малые по сравнению с главными членами величины. Тогда получим

$$\begin{aligned} &a_1 = p_1, \quad a_2 = q_1, \quad a_3 = q_1p_2 + q_2p_1, && a_4 = q_1q_2 \\ &a_5 = q_1q_2p_3 + q_2q_3p_2 + q_2q_3p_1, && a_6 = q_1q_2q_3 \qquad (A') \\ &a_7 = q_1q_2q_3p_4 + q_1q_2q_4p_3 + q_1q_3q_4p_2 + q_2q_3q_4p_1, && a_8 = q_1q_2q_3q_4, \ldots \\ &a_{2n-1} = q_1q_2\cdots q_{n-1}p_n + \cdots + q_2q_3\cdots q_np_1, && a_{2n} = q_1q_2\cdots q_n \end{aligned}$$

Из этих формул при $n = 2$ получается разложение Бэрстоу (1). Действительно, в этом случае

$$a_1 = p_1, \qquad a_2 = q_1, \qquad a_3 = q_1p_2 + q_2p_1, \qquad a_4 = q_1q_2$$

Отсюда

$$q_2 = a_4 / a_2, \qquad p_2 = (a_3a_2 - a_4a_1) / a_2^2$$

Это совпадает с коэффициентами (1). При $n = 3$ получаем те же, что и ранее, выражения для p_1, q_1, p_2, q_2 и новые

$$p_3 = \frac{(a_2 a_5 - a_1 a_6)\, a_2 a_4 - (a_2 a_3 - a_1 a_4)\, a_2 a_6}{a_2^2 a_4^2}, \qquad q_3 = \frac{a_6}{a_4}$$

Это дает обобщенную формулу типа Бэрстоу для многочлена шестого порядка. Аналогично можно получить формулы для восьмого порядка и т. д. Следует заметить, что формулы будут давать хорошую точность лишь при условии, что переход от точных формул (A) к приближенным (A′) не вносит большой погрешности.

В качестве примера возьмем многочлен

$$D(\lambda) = \lambda^6 + 101.1\lambda^5 + 1121.1\lambda^4 + 2212\lambda^3 + 11300\lambda^2 + 3000\lambda + 10000$$

Применяя выведенную обобщенную формулу, получим

$$D(\lambda) = (\lambda^2 + 101\lambda + 1121)(\lambda^2 + 1.06\lambda + 10.3)(\lambda^2 + 0.084 + 0.89)$$

Точное разложение будет

$$D(\lambda) = (\lambda^2 + 100\lambda + 1000)(\lambda^2 + \lambda + 10)(\lambda^2 + 0.1\lambda + 1)$$

Поступила в редакцию
28 II 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэродинамика. Под ред. В. Ф. Дюренд. Оборонгиз. 1939. Т. V. Стр. 196.

ИСПРАВЛЕНИЕ ОПЕЧАТКИ В СТАТЬЕ В. В. СОКОЛОВСКОГО

Плоская задача теории пластичности в распределении напряжений вокруг отверстия (ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 2). В этой статье допущена опечатка. В формулах (2.9) и (2.10) в качестве аргумента sin и cos

$$\text{вместо} \quad \left(\frac{\sqrt{3}\,p}{2\chi} - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{должно быть} \quad \left(\frac{\sqrt{3}\,p}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

В. А. Флорин. Расчеты оснований гидротехнических сооружений. Стройиздат. 1948, 188 стр.

Книга В. Ф. Флорина начинается с изложения соображений, которые должны быть приняты при построении модели основания гидротехнического сооружения, т. е. грунта. При этом указывается, что в случае, когда напряжения, возникающие в основании, не слишком велики, для их определения могут применяться методы теории упругости. При больших нагрузках в грунте могут возникнуть значительные области предельного равновесия. Если эти области велики, то для определения напряжений необходимо пользоваться методами статики сыпучей среды. Однако при определении осадок, т. е. перемещений, автор не считает возможным пользоваться моделью изотропного упругого тела, как это он делает при определении напряжений. Для этого он пользуется другими соображениями, которые изложены в главе IV. Принимается некоторая нелинейная зависимость между объемным сжатием и давлением, а также ряд других предположений, которые отличаются от исходных предпосылок, принятых для нахождения напряжений. Затем берутся значения напряжений, которые получены в предположении, что между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, и определяются деформации по данному напряженному состоянию на основании указанного выше предположения о зависимости нелинейной. Таким образом, в работе не дано единой модели, которая была бы пригодна и для определения напряжений, возникающих в грунте, и для определения деформаций, имеющих место при этом.