Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Г. Н. Положий

(Саратов)

Третьей основной задачей плоской теории упругости Н. И. Мусхелишвили называет смешанную задачу теории упругости в случае, когда на контуре нормальное смещение задано, а касательное напряжение равно нулю [1]. Н. И. Мусхелишвили решил эту задачу для областей, конформно отображаемых на круг при помощи рациональных функций [2, 3].

В предлагаемой работе эта задача рассматривается для бесконечной плоскости с отверстием, имеющим форму квадрата. При этом вводятся некоторые гипотезы касающиеся порядка роста напряжений при подходе к угловым точкам.

Решение задачи получается из некоторых общих формул плоского напряженного состояния, сводящих решение к известным граничным задачам теории функций.

§ 1. Вывод некоторых общих формул плоского напряженного состояния. Пусть Γ есть замкнутый контур с конечным числом угловых точек, имеющий вне этих угловых точек непрерывную кривизну и целиком лежащий в области тела G в плоскости $z = x + iy$, а α — угол, составленный внешней нормалью к Γ с осью x. Пусть ν и t — проекции смещений точек контура Γ на внешнюю нормаль и соответственно на положительное направление касательной и пусть N и T — нормальное и соответственно касательное напряжения в этих точках контура Γ.

В соответствии с формулами Г. В. Колосова имеем

$$2\mu(\nu + it) = e^{-i\alpha}[k\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z})] \qquad \left(k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\right) \tag{1.1}$$

$$N + iT = \varphi'(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z}) - [z\overline{\varphi}''(\overline{z}) + \overline{\psi}'(\overline{z})]\, e^{-i2\alpha} \tag{1.2}$$

где λ и μ — постоянные Ламэ, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции от z, аналитические во всякой конечной части области G.

Обозначая через s длину дуги контура Γ, отсчитываемую от некоторой его точки в направлении положительного обхода, из (1.1) имеем

$$2\mu\left(\frac{d\nu}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\{k\varphi'(z) - \overline{\varphi}'(\overline{z}) + [z\overline{\varphi}''(\overline{z}) + \overline{\psi}'(z)]\, e^{-i2\alpha}\} -$$
$$- ie^{-i\alpha}[k\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z})]\frac{d\alpha}{ds}$$

Отсюда, учитывая (1.1) и (1.2), получаем (1.3)

$$2\mu\left[\frac{dt}{ds} + \nu\frac{d\alpha}{ds} + i\left(t\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\nu}{ds}\right)\right] = k\varphi'(z) - \overline{\varphi}'(\overline{z}) + [z\overline{\varphi}''(\overline{z}) + \overline{\psi}'(\overline{z})]\, e^{-i2\alpha}$$

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds} + \nu\frac{d\alpha}{ds}\right) + N + i\left[2\mu\left(-\frac{d\nu}{ds} + t\frac{d\alpha}{ds}\right) + T\right] = (k+1)\varphi'(z) \tag{1.4}$$

Из этих равенств, считая кривую Г ломаной линией, получаем новые основные формулы плоского напряженного состояния:

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds}-i\,\frac{d\nu}{ds}\right)=k\varphi'(z)-\overline{\varphi'}(\bar z)+[z\overline{\varphi''}(\bar z)+\overline{\psi'}(\bar z)]\,e^{-i2\alpha} \tag{1.5}$$

$$2\mu\,\frac{dt}{ds}+N+i\left(-2\mu\,\frac{d\nu}{ds}+T\right)=(k+1)\varphi'(z) \tag{1.6}$$

Отсюда, приравнивая мнимые и действительные части, имеем

$$\operatorname{Im}[(k+1)\,\varphi'(z)]=-2\mu\,\frac{d\nu}{ds}+T,\qquad \operatorname{Re}\,[k+1)\,\varphi'(z)]=2\mu\frac{d\nu}{ds}+N \tag{1.7}$$

$$\operatorname{Im}[\psi'(z)\,e^{i2\alpha}]=2\mu\,\frac{d\nu}{ds}+\operatorname{Im}[k\varphi'(z)-\overline{\varphi'}(\bar z)+z\,\overline{\varphi''}(\bar z)\,e^{-i2\alpha}] \tag{1.8}$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)\,e^{i2\alpha}]=2\mu\,\frac{dt}{ds}-\operatorname{Re}[k\varphi'(z)-\overline{\varphi'}(\bar z)+z\overline{\varphi''}(\bar z)\,e^{-i2\alpha}] \tag{1.9}$$

Два последних равенства можно представить в виде

$$\operatorname{Im}[\psi'(z)\,e^{i2\alpha}]=T-\operatorname{Im}[\bar z\varphi''(z)\,e^{i2\alpha}] \tag{1.10}$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)\,e^{i2\alpha}]=\frac{4\mu}{k+1}\,\frac{dt}{ds}-\frac{k-1}{k+1}\,N-\operatorname{Re}[\bar z\varphi''(z)\,e^{i2\alpha}] \tag{1.11}$$

§ 2. Решение третьей основной задачи для бесконечной плоскости с квадратным отверстием. Пусть область G есть внешняя область квадрата с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4, имеющими аффиксы$-a/2$, $-a/2+ia$, $a/2+ia$, $a/2$ соответственно (причем a — положительное число), L — граница области, а σ — длина дуги L, отсчитываемая от точки $z=0$ в направлении обхода L, при котором область G остается слева.

Пусть $\zeta=\rho e^{i\theta}=\zeta(z)$ есть функция, дающая конформное отображение области G на круг $|\zeta|<1$, а a_1, a_2, a_3, a_4 — точки границы γ круга $|\zeta|<1$, соответствующие точкам A_1, A_2, A_3, A_4.

По свойствам конформных отображений всегда можно считать $\zeta(\infty)=0$, $a_1=1$, $a_2=i$, $a_3=-1$, $a_4=-i$. Такой нормировкой функция $\zeta(z)$ определяется однозначно, и, как известно [4],

$$z=A\int_1^{\zeta}\sqrt{\zeta^4-1}\,\frac{d\zeta}{\zeta^2}-\frac{a}{2}\qquad\left(A=a\left[\int_0^{\pi/2}\sqrt{2i\sin 2\theta}\,d\theta\right]^{-1}\right) \tag{2.1}$$

Функция $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, о которых говорилось в предыдущем параграфе для нашей области G, т. е. для бесконечной области, ограниченной контуром L, в предположении, что компоненты смещений суть однозначные функции от z, а компоненты напряжений остаются ограниченными при подходе к бесконечности, как известно [3], должны иметь вид

$$\varphi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(k+1)}\ln\left(z-\frac{ia}{2}\right)+(B+iC)\,z+\varphi_1(z) \tag{2.2}$$

$$\psi(z)=\frac{k(X-iY)}{2\pi(k+1)}\ln\left(z-\frac{ia}{2}\right)+(B'+iC')z+\psi_1(z) \tag{2.3}$$

Здесь X и Y — проекции главного вектора внешних усилий, приложенных к границе G, на оси x и y, далее $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — функции, голоморфные в области G (включая бесконечно удаленную точку), а B, C, B', C' — вещественные постоянные, определяющиеся равенствами

$$B + iC = \frac{1}{4}(N_1^\circ + N_2^\circ) + i\,\frac{2\mu\varepsilon^\circ}{k+1} \qquad \left(\varepsilon^\circ = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right) \tag{2.4}$$

$$B' + iC' = -\frac{1}{2}(N_1^\circ - N_2^\circ)\,e^{-i2\alpha^\circ} \tag{2.5}$$

где N_1° и N_2° — значения главных напряжений на бесконечности, α° — угол, который главная ось, соответствующая N_1°, составляет с осью x, затем ε° — значение вращения на бесконечности и u, v — проекции смещений точек области G на оси x и y.

Поставим задачу найти напряженное состояние G (а тем самым и показать его существование), допускающее непрерывность функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_1'(z)$ и $\psi_1(z)$ в замкнутой области $G + L$ и непрерывность функции $\psi_1'(z)$ в этой замкнутой области $G + L$, если речь не идет о точках A_1, A_2, A_3, A_4, в окрестности которых имеют место неравенства [1]

$$|\psi_1'(z)| < \frac{M}{|z - A_m|^\lambda} \qquad (m = 1, 2, 3, 4,\ M = \mathrm{const},\ \lambda < 1) \tag{2.6}$$

При этом искомое напряженное состояние должно быть таким, что нормальное смещение ν и касательное напряжение T на контуре L принимают значения

$$\nu = \nu(\sigma) + c(\sigma), \quad T = T(\sigma) \tag{2.7}$$

где $c(\sigma)$ — функция от σ, тождественно равная нулю на сторонах квадрата A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3 и равная некоторой вещественной постоянной c на стороне A_3A_4, $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$ — наперед заданные вещественные функции от σ. Для простоты будем считать, что функции $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$ удовлетворяют следующим условиям:

(*a*) функция $\nu(\sigma)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода;

(*b*) функция $T(\sigma)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода и, кроме того, будучи рассматриваема как функция от θ, удовлетворяет условию Гельдера на каждой закрытой дуге a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1;

(*c*) величина $-2\mu d\nu(\sigma)/d\sigma + T(\sigma)$ на окружности $|\zeta| = 1$ есть непрерывная функция θ, производная которой по θ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|\zeta| = 1$.

Условия (*b*) и (*c*) в силу (2.1) можно выразить и в переменной σ.

Приступая к решению задачи, заметим, что из (1.7), учитывая первую часть условия (*c*), для функции $\varphi'(z)$ имеем

$$\varphi'(z) = \varphi_0'(z) + D \tag{2.8}$$

---

[1] Неравенства (2.6) эквивалентны гипотезе о том, что напряжения при подходе к угловым точкам могут расти не слишком быстро. Сделанное предположение о непрерывности функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_1'(z)$ и $\varphi_1(z)$ является достаточным условием непрерывности смещений u и v в замкнутой области $G + L$.

где D — вещественная пока неопределенная постоянная,

$$\varphi_0'(z)=\frac{i}{2\pi(k+1)}\int_0^{2\pi}\left[-2\mu\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)\right]\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta \tag{2.9}$$

Сравнивая равенство (2.8) с равенством (2.2), получаем

$$D=B=\frac{1}{4}(N_1^\circ+N_2^\circ) \tag{2.10}$$

Из равенств (2.8), (2.9), (2.2), (2.4) и (2.1) видно, что контурными условиями (2.7) однозначно определяются постоянные C и ε°, а также главный вектор внешних усилий, приложенные к границе G; а именно,

$$C=\frac{1}{2\pi(k+1)}\int_0^{2\pi}\left(-2\mu\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)\right)d\theta \tag{2.11}$$

$$\varepsilon^\circ=\frac{1}{4\mu\pi}\int_0^{2\pi}\left(-2\mu\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)\right)d\theta \tag{2.12}$$

$$X+iY=\frac{2c_1}{i}\int_0^{2\pi}\left(-2\mu\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)\right)e^{-i\theta}d\theta \tag{2.13}$$

где

$$c_1=\lim_{z\to\infty} z\zeta(z)=-iA \tag{2.14}$$

Дифференцируя (2.9) по z и учитывая (2.1), получим ($t=e^{i\theta}$)

$$\varphi_0''(z)=\frac{1}{\pi(k+1)}\frac{\zeta^2}{A\sqrt{\zeta^4-1}}\int_\gamma\left(-2\mu\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)\right)\frac{dt}{(t-\zeta)^2} \tag{2.15}$$

Из этого равенства, учитывая вторую часть условия (c) и известные свойства производных от интеграла типа Коши, видим, что функция $\varphi_0''(z)$ как функция от ζ на окружности $|\zeta|=1$ имеет предельные значения $\varphi_0''^{+}(z_\sigma)$ изнутри (точка z_σ на L, которой соответствует длина дуги σ), удовлетворяющие условию Гельдера на каждой закрытой дуге окружности $|\zeta|=1$, не содержащей точек a_m $(m=1,2,3,4)$.

Вблизи точек a_m имеют место равенства

$$\varphi_0''^{+}(z_\sigma)=\frac{\Phi_m(\zeta)}{(\zeta-a_m)^{1/2}}\qquad (m=1,2,3,4) \tag{2.16}$$

где $\Phi_m(\zeta)$ — функции от ζ, удовлетворяющие условию Гельдера на каждой из полуоткрытых дуг $a_{m-1}a_m$, $a_m a_{m+1}$ ($a_{m-1}=a_4$ при $m=1$ и $a_{m+1}=a_1$ при $m=4$), включающих точку a_m. Отметив это, перейдем к нахождению $\psi'(z)$. Из (1.10) следует, что для $\psi'(z)$ на окружности $|\zeta|=1$, если речь не идет о точках a_m, имеет место

$$\operatorname{Im}[\psi'^{+}(z_\sigma)e^{i2\alpha}]=T(\sigma)-\operatorname{Im}[\bar z_\sigma\varphi_0''^{+}(z_\sigma)e^{i2\alpha}]$$

или, что все равно, равенство

$$\operatorname{Im}[\psi'^{+}(z_\sigma)]=\operatorname{Im}[z_\sigma\overline{\varphi_0''^{+}(z_\sigma)}]+\delta T(\sigma) \tag{2.17}$$

где δ — число, равное $+1$ на a_1a_2, a_3a_4 и равное -1 на a_2a_3, a_4a_1.

Пользуясь свойствами интеграла Пуассона, непосредственно видим, что равенству (2.17) удовлетворяет функция

$$\psi_0'(z) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\mathrm{Im}[z_\sigma\bar{\varphi}_0''^{+}(\bar{z}_\sigma)] + \delta T(\sigma)\}\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta \tag{2.18}$$

Из равенства (2.16) и из условия (*b*) в силу известных свойств интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности [5] следует, что функция $\psi_0'(z)$ как функция от ζ вблизи точек a_m ($m = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяет неравенствам

$$|\psi_0'(z)| < \frac{M'}{|\zeta - a_m|^{1/2}} \qquad (m = 1, 2, 3, 4,\ M' = \mathrm{const}) \tag{2.19}$$

Нам же в силу неравенств (2.6) нужно найти решение граничной задачи (2.17), удовлетворяющее вблизи a_m неравенствам

$$|\psi'(z)| < \frac{M''}{|\zeta - a_m|^{3\lambda/2}} \qquad (m = 1, 2, 3, 4) \tag{2.20}$$

где постоянная $M'' > 0$, а постоянная λ такая [1], что $3\lambda < 2$.

Пользуясь принципом симметрии Римана-Шварца аналитического продолжения и теоремой об устранимых особых точках, находим, что общим решением граничной задачи (2.17) при условии (2.20) или, что то же, при условии (2.6) будет

$$\psi'(z) = \psi_0'(z) + E_0^* + \sum_{m=1}^{m=4} E_m^* \frac{-i(\zeta + a_m)}{\zeta - a_m} \tag{2.21}$$

где

$$E_0^* = D' + iD_0', \qquad E_m^* = E_m + iD_m' \qquad (m = 1, 2, 3, 4)$$

произвольные постоянные такие, что функция

$$\Phi^*(z) = E_0^* + \sum_{m=1}^{m=4} E_m^* \frac{-i(\zeta + a_m)}{\zeta - a_m} \tag{2.22}$$

на окружности $|\zeta| = 1$ принимает вещественные значения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы на окружности $|\zeta| = 1$ имело место

$$iD_0' + \sum_{m=1}^{m=4} D_m' \frac{\zeta + a_m}{\zeta - a_m} = 0 \tag{2.23}$$

Отсюда в силу единственности аналитических функций следует, что $D_0' = D_1' = D_2' = D_3' = D_4' = 0$, и равенство (2.21) должно иметь вид

$$\psi'(z) = \psi_0'(z) + D' + E_1\frac{-i(\zeta + a_1)}{\zeta - a_1} + E_2\frac{-i(\zeta + a_2)}{\zeta - a_2} + $$
$$+ E_3\frac{-i(\zeta + a_3)}{\zeta - a_3} + E_4\frac{-i(\zeta + a_4)}{\zeta - a_4} \tag{2.24}$$

Посмотрим, какие ограничения на выбор вещественных постоянных D', E_1, E_2, E_3, E_4 накладывают контурные условия (2.7). Сравнивая

[1] Если бы постоянная λ была такой, что $3\lambda/2 < 1$, то граничная задача (2.17) была бы задачей Римана-Гильберта [5] в ее обычной, хорошо изученной форме.

(2.24) и (2.3), видим, что постоянные должны удовлетворять равенствам

$$B' + iC' = D' + i\left[E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\operatorname{Im}[z_\sigma\bar{\varphi}_0''^{+}(\bar{z}_\sigma)] + \delta T(\sigma)\}\,d\theta\right] \tag{2.25}$$

$$\frac{k(X - iY)}{2\pi(k+1)c_1} = 2i(E_1\bar{a}_1 + E_2\bar{a}_2 + E_3\bar{a}_3 + E_4\bar{a}_4) + $$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\operatorname{Im}[z_\sigma\bar{\varphi}_0''^{+}(\bar{z}_\sigma)] + \delta T(\sigma)\}\,e^{-i\theta}\,d\theta \tag{2.26}$$

где c_1 — постоянная, определяется равенством (2.14). Отсюда, учитывая (2.14) и то, что $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$, получаем

$$D' = B' = -\frac{1}{2}(N_1^\circ - N_2^\circ)\cos 2\alpha^\circ \tag{2.27}$$

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - C' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\operatorname{Im}[z_\sigma\bar{\varphi}_0''^{+}(\bar{z}_\sigma)] + \delta T(\sigma)\}\,d\theta \tag{2.28}$$

$$E_1 - E_3 = \operatorname{Re}\left[\frac{k(X - iY)}{4\pi(k+1)A}\right] - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\operatorname{Im}[z_\sigma\bar{\varphi}_0''^{+}(\bar{z}_\sigma)] + \delta T(\sigma)\}\cos\theta\,d\theta \tag{2.29}$$

$$E_2 - E_4 = -\operatorname{Im}\left[\frac{k(X - iY)}{4\pi(k+1)A}\right] - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\operatorname{Im}[z_\sigma\bar{\varphi}_0''^{+}(\bar{z}_\sigma)] + \delta T(\sigma)\}\sin\theta\,d\theta \tag{2.30}$$

Подставляя (2.8), (2.10), (2.24) и (2.27) в формулу (1.5), получаем

$$2\mu\left(\frac{d\nu}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\Big\{k\varphi_0'(z) - \bar{\varphi}_0'(\bar{z}) + (k-1)B +$$

$$+ \Big[z\bar{\varphi}_0''(\bar{z}) + \bar{\psi}_0'(\bar{z}) + B' + E_1\frac{-i(\bar{\zeta} + \bar{a}_1)}{\bar{\zeta} - \bar{a}_1} + E_2\frac{-i(\bar{\zeta} + \bar{a}_2)}{\bar{\zeta} - \bar{a}_2} + \tag{2.31}$$

$$+ E_3\frac{-i(\bar{\zeta} + \bar{a}_3)}{\bar{\zeta} - \bar{a}_3} + E_4\frac{-i(\bar{\zeta} + \bar{a}_4)}{\bar{\zeta} - \bar{a}_4}\Big]e^{-i2\alpha}\Big\}$$

Интегрируя это равенство от точки $z = 0$ до любой точки $z = x + iy$, принадлежащей замкнутой области $G + L$, вдоль любого кусочно прямолинейного контура Γ^*, выходящего из точки $z = 0$ в направлении, противоположном направлению оси x, по длине его дуги s, получаем

$$2\mu(\nu + it) = e^{-i\alpha}[k\varphi_0(z) - z\bar{\varphi}_0'(\bar{z}) - \bar{\psi}_0(\bar{z}) + (k-1)Bz - B'\bar{z} -$$

$$-E_1\bar{w}_1(\bar{z}) - E_2\bar{w}_2(\bar{z}) - E_3\bar{w}_3(\bar{z}) - E_4\bar{w}_4(\bar{z}) - 2\mu t(0) + i2\mu\nu(0)] \tag{2.32}$$

где α — угол, составленный нормалью к Γ^*, остающейся справа при движении от точки $z = 0$ до точки $z = x + iy$ с осью x, а $t(0)$ — касательное смещение в точке $z = 0$,

$$\varphi_0(z) = \int_0^z \varphi_0'(z)\,dz, \qquad \psi_0(z) = \int_0^z \psi_0'(z)\,dz \tag{2.33}$$

$$w_m(z) = \int_0^z \frac{-i(\zeta + a_m)}{\zeta - a_m}\,dz \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{2.34}$$

Полагая $\nu_1 = \nu(a)$, $\nu_2 = \nu(2a)$, $\nu_3 = \nu(3a)$, причем ν_1, ν_2, ν_3 — известные постоянные, так как функция $\nu(\sigma)$ задана, из (2.32) имеем

$$\sum_{m=1}^{m=4} E_m \operatorname{Re} w_m(z_1) + B(k-1)\frac{a}{2} - B'\frac{a}{2} + 2\mu\, t(0) = \tag{2.35}$$
$$= \operatorname{Re}[k\varphi_0(z_1) - z_1\overline{\varphi}_0{}'(\overline{z}_1) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_1)] - 2\mu\nu_1$$

$$\sum_{m=1}^{m=4} E_m \operatorname{Im} w_m(z_2) + B(k-1)a + B'a = \tag{2.36}$$
$$= -\operatorname{Im}[k\varphi_0(z_2) - z_2\overline{\varphi}_0{}'(\overline{z}_2) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_2)] - 2\mu\nu_2 - 2\mu\nu(0)$$

$$\sum_{m=1}^{m=4} E_m \operatorname{Re} w_m(z_3) - B(k-1)\frac{a}{2} + B'\frac{a}{2} + 2\mu t(0) - 2\mu c = \tag{2.37}$$
$$= \operatorname{Re}[k\varphi_0(z_3) - z_3\overline{\varphi}_0{}'(\overline{z}_3) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_3)] + 2\mu\nu_3$$

где

$$z_1 = -\frac{a}{2} + i\frac{a}{2}, \quad z_2 = ia, \quad z_3 = \frac{a}{2} + i\frac{a}{2}$$

Равенства (2.28), (2.29), (2.30), (2.35), (2.36) и (2.37) представляют собой шесть линейных алгебраических уравнений с девятью неизвестными постоянными E_1, E_2, E_3, E_4, C', B, B', $t(0)$ и c. Правые части этих равенств есть известные постоянные, определяющиеся, как видно, контурными условиями (2.7). Пусть постоянные B, B' и C' заданы:

$$B = \frac{N_1^\circ + N_2^\circ}{4}, \quad B' = -\frac{N_1^\circ - N_2^\circ}{2}\cos 2\alpha^\circ, \quad C' = \frac{N_1^\circ - N_2^\circ}{2}\sin 2\alpha^\circ \tag{2.38}$$

Тогда из системы уравнений (2.28), (2.29), (2.30) и (2.36) постоянные E_m ($m = 1, 2, 3, 4$) однозначно определяются, так как определитель Δ этой системы отличен от нуля:

$$\Delta = 2\operatorname{Im}\Phi(z_2) \tag{2.39}$$

где

$$\Phi(z) = \int_0^z \sum_{k=1}^{k=4} i\frac{(-1)^k(\zeta + a_k)}{\zeta - a_k}\,dz = \frac{8}{i}\int_0^z \frac{dz}{\zeta^2 - \zeta^{-2}} \tag{2.40}$$

В силу того, что $\operatorname{Im}\Phi(z)$ на стороне квадрата A_4A_1 равна нулю, а на стороне A_2A_3 равна постоянной, и в силу того, что на стороне A_1A_2 величина $\operatorname{Re}\Phi(z)$ остается постоянной, учитывая то, что θ изменяется от нуля до $\pi/2$ при изменении z на стороне A_1A_2, имеем (2.41)

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{8}{i}\int_0^a \frac{dy}{e^{i2\theta(-a/2+iy)} - e^{-i2\theta(-a/2+iy)}} = -4\int_0^a \frac{dy}{\sin 2\theta(-a/2+iy)} < 0$$

После определения постоянных E_m легко видеть, что постоянные $t(0)$ и c однозначно определяются из уравнений (2.35) и (2.37).

Таким образом, решение третьей основной задачи при заданных постоянных B, B', C', т. е. при заданных на бесконечности главных напряжениях N_1°, N_2° и угле α°, составленном главной осью, соответствующей N_1 с осью x, существует единственно и для определения проекций смещений u и v на ось x и, соответственно, на ось y и для определения N и T имеют место равенства

$$2\mu(u+iv) = k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi_0'}(\bar z) - \overline{\psi}_0(\bar z) + B(k-1)z - B'\bar z -$$

$$- E_1\overline{w}_1(\bar z) - E_2\overline{w}_2(\bar z) - E_3\overline{w}_3(\bar z) - E_4\overline{w}_4(\bar z) - 2\mu t(0) + i2\mu\nu(0) \qquad (2.42)$$

$$N + iT = \varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'}(\bar z) + 2B - \Big[z\overline{\varphi_0''}(\bar z) + \overline{\psi}_0'(\bar z) + B' +$$

$$+ E_1\frac{i(\bar\zeta + \bar a_1)}{\zeta - \bar a_1} + E_2\frac{i(\bar\zeta + \bar a_2)}{\zeta - \bar a_2} + E_3\frac{i(\bar\zeta + \bar a_3)}{\zeta - \bar a_3} + E_4\frac{i(\bar\zeta + \bar a_4)}{\zeta - \bar a_4}\Big] e^{-i2\alpha} \qquad (2.43)$$

где функции $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $w_m(z)$ $(m = 1, 2, 3, 4)$ определяются равенствами (2.9), (2.18), (2.33), (2.34), а постоянные E_m и $t(0)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнения (2.28), (2.29), (2.30), (2.36), (2.35). Постоянная c определяется из уравнения (2.37). Этим задача решена. Заметим, что при заданных постоянных

$$c, \quad B = \frac{1}{4}(N_1^\circ + N_2^\circ), \quad C' = \frac{1}{2}(N_1^\circ - N_2^\circ)\sin 2\alpha^\circ \qquad (2.44)$$

решение третьей основной задачи также существует единственно и формулы (2.42) и (2.43) также остаются справедливыми. При этом постоянные $E_1, E_2, E_3, E_4, B', t(0)$ однозначно определяются из системы уравнений (2.28) — (2.30), (2.35) — (2.37), определитель которой равен

$$\Delta_1 = 4\mu a\,[\operatorname{Re}\Phi(z_3) - \operatorname{Re}\Phi(z_1) - \operatorname{Im}\Phi(z_2)] \qquad (2.45)$$

где $\Phi(z)$ — функция, определенная равенством (2.40), и, следовательно, отличен от нуля, так как[1]

$$\operatorname{Re}\varphi(z_3) - \operatorname{Re}\varphi(z_1) = -4\int_{a/2}^{a/2} \frac{dx}{\sin 2\theta(x)} > 0, \qquad \operatorname{Im}\Phi(z_2) < 0$$

Таким образом существование и единственность решения рассматриваемой третьей основной задачи и справедливость равенств (2.42) и (2.43) имеют место не только при заданных постоянных (2.38), но также и при заданных постоянных (2.44). В противоположность этому при заданных постоянных

$$c, \quad B = \frac{1}{4}(N_1^\circ + N_2^\circ), \quad B' = -\frac{1}{2}(N_1^\circ - N_2^\circ)\cos 2\alpha^\circ, \qquad (2.46)$$

а также при заданных постоянных

$$c, \quad B' = -\frac{1}{2}(N_1^\circ - N_2^\circ)\cos 2\alpha^\circ, \quad C' = \frac{1}{2}(N_1^\circ - N_2^\circ)\sin 2\alpha^\circ \qquad (2.47)$$

решение третьей основной задачи не существует или не единственно. Легко проверить, что определитель системы линейных алгебраических уравнений для определения остальных неизвестных постоянных в этих случаях равен нулю.

---

[1] Из рассмотрения отображающей функции $\zeta = \zeta(z)$ следует, что при z, изменяющемся на стороне квадрата A_1A_4, θ изменяется от $-\pi/2$ до нуля.

Из полученных решений при заданных постоянных (2.38) или (2.44) видно, что N и T в окрестности угловых точек A_m $(m = 1, 2, 3, 4)$ согласно (2.43) и (2.19) удовлетворяют неравенствам

$$|N|, \qquad |T| < \frac{M_1}{|z - A_m|^{2/3}} \qquad (M_1 = \text{const}) \tag{2.48}$$

Для иллюстрации полученных решений третьей основной задачи, считая заданными постоянные (2.38), положим, например,

$$T(\delta) = 0, \qquad \nu(\sigma) = \begin{cases} \nu_0 = \text{const} & \text{на } A_4A_1 \\ \nu_1 = \text{const} & \text{на } A_1A_2 \\ \nu_2 = \text{const} & \text{на } A_2A_3 \\ \nu_3 = 0 & A_3A_4 \end{cases} \tag{2.49}$$

Тогда

$$\varphi_0'(z) = \varphi_0(z) = \psi_0'(z) = \psi_0(z) \equiv 0$$

Из равенства (2.13) имеем $X + iY = 0$, т. е. главный вектор внешних усилий, приложенных к границе данного квадратного отверстия, равен нулю. Из равенства (2.12) находим, что $\varepsilon^\circ = 0$, т. е. значение вращения на бесконечности равно нулю. Система уравнений (2.28), (2.29), (2.30), (2.35), (2.36), (2.37) для определения E_1, E_2, E_3, E_4, $t(0)$, c дает

$$E_2 = -E_1 + \frac{1}{2}C', \qquad E_3 = E_1, \qquad E_4 = -E_1 + \frac{1}{2}C' \tag{2.50}$$

$$E_1 \operatorname{Im}\Phi(z_2) - \frac{C'[\operatorname{Im}\Phi(z_2) - \operatorname{Im}\omega^*(z_2)]}{2} + B(k-1)a + B'a = -2\mu\nu_2 - 2\mu\nu_0$$

$$E_1 \operatorname{Re}\Phi(z_1) - \frac{C'[\operatorname{Re}\Phi(z_1) - \operatorname{Re}\omega^*(z_1)]}{2} + \frac{B(k-1)a - B'a}{2} + 2\mu t(0) = -2\mu\nu_1$$

$$E_1 \operatorname{Re}\Phi(z_3) - \frac{C'[\operatorname{Re}\Phi(z_3) - \operatorname{Re}\omega^*(z_3)]}{2} - \frac{B(k-1)a - B'a}{2} + 2\mu t(0) - 2\mu c = 0$$

где функция $\Phi(z)$ будет согласно (2.40)

$$\omega^*(z) = \int_0^z \left[\frac{-i(\zeta + a_1)}{\zeta - a_1} + \frac{-i(\zeta + a_3)}{\zeta - a_3}\right] dz = \frac{2}{i}\int_0^z \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} dz$$

Отсюда имеем

$$E_1 = E_3 = \frac{1}{2}C' - \frac{1}{2}C' \frac{\operatorname{Im}\omega^*(z_2)}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} - \frac{B(k-1)a + B'a + 2\mu\nu_2 + 2\mu\nu_0}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} \tag{2.51}$$

$$E_2 = E_4 = \frac{1}{2}C' \frac{\operatorname{Im}\omega^*(z_2)}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} + \frac{B(k-1)a + B'a + 2\mu\nu_2 + 2\mu\nu_0}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)}$$

$$2\mu t(0) = -\operatorname{Re}\Phi(z_1)E_1 + \frac{C'[\operatorname{Re}\Phi(z_1) - \operatorname{Re}\omega^*(z_1)]}{2} - \frac{B(k-1)a - B'a}{2} - 2\mu\nu_1$$

$$2\mu c = \operatorname{Re}\Phi(z_3)E_1 - \frac{C'[\operatorname{Re}\Phi(z_3) - \operatorname{Re}\omega^*(z_3)]}{2} - \frac{B(k-1)a - B'a}{2} + 2\mu t(0)$$

В частности, при $B = B' = C' = 0$, $\nu_0 = \nu_1 = \nu_3 = 0$, используя равенства $\operatorname{Re}\Phi(z_1) = -\operatorname{Re}\Phi(z_3) = {}^1/_2 \operatorname{Im}\Phi(z_2)$, легко выводимые из (2.40) и из свойств отображающей функции $\zeta = \zeta(z)$, имеем

$$E_1 = E_3 = -E_2 = -E_4 = -\frac{2\mu\nu_2}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} \tag{2.52}$$

$$t(0) = \frac{\operatorname{Re}\Phi(z_1)\,\nu_2}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} = \frac{\nu_2}{2}, \qquad c = -\frac{\operatorname{Re}\Phi(z_3) - \operatorname{Re}\Phi(z_1)}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)}\nu_2 = \nu_2$$

и формулы (2.42) и (2.43) дают (2.53)

$$u + iv = \frac{\nu_2}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} 8i \int_0^{\bar z} \frac{d\bar z}{\bar\zeta^2 - \bar\zeta^{-2}} - \frac{\nu_2}{2}, \quad N + iT = \frac{2\mu\nu_2}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} \frac{8i}{\zeta^2 - \zeta^{-2}} e^{-i2\alpha}$$

где $\operatorname{Im}\Phi(z_2)$ — постоянная, определенная равенством

$$\operatorname{Im}\Phi(z_2) = -4 \int_0^a \frac{dy}{\sin 2\theta(-a/2 + iy)} \tag{2.54}$$

Аналогично проводятся вычисления в случае задания постоянных (2.44). Так, например, если положить

$$T(\sigma) = 0, \qquad \nu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{на } A_4A_1 \\ 0 & \text{на } A_1A_2 \\ \nu_2 = \text{const} & \text{на } A_2A_3 \\ 0 & \text{на } A_3A_4 \end{cases} \tag{2.55}$$

то при $B = C' = 0$ после вычислений имеем

$$E_1 = E_3 = -E_2 = -E_4 = -\frac{\mu(\nu_2 + c)}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)}, \qquad t(0) = \frac{c}{2}, \quad B' = \frac{\mu(-\nu_2 + c)}{a}$$

и формулы (2.42) и (2.43) дадут

$$u + iv = \frac{\nu_2 + c}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} 4i \int_0^{\bar z} \frac{d\bar z}{\bar\zeta^2 - \bar\zeta^{-2}} - \frac{(-\nu_2 + c)}{2a}\bar z - \frac{c}{2} \tag{2.56}$$

$$N + iT = -\left[\frac{\mu(-\nu_2 + c)}{a} - \frac{\mu(\nu_2 + c)}{\operatorname{Im}\Phi(z_2)} \frac{8i}{\zeta^2 - \zeta^{-2}}\right] e^{-i2\alpha}$$

При другом виде заданных функций $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$, как в случае заданных постоянных (2.38), так и в случае заданных постоянных (2.44), усложняется лишь вычисление интегралов, определяющих функции $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, т. е. решение является вполне эффективным.

Поступила в редакцию
31 I 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Л. 1933. Стр. 216.
2. Мусхелишвили Н. И. Об одной новой контурной задаче теории упругости. ДАН. 1934. Т. 3. № 3.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. М. 1935. Стр. 303—318, 119—122.
4. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 1945. Стр. 274—275.
5. Мусхелишвили И. Н. Сингулярные интегральные уравнения. М. 1946. Стр. 88, 279—283.