Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ЗАМЕТКИ

О ПРИМЕНЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Д. Б. Тополянский

(Днепропетровск)

В этой работе устанавливается, что при приближенном решении задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа по методу Ритца одновременно с минимизацией обобщенного интеграла Дирихле минимизируется обобщенный интеграл Дирихле для погрешности. Это обстоятельство приводит к расширению применения метода Треффтца, рассматривавшего частную задачу Дирихле для уравнения Лапласа. В работе дана двусторонняя оценка обобщенного интеграла Дирихле. Как частный случай получается двусторонняя оценка интеграла Дирихле[1].

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа:

требуется найти функцию $u(x, y)$, принимающую на контуре L некоторой ограниченной области G заданные значения

$$\frac{u}{L} = u_0 \tag{1}$$

а внутри области удовлетворяющую уравнению

$$M[u] \equiv (pu_x)_x + (pu_y)_y - q^* u = 0 \tag{2}$$

где

$$q^* = q - a_x - b_y$$

При этом предполагается:

1) что p, q, a, b, u_0 являются непрерывными функциями в области $G + L$;

2) что q имеет непрерывные производные первого порядка, a и b — непрерывные производные до второго порядка, p — непрерывные производные до третьего порядка в области G;

3) что $p > 0$ и $q \geqslant 0$ в области $G + L$.

Введя линейные функциональные пространства с квадратичной метрикой[2], применяя известные интегральные формы H, D и E к определению классов функций h и d и подпространств d° и f, Гильберт и Курант между прочим показали, что краевая задача о нахождении функции u, удовлетворяющей уравнению (2), принадлежащей пространству f, для которой $u - u_0$ принадлежит подпространству d° [уточненное условие (1)], эквивалентна такой вариационной задаче:

требуется найти функцию u, которая удовлетворяет граничному условию (1) (точнее $u - u_0$ принадлежит подпространству d°) *и для которой достигает минимума интегральное выражение*

$$E[u] \equiv D[u] + \iint\limits_G (2\,auu_x + 2\,buu_y + qu^2)\,dx\,dy \tag{3}$$

где

$$D[u] \equiv \iint\limits_G p\,(u_x{}^2 + u_y{}^2)\,dx\,dy \tag{4}$$

В отношении всего подинтегрального выражения для $E[u]$ вводится так называемое *условие определенности*: предполагается, что для заданной области G существует такая положительная постоянная μ, что для любой точки области $G+L$ и при любых значениях параметров ξ, η, ζ имеет место неравенство

$$p(\xi^2+\eta^2)+2a\xi\zeta+2b\eta\zeta+q\zeta^2 \geqslant \mu(\xi^2+\eta^2)$$

Пусть, следуя методу Ритца или родственным ему вариационным методам, найдено приближенное решение сформулированной краевой задачи в виде

$$u^*=u_1(x,y)+[c_1^*t_1^*(x,y)+\cdots+c_n^*t_n^*(x,y)] \tag{5}$$

где u_1 удовлетворяет условию (1), t_k^* $(k=1,\ldots,n)$ — совокупность функций, исчезающих на контуре L, а коэффициенты c_k^* $(k=1,\ldots,n)$ получены из условия минимизации интеграла $E[u^*]$.

Если обозначить через ω погрешность приближенного решения, т. е.

$$\omega=u^*-u \tag{6}$$

то, следовательно, на контуре $\omega=0$, и пользуясь формулой Грина, получим

$$E[u^*]=E[u+\omega]=E[u]+E[\omega] \tag{7}$$

т. е. два неотрицательных интегральных выражения $E[u^*]$ и $E[\omega]$ разнятся лишь на постоянную неотрицательную величину $E[u]$.

Таким образом, мы приходим к выводу:

при применении метода Ритца для приближенного решения сформулированной краевой задачи одновременно с минимизацией интегрального выражения $E[u^*]$ минимизируется также интегральное выражение $E[\omega]$.

Это обстоятельство приводит к другому вариационному методу. Будем приближенное решение данной краевой задачи искать в виде линейной комбинации функций

$$u^{**}=c_1^{**}t_1^{**}(x,y)+\ldots+c_n^{**}t_n^{**}(x,y) \tag{8}$$

удовлетворяющих дифференциальному уравнению (2), определив коэффициенты из условия минимизации интегрального выражения $E[\omega_1)$, т. е.

$$\frac{\partial E[\omega_1]}{\partial c_k^{**}}=0 \qquad (\omega_1=u^{**}-u) \tag{9}$$

При этом предполагается, что t_k^{**} $(k=1,\ldots,n)$ принадлежит пространству f, а $u^{**}-u_0$ — пространству d.

Воспользовавшись формулой Грина, для нахождения коэффициентов c_k^{**} $(k=1,\ldots,n)$ получим систему уравнений

$$\int_L (u^{**}-u_0)\left[p\frac{\partial t_k^{**}}{\partial\nu}+t_k^{**}\left(a\frac{\partial x}{\partial\nu}+b\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)\right]ds=0$$

где ν — внешняя нормаль; или

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^{**}\int_L t_j^{**}\left[p\frac{\partial t_k^{**}}{\partial\nu}+t_k^{**}\left(a\frac{\partial x}{\partial\nu}+b\frac{y\partial}{\partial\nu}\right)\right]ds=$$
$$=\int_L u_0\left[p\frac{\partial t_k^{**}}{\partial\nu}+t_k^{**}\left(a\frac{\partial x}{\partial\nu}+b\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)\right]ds \tag{10}$$

Таким образом, расширяется применение метода Треффтца, рассматривавшего частную задачу Дирихле, а именно, для уравнения Лапласа. В этом частном случае из формулы (7) при $p=1$, $a=b=q=0$ следует, что одновременно с минимизацией интеграла Дирихле по Ритцу минимизируется также интеграл Дирихле для погрешности.

Обратимся теперь к вопросу об оценке интегрального выражения E.

Теорема о минимуме интеграла E устанавливает, что из всей совокупности функций U^*, непрерывных вместе с их первыми и вторыми производными в области G, ограниченной контуром L, и принимающих на L одну и ту же совокупность значений u_0, функция, удовлетворяющая уравнению (2), есть та, которая обращает в минимум интеграл E.

Таким образом, если u^* — любая, не удовлетворяющая уравнению (2) функция, принадлежащая совокупности U^*, а u — функция, принадлежащая этой совокупности и удовлетворяющая уравнению (2), то имеет место неравенство

$$E[u] < E[u^*] \tag{11}$$

Докажем теперь лемму, дающую для интеграла E оценку с другой стороны, а именно:

из всей совокупности функций U^{**}, удовлетворяющих внутри области G дифференциальному уравнению (1) *и на контуре L, ограничивающем данную область, условию*

$$\int\limits_L (U^{**} - u_0)\left[p\frac{\partial U^{**}}{\partial\nu} + U^{**}\left(a\frac{\partial x}{\partial\nu} + b\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)\right]ds = 0 \tag{12}$$

где u_0 — некоторая данная совокупность значений, а ν — внешняя нормаль, получает значения u_0 на контуре та, которая сообщает интегралу E, распространенному на область G, наибольшее значение, т. е. если u^{**} — любая функция, принадлежащая совокупности U^{**}, но не получающая значений u_0 на контуре данной области, а u — функция, принадлежащая этой же совокупности и получающая значения u_0 на контуре, то имеет место неравенство

$$E[u^{**}] < E[u] \tag{13}$$

Согласно обозначению

$$u^{**} - u = \omega_1$$

Составим интеграл $E[u] = E[u^{**} - \omega_1]$, причем воспользуемся формулой Грина и условием (12). Тогда получим

$$E[u] = E[u^{**}] + E[\omega_1] \tag{14}$$

Так как $E[\omega_1] > 0$, то из равенства (14) получаем неравенство (13).

Объединив результаты (11) и (13), получим

$$E[u^{**}] < E[u] < E[u^*] \tag{15}$$

В частном случае, при $p = 1$, $a = b = q = 0$, получается двусторонняя оценка для известного интеграла Дирихле [1]. В ряде частных краевых задач такие двусторонние оценки могут представить практический интерес при сопоставлении в каждом случае приближенных решений, полученных двумя определенным образом выбранными методами [1].

Рассмотрим пример. Требуется найти функцию, удовлетворяющую внутри квадрата со сторонами $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2u = 0$$

а на контуре L этой области граничному условию

$$\frac{u}{L} = x^2 + y^2$$

Будем искать приближенное решение задачи по Ритцу в виде

$$u^* = x^2 + y^2 + a_0(1 - x^2)(1 - y^2)$$

Составим интеграл $E[u^*]$. Имеем

$$E[u^*] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [4x^2 - 8a_0 x^2(1-y^2) + 4a_0^2 x^2(1-y^2)^2 + 4y^2 -$$

$$- 8a_0 y^2(1-x^2) + 4a_0^2 y^2(1-x^2)^2 + 2(x^2+y^2)^2 + 4a_0(x^2+y^2)(1-x^2)(1-y^2) +$$

$$+ 2a_0^2(1-x^2)^2(1-y^2)^2]\, dx\, dy$$

Условие минимизации этого интеграла

$$\frac{\partial E[u^*]}{\partial a_0} = 0$$

для определения коэффициента a_0 дает

$$\frac{7}{225}a_0 - \frac{1}{45} = 0, \qquad \text{или} \qquad a_0 = 0.7143$$

Таким образом,

$$u^* = x^2 + y^2 + 0.7143(1-x^2)(1-y^2)$$

Для $E[u^*]$ после вычислений получим $E[u^*] = 11.5806$.

Будем теперь искать приближенное решение данной задачи в виде

$$u^{**} = c_0 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$$

Условие минимизации интеграла E для погрешности

$$\frac{\partial E[\omega_1]}{\partial c_0} = 0$$

для определения коэффициента c_0 дает

$$\int_L \{c_0 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - (x^2+y^2)\} \frac{\partial(\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y)}{\partial \nu} ds = 0$$

В рассматриваемом случае получим

$$\int_{-1}^{+1} [c_0 \operatorname{ch} 1 \operatorname{ch} y - (1+y^2)] \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} y\, dy + \int_{+1}^{-1} [c_0 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 1 - (x^2+1)] \operatorname{ch} x \operatorname{sh} 1 (-dx) -$$

$$- \int_{+1}^{-1} [c_0 \operatorname{ch} 1 \operatorname{ch} y - (1+y^2)](-\operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} y)(-dy) -$$

$$- \int_{-1}^{+1} [c_0 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 1 - (x^2+1)](-\operatorname{ch} x \operatorname{sh} 1)\, dx = 0$$

После вычислений это уравнение имеет вид

$${}^1/_4\, c_0 \operatorname{sh}^2 2 + {}^1/_2\, c_0 \operatorname{sh} 2 - 8 \operatorname{sh}^2 1 + 2 \operatorname{sh} 2 = 0$$

Отсюда $c_0 = 0.7438$ и, следовательно,

$$u^{**} = 0.7438 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$$

Для $E[u^{**}]$ вычисления дают $E[u^{**}] = 11.2896$. Таким образом, имеем

$$11.2896 < E[u] < 11.5806$$

Поступила в редакцию
17 I 1949

Днепропетровский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Тополянский Д. Б. Об оценке интеграла Дирихле. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
2. Курант Р. Гильберт Д. Методы математической физики. Пер. с нем. 1945. Т. II.