Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ В ЗАМКНУТОМ ВИДЕ

К. Н. Шевченко

(Москва)

Исследование упруго-пластической задачи о распределении напряжений и деформаций в толстостенном цилиндре с учетом и без учета сжимаемости и упрочнения материала можно найти в работах В. В. Соколовского [1] и Н. М. Беляева [2]. Здесь излагается способ приближенного построения решения в замкнутой форме.

§ 1. Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим задачу о распределении напряжений и деформаций в толстостенном цилиндре при условии плоской деформации, находящемся под действием осесимметричной нагрузки.

Уравнения равновесия и совместности деформаций имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{\rho}=0, \qquad \frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial\rho}+\frac{\varepsilon_\theta-\varepsilon_r}{\rho}=0 \tag{1.1}$$

Уравнения пластичности можно представить в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{\alpha\sigma}{2G}+\frac{\psi}{2G}(\sigma_r-\sigma)\\ \varepsilon_\theta&=\frac{\alpha\sigma}{2G}+\frac{\psi}{2G}(\sigma_\theta-\sigma)\\ \varepsilon_z&=\frac{\alpha\sigma}{2G}+\frac{\psi}{2G}(\sigma_z-\sigma)\end{aligned} \qquad \left(\sigma=\frac{\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z}{3},\ \alpha=\frac{1-2\nu}{1+\nu}\right) \tag{1.2}$$

Функция ψ подлежит в дальнейшем определению.

В рассматриваемом случае $\varepsilon_z=0$, поэтому

$$\sigma_z=\frac{\psi-\alpha}{\alpha-2\psi}(\sigma_r+\sigma_\theta) \tag{1.3}$$

После подстановки (1.3) в первые два уравнения (1.2) имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{\psi}{4G}\left[\frac{3\alpha(\sigma_r+\sigma_\theta)}{\alpha+2\psi}-(\sigma_\theta-\sigma_r)\right]\\ \varepsilon_\theta&=\frac{\psi}{4G}\left[\frac{3\alpha(\sigma_r+\sigma_\theta)}{\alpha+2\psi}+(\sigma_\theta-\sigma_r)\right]\end{aligned} \tag{1.4}$$

Пусть a и b — соответственно внутренний и внешний радиусы трубы. Введем безразмерные величины $r/b=\rho$ и $a/b=\gamma$.

Граничные условия в рассматриваемом случае будут

$$\begin{aligned}\sigma_r&=-kp \quad \text{при} \quad \rho=\gamma\\ \sigma_r&=-kq \quad \text{при} \quad \rho=1\end{aligned} \tag{1.5}$$

На границе пластической и упругой областей должно выполняться условие непрерывности компонентов напряжения и деформации и, кроме того, условие

$$\psi(\rho_0) = 1 \tag{1.6}$$

Из уравнений пластичности (1.2) вытекает соотношение между интенсивностью деформации сдвига E и интенсивностью напряжения:

$$E = \frac{\psi}{G} S \tag{1.7}$$

Кривую упрочнения материала аппроксимируем линейной функцией

$$S = k(mE + \mu) \tag{1.8}$$

где μ и m — константы. Если не учитывать площадки текучести на диаграмме механического состояния материала, то между m и μ существует следующая линейная зависимость:

$$n + \mu = 1 \qquad \left(n = \frac{k}{G} m\right) \tag{1.9}$$

Подставив в известное выражение интенсивности напряжений S значение σ_z согласно (1.3), получим

$$S = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \sqrt{1 + \frac{3\alpha^2(\sigma_r + \sigma_\theta)^2}{(\sigma_\theta - \sigma_r)^2(2\psi + \alpha)^2}} \tag{1.10}$$

Величина ψ в пластической области больше единицы и для толстостенных цилиндров на внутренней его поверхности, где пластическая деформация максимальна, достигает больших значений; так, например, значения ψ будут при $a/b = 0.1$ порядка 10^2. Можно показать, что дробь под радикалом (1.10) для $\nu = {}^1/_3$ во всяком случае меньше ${}^1/_{27}$.

Таким образом, без большой погрешности для S можно принять

$$S = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \tag{1.11}$$

Решая систему (1.7), (1.8) и (1.11) относительно ψ, получим

$$\psi = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2k\mu}{\sigma_\theta - \sigma_r}\right) \tag{1.12}$$

Подставим ψ в выражения для компонентов деформации (1.4). Имеем

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r - 2k\mu}{4Gn}\left[\frac{3\alpha n(\sigma_\theta + \sigma_r)}{(\sigma_\theta - \sigma_r)(2 + n\alpha) - 4k\mu} - 1\right] \tag{1.13}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r - 2k\mu}{4Gn}\left[\frac{3\alpha n(\sigma_\theta + \sigma_r)}{(\sigma_\theta - \sigma_r)(2 + n\alpha) - 4k\mu} - 1\right] \tag{1.14}$$

Таким образом, решение задачи свелось к совместному решению системы четырех уравнений (1.1), (1.13) и (1.14) и удовлетворению граничным условиям (1.5). (1.6).

§ 2. Построение решения. Один из двух искомых интегралов системы (1.1) легко получим следующим путем:

Умножим первое уравнение (1.1) на $1/2\,Gn$ и сложим со вторым; получим

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varepsilon_\theta + \frac{\sigma_r}{2Gn}\right) + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta + 2Gn(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)}{2Gn\rho} = 0 \tag{2.1}$$

Далее из (1.13) находим

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \frac{1}{2Gn}(\sigma_\theta - \sigma_r - 2k\mu) \tag{2.2}$$

Заменяя числитель второго члена в уравнении (2.1) выражением (2.2) и интегрируя полученное уравнение, находим

$$\varepsilon_\theta + \frac{\sigma_r}{2Gn} = \frac{k\mu}{Gn}\log\rho + C \qquad (C = \text{const}) \tag{2.3}$$

Исключая ε_θ из (1.14) и (2.3), находим

$$\sigma_\theta = \frac{k\mu A \pm \sqrt{3k^2\mu^2\alpha^2 B + [(1+2n\alpha)\sigma_r - k\mu D]^2}}{1+2n\alpha} \tag{2.4}$$

где

$$A = (2+n\alpha)(C_1 + \log\rho) + 2(1+n\alpha), \qquad B = 2C_1 + 2\log\rho + 1$$

$$D = (2+n\alpha)(C_1 + \log\rho) - n\alpha \qquad C_1 = CGn / k\mu$$

Перед радикалом в уравнении (2.4) следует взять знак минус, так как при $\alpha = 0$ решение (2.4) должно перейти в известное решение для случая, когда сжимаемость материала не учитывается.

Первый член в подрадикальном выражении (2.4), содержащий множитель $n^2\alpha^2$, мал и его можно отбросить. Тогда имеем

$$\sigma_\theta = \frac{k\mu(2+n\alpha)(1+2C_1+2\log\rho)}{1+2n\alpha} - \sigma_r \tag{2.5}$$

Найденное выражение σ_θ подставим в первое уравнение (1.1). Имеем

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{2\sigma_r}{\rho} - \frac{k\lambda^2(1+2C_1+2\log\rho)}{\rho} = 0 \qquad \left(\lambda^2 = \frac{\mu(2+n\alpha)}{1+2n\alpha}\right) \tag{2.6}$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$\sigma_r = k\lambda^2(C_1 + \log\rho) + C_2\rho^{-2} \qquad (C_2 = \text{const}) \tag{2.7}$$

Выражение для компоненты σ_θ находим из уравнения (2.5):

$$\sigma_\theta = k\lambda^2(1 + C_1 + \log\rho) - C_2\rho^{-2} \tag{2.8}$$

Для функции ψ согласно (1.12), (2.7) и (2.8) находим

$$\psi = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{2k\mu}{k\lambda^2 + 2C_2\rho^{-2}}\right] \tag{2.9}$$

Решение аналогичной упругой задачи (полагая на внешней поверхности цилиндра $q = 0$) получим в виде

$$\sigma_r = kC_3(1-\rho^{-2}), \qquad \sigma_\theta = kC_3(1+\rho^{-2}), \qquad \sigma_z = 2k\nu C_3 \tag{2.10}$$

где C_3 — произвольная константа.

Обозначим радиус границы распространения пластической области через ρ_0.

Для определения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 и радиуса пластической зоны ρ_0 граничные условия (1.5) и (1.6) дают четыре уравнения, откуда находим

$$C_1 = \frac{\rho_0^2}{\lambda^2} - \log\rho - \frac{1}{2}, \qquad C_2 = \frac{k(\lambda^2-2)}{2}\rho_0^2, \qquad C_3 = \rho_0^2$$

$$2p = \lambda^2 - 2\rho_0^2 + 2\lambda^2\log\frac{\rho_0}{\gamma} - (\lambda^2 - 2)\left(\frac{\rho_0}{\gamma}\right)^2 \tag{2.11}$$

Подставим найденные значения произвольных постоянных в выражения (2.7), (2.8) для компонентов напряжения в пластической и в (2.10) упругой областях.

Получим

$$\sigma_r = k\left[\rho_0^2 - \frac{\lambda^2}{2} + \lambda^2 \log\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2}(\lambda^2-2)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right]$$
$$\sigma_\theta = k\left[\rho_0^2 + \frac{\lambda^2}{2} + \lambda^2 \log\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2}(\lambda^2-2)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right] \tag{2.12}$$

Функция ψ согласно (2.9) имеет вид

$$\psi = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{2\mu}{\lambda^2 - (\lambda^2-2)(\rho_0/\rho)^2}\right] \tag{2.13}$$

Выражение для компонент σ_z в пластической области будет

$$\sigma_z = \frac{2k\{[\lambda^2-(\lambda^2-2)(\rho_0/\rho)^2](1-\alpha n)-2\mu\}}{[\lambda^2-(\lambda^2-2)(\rho_0/\rho)^2](2+n\alpha)-4\mu}\left(\rho_0^2+\lambda^2\log\frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{2.14}$$

Компоненты напряжения в упругой зоне согласно (2.10) и (2.11) будут

$$\sigma_r = k\rho_0^2(1-\rho^{-2}), \qquad \sigma_\theta = k\rho_0^2(1+\rho^{-2}), \qquad \sigma_z = -2k\nu\rho_0^2 \tag{2.15}$$

Компоненты деформаций в пластической области определяем из уравнений (2.2) и (2.3). Имеем

$$\varepsilon_r = \frac{k}{2Gn}\left[(2\mu-\lambda^2)\left(\frac{\rho_0^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}+\log\frac{\rho}{\rho_0}\right)+\frac{1}{2}(\lambda^2-2)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right]$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{k}{2Gn}\left[(2\mu-\lambda^2)\left(\frac{\rho_0^2}{\lambda^2}-\frac{1}{2}+\log\frac{\rho}{\rho_0}\right)-\frac{1}{2}(\lambda^2-2)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right] \tag{2.16}$$

Оценить точность полученного решения можно путем сравнения выражений для компонентов деформаций ε_r, определенных из уравнений (2.16) и (1.13). Имеем

$$\varepsilon_r' - \varepsilon_r'' = \frac{3k\mu n\alpha^2[\rho_0^2+\lambda^2\log(\rho/\rho_0)]}{G(2+n\alpha)\{[\lambda^2-(\lambda^2-2)(\rho_0/\rho)^2](2+n\alpha)-4\mu\}} \tag{2.17}$$

где штрихи соответственно относятся к выражениям (2.16) и (1.13).

Эта разность достигает наибольшего значения в точках границы пластичности, т. е. при $\rho=\rho_0$; имеем

$$[\varepsilon_r' - \varepsilon_r'']_{\rho=\rho_0} = \frac{3k\mu\alpha^2\rho_0^2}{2G(2+n\alpha)(2+\alpha)} \tag{2.18}$$

То же самое выражение получим и для компоненты ε_θ.

Выражение (2.18) будет одновременно определять и величину разрыва компонентов деформации на границе из пластической и упругой областей.

Решения этой же задачи для случая несжимаемого материала ($\nu = 1/2$) получим, полагая $\alpha = 0$ в (2.12), (2.14) и (2.16).

§ 3. Решение упруго-пластической задачи для идеальной пластичности. Для интенсивности напряжения примем приближенное выражение (1.11). Тогда условие пластичности будет иметь вид

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k \tag{3.1}$$

Решая первое уравнение (1.1) и (3.1), находим компоненты напряжения:

$$\sigma_r = 2k(C_1+\log\rho), \qquad \sigma_\theta = 2k(C_1+1+\log\rho) \qquad (C_1=\text{const}) \tag{3.2}$$

Для определения функции ψ, ε_r и ε_θ имеем два уравнения пластичности (1.4) и уравнение совместности деформаций (1.1). Одно из двух уравнений пластичности (1.4), принимая во внимание условие (3.1), представим в виде

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \frac{k\psi}{G} \tag{3.3}$$

Эту разность $\varepsilon_\theta - \varepsilon_r$ подставим в уравнение совместности (1.1); получим

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \frac{k\psi}{G\rho} = 0 \tag{3.4}$$

Второе уравнение пластичности (1.4) в этом случае примет вид

$$\varepsilon_\theta = \frac{k\psi}{2G}\left[1 + \frac{3\alpha(\sigma_r + \sigma_\theta)}{2k(\alpha + 2\psi)}\right] \tag{3.5}$$

Подставим в уравнение (3.5) выражение для компонент напряжения σ_r и σ_θ согласно (3.2). Получим

$$\varepsilon_\theta = \frac{k\psi}{2G}\left[1 + \frac{3\alpha(1 + 2C_1 + 2\log\rho)}{\alpha + 2\psi}\right] \tag{3.6}$$

Определив отсюда $d\varepsilon_\theta/d\rho$ и подставив в уравнение (3.4), получим уравнение первого порядка относительно функции ψ

$$\left[1 + \frac{3\alpha^2(1 + 2C_1 + 2\log\rho)}{(\alpha + 2\psi)^2}\right]\psi' + \frac{4\psi(2\alpha + \psi)}{\rho(\alpha + 2\psi)} = 0 \tag{3.7}$$

Второй член в квадратных скобках, содержащий множитель α^2, мал по сравнению с единицей и им, следовательно, можно пренебречь. Окончательно будем иметь

$$\psi' + \frac{4\psi(2\alpha + \psi)}{(\alpha + 2\psi)\rho} = 0 \tag{3.8}$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$\psi^{1/2}(\psi + 2\alpha)^{3/2} = C_2\rho^{-4} \tag{3.9}$$

Произвольные постоянные, входящие в уравнения (3.2) и (3.9), определим из граничных условий на внутренней поверхности и из условия (1.6). Получим

$$C_1 = -\frac{p}{2} - \log\gamma, \qquad C_2 = (1 + 2\alpha)^{3/2}\rho_0^4 \tag{3.10}$$

Произвольную постоянную C_3 в решении (2.10) для упругой области и радиус пластической зоны ρ_0 определим из условия непрерывности компонентов напряжения σ_r и σ_θ на границе. Получим

$$C_3 = \rho_0^2, \qquad \rho_0^2 + 2\log\frac{\rho_0}{\gamma} + p - 1 = 0 \tag{3.11}$$

Окончательно компоненты напряжения для случая идеальной пластичности в пластической области будут иметь вид

$$\sigma_r = k\left[\rho_0^2 - 1 + 2\log\frac{\rho}{\rho_0}\right], \qquad \sigma_\theta = k\left[\rho_0^2 + 1 + 2\log\frac{\rho}{\rho_0}\right] \tag{3.12}$$

Функция ψ определяется из уравнения

$$\psi^{1/2}\left(\frac{\psi + 2\alpha}{1 + 2\alpha}\right)^{3/2} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4 \tag{3.13}$$

Компонента напряжения σ_z определяется согласно (1.3):

$$\sigma_z = \frac{2k(\psi - \alpha)}{\alpha + 2\psi}\left(\rho_0^2 + 2\log\frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{3.14}$$

Легко проверить, что σ_z будет непрерывна на границе пластической области.

Компоненты деформации в пластической области определяем из (1.4). Получим

$$\varepsilon_r = \frac{k\psi}{2G}\left[\frac{3\alpha}{\alpha + 2\psi}\left(\rho_0^2 + 2\log\frac{\rho}{\rho_0}\right) - 1\right], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{k\psi}{2G}\left[\frac{3\alpha}{\alpha + 2\psi}\left(\rho_0^2 + 2\log\frac{\rho}{\rho_0}\right) + 1\right] \tag{3.15}$$

Компоненты деформации (3.15) на границе пластической и упругой областей изменяются непрерывно. Это объясняется тем, что в отличие от решения предыдущего параграфа приближенное выражение функции ψ на границе пластичности становится точным ($\psi = 1$).

Компоненты напряжения в упругой области имеют тот же вид, что и в предыдущем случае (2.15).

Радиальное перемещение определяется формулой $u = \rho\varepsilon_\theta$. Обычно принято вычислять вместо u величину, ей пропорциональную [1]:

$$U = \frac{G}{k} u = \rho \frac{G}{k} \varepsilon_\theta \tag{3.16}$$

где ε_θ определяется из уравнения (3.15).

§ 4. Оценка приближенного метода. Некоторое представление о точности предложенного способа дают следующие результаты вычислений.

1. Приводим отношения точных и приближенных значений интенсивности напряжения S по толщине цилиндра в момент перехода всей трубы в пластическое состояние для задач, рассмотренных в § 2 и 3:

	$\rho =$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
(С упрочнением)	$\frac{S_m}{S_n} =$	1.0000	1.0000	1.0004	1.0022	1.0072	1.0184
(Идеальная пластичн.)	$\frac{S_m}{S_n} =$	1.0000	1.0000	1.001	1.002	1.007	1.018

Здесь S_m — интенсивность напряжения сдвига, вычисленная по формуле (1.10); приближенное значение S_n вычислено по формуле (1.11). Для идеальной пластичности компоненты σ_θ и σ_r подсчитывались согласно (3.12), а ψ — согласно (1.13), при учете упрочнения σ_θ и σ_r вычислялись согласно (2.12), а ψ — согласно (2.13).

Вычисления велись для

$$\nu = \frac{1}{3}, \quad \rho_0 = 1, \quad \gamma = \frac{a}{b} = 0.5 \quad \mu = 0.95, \quad n = 0.05 \tag{4.1}$$

Сравнение показывает что погрешность для S во всей области деформации не превышает 2 %.

2. Приводим значения разности $\varepsilon_r' - \varepsilon_r''$, вычисленные согласно (2.17), при тех же значениях (4.1), входящих величин:

$\rho =$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\frac{G}{k}(\varepsilon_r' - \varepsilon_r'') =$	− 0.0015	0.0003	0.003	0.009	0.013	0.02

Отсюда следует, что точность решения в самых крайних точках определяется несколькими процентами от величины упругой деформации k / G.

Предлагаемый приближенный способ, как показывают вычисления, дает также хорошее совпадение с результатами решенных В. В. Соколовским [1] задач для случая идеальной пластичности.

Поступила в редакцию
21 I 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР. 1946.
2. Беляев Н. М. Известия АН СССР. Отд. технических наук. 1938. № 2, 4.