Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

**В. В. Соколовский**
(Москва)

Пластическое плоское деформированное состояние описывается компонентами напряжения $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\tau_{xy}$, так как компоненты $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

и условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \qquad k = \sigma_s / \sqrt{3} \tag{2}$$

где $\sigma_s$ — предел текучести при простом растяжении, составляют основную систему уравнений пластического плоского деформированного состояния [1].

Условие (2) тождественно удовлетворяется, если ввести новые переменные $\varphi$ и $\omega$, связанные с компонентами напряжения следующим образом:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = k(\Lambda + 2\omega \pm \cos 2\varphi), \qquad \tau_{xy} = k \sin 2\varphi \tag{3}$$

где $\varphi$ — угол между наибольшим (алгебраически) главным нормальным напряжением и осью $x$, $\Lambda$ — произвольная, но наперед выбранная безразмерная величина.

Наряду с величинами $\varphi$ и $\omega$ удобно пользоваться также величинами $\xi$ и $\eta$:

$$\xi = \omega + \varphi, \qquad \eta = \omega - \varphi, \qquad 2\omega = \xi + \eta, \qquad 2\varphi = \xi - \eta \tag{4}$$

При подстановке выражений (3) условие (2) удовлетворяется тождественно, а уравнения (1) дают

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

Произведем замену переменных, принимая за аргументы $\xi$ и $\eta$, а за искомые функции $x$ и $y$. Формулы преобразования будут

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

где через $\Delta$ обозначен определитель:

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Получим следующую систему уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{6}$$

хорошо известную в теории пластичности [1].

Введем вместо $x$, $y$ новые переменные $X$, $Y$:

$$X = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \qquad Y = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$
$$x = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi, \qquad y = X \cos \varphi + Y \sin \varphi \tag{7}$$

а также новые переменные $p$ и $q$:

$$X = p \exp(+\omega), \qquad Y = q \exp(-\omega) \tag{8}$$

Уравнения (6) после замены $x$, $y$ на $p$, $q$ будут

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = + T \frac{\partial p}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial q}{\partial \xi} = - T \frac{\partial p}{\partial \xi}, \qquad T = \exp(\xi + \eta) \tag{9}$$

Займемся теперь приближенным интегрированием уравнений (9), используя идею С. А. Христиановича в теории сверхзвуковых течений газа [2].

Заметим, что в рассматриваемом интервале изменения величины $2\omega = \xi + \eta$ функция $T$ может быть с достаточной точностью аппроксимирована степенной функцией следующего вида:

$$T \approx [A(\xi + \eta + a)]^{2n}$$

где $A$ и $a$ — постоянные, $n$ — целые положительные или отрицательные числа.

Обычно в задачах теории пластичности интервал для изменения величины $2\omega = \xi + \eta$ известен, поэтому в каждой конкретной задаче могут быть выбраны наиболее подходящие постоянные $A$ и $a$.

Приближенное представление функции $T$ дает возможность заменить уравнения (9) следующими уравнениями:

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = + [A(\xi + \eta + a)]^{2n} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial q}{\partial \xi} = - [A(\xi + \eta + a)]^{2n} \frac{\partial p}{\partial \xi} \tag{10}$$

Исключая из этой системы $q$ или $p$, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{n}{\xi + \eta + a} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = 0 \tag{11}$$

или

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{n}{\xi + \eta + a} \left( \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \eta} \right) = 0 \tag{12}$$

Эти уравнения изучены Дарбу — они решаются в замкнутом виде.

При $n > 0$ функцию $p$ следует определять из уравнения (11), а функцию $q$ из уравнений (10); при $n < 0$ функцию $q$ удобно находить из уравнения (12), а функцию $p$ из уравнений (10). Для $n = +1$ функции $p$ и $q$ имеют вид

$$p = \frac{\Phi'(\xi) + \Psi'(\eta)}{A(\xi + \eta + a)} \tag{13}$$

$$q = 2A[\Phi(\xi) - \Psi(\eta)] - A(\xi + \eta + a)[\Phi'(\xi) - \Psi'(\eta)] \tag{14}$$

где $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\eta)$ — произвольные функции.

Для $n = -1$ формулы (13) и (14) сохраняют силу при замене $p$ на $q$, а $q$ на $p$.

Приведенные уравнения позволяют с достаточной степенью точности получить решения плоских задач теории пластичности в замкнутом виде.

Поступила в редакцию
26 III 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР. 1946.
2. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа. ПММ. 1947. Т. VI. Вып. 2.