Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

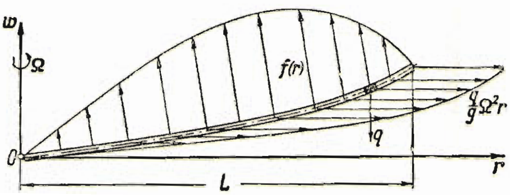
ИЗГИБ РАСТЯГИВАЕМОГО ЦЕНТРОБЕЖНЫМИ СИЛАМИ СТЕРЖНЯ

И. Е. Сахаров

(Москва)

Пусть однородный стержень постоянного сечения вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Стержень будет нагружен центробежной силой, весом и распределенной поперечной нагрузкой (фиг. 1).

Введем обозначения: Ω — угловая скорость, q — вес единицы длины стержня, g — ускорение силы тяжести, L — длина стержня. B — жесткость при изгибе, $f(r)$ — интенсивность распределенной нагрузки, включая вес q. Координата r измеряется вдоль прямой, перпендикулярной вертикальной оси. Прогиб стержня $w(r)$ считаем малым, поэтому квадратом производной dw/dr по сравнению с единицей пренебрегаем и полагаем $ds = dr$. Для растягивающей силы в стержне имеем



Фиг. 1

$$T(r) = \int_r^L \frac{q}{g}\,\Omega^2 r'\,dr' = q\,\frac{\Omega^2}{2g}(L^2 - r^2) \tag{1}$$

Уравнение равновесия растягиваемого и изгибаемого стержня будет[1]

$$B\frac{d^4 w}{dr^4} - \frac{d}{dr}\left[T(r)\frac{dw}{dr}\right] = f(r) \tag{2}$$

Граничные условия на заделанном ($r = 0$) и свободном ($r = L$) концах стержня соответственно будут (на конце $r=0$ можно рассмотреть также шарнир)

$$w(0) = 0, \qquad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=0} = 0, \qquad \left(\frac{d^2 w}{dr^2}\right)_{r=L} = 0, \qquad \left(\frac{d^3 w}{dr^3}\right)_{r=L} = 0 \tag{3}$$

При $B = 0$ и $f(r) = \lambda^2 w(r) + f_1(r)$ уравнение (2) переходит в неоднородное уравнение Лежандра. Задача решена Кнезером.

Проинтегрируем уравнение (2) и воспользуемся граничным условием $d^3 w / dr^3 = 0$ при $r = L$. Получим

$$\frac{d^2 W}{dr^2} - \alpha^2 (L^2 - r^2)\, W(r) = \Phi(r) \tag{4}$$

Здесь

$$\alpha^2 = q\,\frac{\Omega^2}{2\,gB}, \qquad \Phi(r) = -\frac{1}{B}\int_r^L f(r')\,dr', \qquad \frac{dw}{dr} = W(r) \tag{5}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение. Замена зависимого переменного $W(r) = \exp(-{}^1/_2\, i\alpha r^2)\, X(r)$ и замена независимого переменного $x = i\alpha r^2$ дают

$$x\,\frac{d^2 X}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\frac{dX}{dx} - \frac{1 - i\alpha L^2}{4}\, X = 0 \tag{6}$$

Решениями уравнения (6) будут конфлюэнтные гипергеометрические функции [2]

$$X_1 = {}_1F_1\left(\frac{1 - i\alpha L^2}{4}, \frac{1}{2}, x\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi(1 + 4j - i\alpha L^2)\, x^n}{\Pi(1 + 2j)\, 2^n\, n!}$$

$$X_2 = x^{1/2}\, {}_1F_1\left(\frac{3 - i\alpha L^2}{4}, \frac{3}{4}, x\right) = x^{1/2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi(3 + 4j - i\alpha L^2)\, x^n}{\Pi(3 + 2j)\, 2^n\, n!}\right\} \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем символ Π означает произведение от $j = 0$ до $j = n - 1$.

Вернемся к переменным W и r, отбросим несущественную постоянную $i^{1/2}$ перед вторым решением и отделим действительную и мнимую части. Тогда

$$W_1(r) = \cos\left(\frac{\alpha r^2}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(-\frac{\alpha r^2}{2} + \varphi_n\right) \frac{\alpha^n r^{2n}}{2^n\, n!} -$$

$$- i\left\{\sin\left(\frac{\alpha r^2}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\left(-\frac{\alpha r^2}{2} + \varphi_n\right) \frac{\alpha^n r^{2n}}{2^n\, n!}\right\}$$

$$W_2(r) = \sqrt{\alpha}\, r \cos\left(\frac{\alpha r^2}{2}\right) + \sqrt{\alpha}\, r \sum_{n=1}^{\infty} K_n' \cos\left(-\frac{\alpha r^2}{2} + \varphi_n'\right) \frac{\alpha^n r^{2n}}{2^n\, n!} - \tag{8}$$

$$- i\sqrt{\alpha}\, r\left\{\sin\left(\frac{\alpha r^2}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} K_n' \sin\left(-\frac{\alpha r^2}{2} + \varphi_n'\right) \frac{\alpha^n r^{2n}}{2^n\, n!}\right\}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi_n = \frac{n\pi}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{-\alpha L^2}{1 + 4j}, \qquad K_n = \frac{\Pi\left[\alpha^2 L^4 + (1 + 4j)^2\right]^{1/2}}{\Pi(1 + 2j)}$$

$$\varphi_n' = \frac{n\pi}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{-\alpha L^2}{3 + 4j}, \qquad K_n' = \frac{\Pi\left[\alpha^2 L^4 + (3 + 4j)^2\right]^{1/2}}{\Pi(3 + 2j)}$$

Мнимые части и их первые производные равны нулю при $r = 0$. Из уравнения, которому они удовлетворяют, следует, что вторые производные мнимых частей равны нулю, а следовательно, и все последующие производные равны нулю. Отсюда вытекает, что мнимые части тождественно равны нулю.

Решение неоднородного уравнения (4) получается из общего решения однородного уравнения варьированием постоянных

$$W(r) = -W_1(r) \int_0^r \frac{W_2(r')}{\Delta_0} \Phi(r')\, dr' +$$

$$+ W_2(r) \int_0^r \frac{W_1(r')}{\Delta_0} \Phi(r')\, dr' + C_1 W_1(r) + C_2 W_2(r) \tag{9}$$

Здесь вронскиан решений $\Delta_0 = \text{const}$. Постоянная $C_1 = 0$ согласно граничному условию при $r = 0$. Постоянная C_2 определяется из условия $d^2 w / dr^2 = 0$ при $r = L$:

$$C_2 = \frac{1}{\Delta_0} \frac{W_1(L)}{W_2(L)} \int_0^L W_2(r')\, \Phi(r')\, dr' - \frac{1}{\Delta_0} \int_0^L W_1(r')\, \Phi(r')\, dr' \tag{10}$$

Прогиб $w(r)$ находим интегрированием выражения (10), а третья произвольная постоянная определяется из условия равенства нулю прогиба при $r = 0$.

Поступила в редакцию
15 X 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Саусвелл Р. В. Введение в теорию упругости. ГИИЛ. 1948.
2. Wells C. and Spence R. Jour. of Math. and Phys. 1945. Vol. XXIV. No 3—4.