

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Л. А. Галин

(Москва)

В этой статье дается решение нескольких задач о кручении призматических стержней, когда в них возникают области пластических деформаций. Вначале предлагается обратный метод, посредством которого контур, ограничивающий сечение призматического стержня, определяется на основании некоторой функции. Уравнение контура, а также все величины, характеризующие напряженное состояние при упруго-пластическом кручении, выражаются через эту функцию. Для ее определения, т. е. для решения прямой задачи, может быть получено нелинейное интегральное уравнение. Пользуясь обратным методом, т. е. задаваясь этой функцией, можно находить ряд решений, в частности, для стержней, контуры которых близки к полигональным.

В нашей работе [1] дан метод, который позволяет решить прямую задачу об упруго-пластическом кручении призматического стержня полигонального сечения. Там же приведен один пример приближенного решения. Здесь дается несколько других решений. В статье В. В. Соколовского [2] при помощи иного обратного метода дано решение одной частной задачи о кручении стержня с сечением, близким к эллиптическому.

Компоненты тангенциального напряжения в пластической области следующим образом выражаются на основании функции напряжений:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \quad (1)$$

Так как должно иметь место условие пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (2)$$

то функция напряжений φ_1 удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 = k^2 \quad (3)$$

Здесь k — константа пластичности.

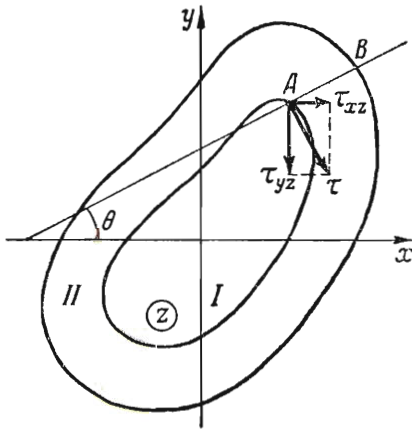
На контуре $\tau_{nz} = 0$, так как поверхность стержня свободна от усилий, и поэтому

$$\tau_{sz} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = k$$

Показано [3], что напряженное состояние в пластической области может быть найдено следующим образом: необходимо построить нормали к контуру, ограничивающему сечение призматического стержня. Максимальное тангенциальное напряжение $\tau = (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{1/2}$ действует в направлении, перпендикулярном к этим нормальям, и, следовательно, компонента напряжения τ_{nz} равна нулю.

Таким образом, если известны направления нормалей к контуру, напряженное состояние в пластических областях может быть найдено, так как в каждой точке этих областей известны величина и направление главного тангенциального напряжения. Контур сечения призматического стержня определяет семейство нормалей, на основании которого может быть определено напряженное состояние. С другой стороны, если дано некоторое семейство прямых, то может быть найден контур сечения призматического стержня, который будет являться по отношению к ним ортогональной траекторией.

Компоненты напряжения в упругой области будут



Фиг. 1

$$\tau_{xz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)$$

$$\tau_{yz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (4)$$

Здесь G — модуль упругости, ϑ — угол закручивания стержня.

Введем две аналитические функции, которые будем рассматривать как функции вспомогательной комплексной переменной ζ

$$w_1(\zeta) = z = x + iy$$

$$w_2(\zeta) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (5)$$

При этом упругой области I в плоскости z будет соответствовать единичный круг в плоскости ζ (фиг. 1).

Таким образом, функция $w_1(\zeta)$ отображает область, соответствующую упругому ядру, на единичный круг. Будем полагать, что упругая область I всюду окружена пластической областью II .

Из уравнений (4) следует, что компоненты тангенциального напряжения выражаются через функции $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$

$$\tau_{xz} = \operatorname{Re} [G\vartheta (iw_1(\zeta) + w_2(\zeta))], \quad \tau_{yz} = \operatorname{Re} [G\vartheta (w_1(\zeta) + iw_2(\zeta))] \quad (6)$$

Будем полагать, что компоненты тангенциального напряжения, которые имеют место на контуре упругого ядра, следующим образом выражаются через некоторую функцию $\psi(\tau)$:

$$\tau_{xz} = k \sin \psi(\tau), \quad \tau_{yz} = k \cos \psi(\tau) \quad (7)$$

Определенные таким образом величины τ_{xz} и τ_{yz} удовлетворяют условию (2).

Так как имеют место выражения

$$\operatorname{Re} [G\vartheta (iw_1(\zeta) + w_2(\zeta))]_{\zeta=e^{i\tau}} = k \sin \psi(\tau)$$

$$\operatorname{Re} [G\vartheta (w_1(\zeta) + iw_2(\zeta))]_{\zeta=e^{i\tau}} = k \cos \psi(\tau)$$

то, применяя к ним формулу Шварца, получим

$$\begin{aligned} i\omega_1(\zeta) + \omega_2(\zeta) &= \frac{k}{G\vartheta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \\ \omega_1(\zeta) + i\omega_2(\zeta) &= \frac{k}{G\vartheta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнений (8) находим

$$\begin{aligned} \omega_1(\zeta) &= \frac{k}{2G\vartheta} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \right] \\ \omega_2(\zeta) &= \frac{k}{2G\vartheta} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Так как функция $\omega_1(\zeta)$ отображает упругую область L на единичный круг, то x^* и y^* — координаты точки A на контуре области L (фиг. 1) — будут иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{k}{2G\vartheta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\zeta - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \right\} \\ y^* &= \frac{k}{2G\vartheta} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\zeta - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \right\} \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что при $\zeta = e^{i\tau}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \right] &= f(\tau) \\ \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \frac{e^{i\omega} + \zeta}{e^{i\omega} - \zeta} d\omega \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega \end{aligned}$$

получим следующие выражения для координат точки A на контуре L :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{k}{2G\vartheta} \left[\cos \psi(\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega \right] \\ y^* &= \frac{k}{2G\vartheta} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega - \sin \psi(\tau) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем теперь прямую, проходящую через точку A , которая перпендикулярна к направлению главного тангенциального напряжения в этой точке. Точка A расположена на линии, отделяющей упругую область от пластической. Поэтому вдоль прямой AB в пластической области компонента тангенциального напряжения, действующая по направлению, перпендикулярному к этой прямой, равна k , а компонента тангенциального напряжения, направленная по прямой, равна нулю.

Отсюда следует, что если построить траекторию, ортогональную к семейству полученных прямых, то компонента тангенциального напряжения, действующая по нормали к этой ортогональной траектории, будет равна нулю. Таким образом, на ней выполняется условие, которое должно иметь место на контуре, ограничивающем поперечное сечение призматического стержня.

Итак, если полученная ортогональная траектория будет замкнутой кривой, она может быть контуром сечения некоторого призматического стержня, находящегося в состоянии упруго-пластической деформации.

Найдем тангенс угла θ между осью x и направлением, нормальным к направлению главного тангенциального напряжения в точке A . Имеем

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = -\frac{k \sin \psi(\tau)}{k \cos \psi(\tau)} = -\operatorname{tg} \psi(\tau) \quad (11)$$

На основании (11) уравнение прямой AB

$$y - y^* = \operatorname{tg} \theta (x - x^*) = -\operatorname{tg} \psi(\tau) (x - x^*)$$

или, принимая во внимание (10), найдем

$$\begin{aligned} y - \frac{k}{2G\vartheta} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega - \sin \psi(\tau) \right] = \\ = -\operatorname{tg} \psi(\tau) \left\{ x - \frac{k}{2G\vartheta} \left[\cos \psi(\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega \right] \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

Это уравнение можно привести к виду

$$\begin{aligned} y = -\operatorname{tg} \psi(\tau) x + \frac{k}{2G\vartheta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{tg} \psi(\tau)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

Введем в дальнейшем следующие обозначения:

$$k(\tau) = -\operatorname{tg} \psi(\tau)$$

$$\begin{aligned} b(\tau) = \frac{k}{4\pi G\vartheta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega + \operatorname{tg} \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega \right\} = \\ = \frac{k}{4\pi G\vartheta} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \operatorname{tg} \psi(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega \quad (14) \end{aligned}$$

Таким образом, задача состоит в отыскании ортогональной траектории к семейству прямых, определяемых уравнением

$$y = k(\tau) x + b(\tau) \quad (15)$$

Эти ортогональные траектории находим обычным методом.

Координаты искомой линии будем рассматривать как функции параметра τ , т. е. будем полагать

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau)$$

В таком случае для наклона нормали имеем:

$$k(\tau) = -\frac{x'(\tau)}{y'(\tau)} \quad (16)$$

Из (15) получаем, после дифференцирования по τ , принимая во внимание также (16):

$$\frac{d}{d\tau} (b(\tau) + k(\tau)x(\tau)) = y'(\tau) = -\frac{x'(\tau)}{k(\tau)}$$

Иначе это может быть записано следующим образом:

$$k(\tau)b'(\tau) + k(\tau)x(\tau) + [1 + k^2(\tau)]x'(\tau) = 0$$

Отсюда находим дифференциальное уравнение для определения $y(\tau)$:

$$x'(\tau) + \frac{k(\tau)k'(\tau)}{1+k^2(\tau)}x(\tau) = -\frac{k(\tau)}{1+k^2(\tau)}b'(\tau) \quad (17)$$

Для нахождения дифференциального уравнения, которому должна удовлетворять величина $y(\tau)$, приведем уравнение (15) к виду

$$-\frac{b(\tau)}{k(\tau)} = x(\tau) - \frac{y(\tau)}{k(\tau)}$$

Дифференцируя это выражение по τ и принимая во внимание (16), будем иметь

$$\frac{d}{d\tau} \frac{b(\tau)}{k(\tau)} = k(\tau)y'(\tau) + \frac{d}{d\tau} \frac{y(\tau)}{k(\tau)}$$

Отсюда находим дифференциальное уравнение для определения $y(\tau)$

$$y'(\tau) - \frac{k'(\tau)}{k(\tau) + k^3(\tau)}y(\tau) = \frac{k(\tau)}{1+k^2(\tau)} \frac{d}{d\tau} \frac{b(\tau)}{k(\tau)} \quad (18)$$

Функция $x(\tau)$, удовлетворяющая уравнению (17), имеет вид

$$x(\tau) = \exp\left(-\int \frac{k(\tau)k'(\tau)d\tau}{1+k^2(\tau)}\right) \left[C_1 - \int \exp\left(-\int \frac{k(\tau)k'(\tau)d\tau}{1+k^2(\tau)}\right) \frac{k(\tau)b'(\tau)d\tau}{1+k^2(\tau)} \right]$$

Выполняя интегрирование, найдем

$$x(\tau) = \frac{C_1}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} - \frac{k(\tau)b(\tau)}{1+k^2(\tau)} + \frac{1}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} \int \frac{k'(\tau)b(\tau)d\tau}{[1+k^2(\tau)]^{3/2}} \quad (19)$$

Функция $y(\tau)$, которая удовлетворяет уравнению (18), будет

$$y(\tau) = \exp \int \frac{k'(\tau)d\tau}{k(\tau) + k^3(\tau)} \left[C_2 - \int \exp\left(-\int \frac{k'(\tau)d\tau}{k(\tau) + k^3(\tau)}\right) \frac{k(\tau)}{1+k^2(\tau)} \frac{d}{d\tau} \frac{b(\tau)}{k(\tau)} d\tau \right]$$

После выполнения интегрирования, получим

$$y(\tau) = \frac{C_2 k(\tau)}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} + \frac{b(\tau)}{1+k^2(\tau)} + \frac{k(\tau)}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} \int \frac{k'(\tau)b(\tau)d\tau}{[1+k^2(\tau)]^{3/2}} \quad (20)$$

Постоянная C_1 и постоянная C_2 в уравнениях (19) и (20) должны быть равны между собой. Будем обозначать эту постоянную через C . Кроме того, заменим в выражениях (19) и (20) неопределенные интегралы определенными. Тогда получим окончательно следующие выражения для $x(\tau)$ и $y(\tau)$:

$$x(\tau) = \frac{C}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} - \frac{k(\tau)b(\tau)}{1+k^2(\tau)} + \frac{1}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} \int_{-\pi}^{\tau} \frac{k'(\chi)b(\chi)d\chi}{[1+k^2(\chi)]^{1/2}} \quad (21)$$

$$y(\tau) = \frac{Ck(\tau)}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} + \frac{b(\tau)}{1+k^2(\tau)} + \frac{k(\tau)}{[1+k^2(\tau)]^{1/2}} \int_{-\pi}^{\tau} \frac{k'(\chi)b(\chi)d\chi}{[1+k^2(\chi)]^{1/2}} \quad (22)$$

Подставим в выражения (21) и (22) значения $k(\tau)$ и $b(\tau)$ из (14). В результате получим

$$x(\tau) = C \cos \psi(\tau) + \frac{k}{4\pi G\vartheta} \left\{ \sin \psi(\tau) \cos \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\tau} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \psi(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\tau-\omega}{2} d\omega + \cos \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\tau} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{tg} \psi(\chi)] \operatorname{ctg} \frac{\chi-\omega}{2} d\omega \right] \cos \psi(\chi) \psi'(\chi) d\chi \right\} \quad (23)$$

$$y(\tau) = -C \sin \psi(\tau) + \frac{k}{4\pi G\vartheta} \left\{ \cos^2 \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\tau} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \psi(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\tau-\omega}{2} d\omega + \sin \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\tau} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{tg} \psi(\chi)] \operatorname{ctg} \frac{\chi-\omega}{2} d\omega \right] \cos \psi(\chi) \psi'(\chi) d\chi \right\} \quad (24)$$

Полученные выражения решают поставленную задачу. Они дают координаты точек контура Γ , ограничивающего поперечное сечение призматического стержня, который находится в состоянии упруго-пластической деформации. При этом координаты точек выражаются на основании функции $\psi(\tau)$. Одной функции $\psi(\tau)$ соответствует множество контуров, которые получаются при различных значениях постоянной C .

Координаты точек x^* и y^* , расположенных на контуре упругой области L , даются выражениями (10).

Установим теперь условия, которым должна удовлетворять функция $\psi(\tau)$. Эти условия следуют из того, что полученная ортогональная траектория должна являться контуром поперечного сечения призматического стержня. Поэтому она должна быть замкнутой кривой, не имеющей двойных точек, т. е. не обладающей петлями.

Ортогональная траектория будет замкнутой кривой тогда, когда

$$x(-\pi) = x(\pi), \quad y(-\pi) = y(\pi) \quad (25)$$

так как координаты $x(\tau)$ и $y(\tau)$ являются непрерывными функциями параметра τ .

Для этого прежде всего необходимо, чтобы функции, входящие в выражения (23) и (24), были периодическими с периодом, равным 2π , а это будет тогда, когда при $-\pi < \tau < +\pi$ будет иметь место

$$v < \psi(\tau) < v + 2\pi \quad (26)$$

Здесь период не может быть больше 2π . Если он будет больше 2π , то необходимая периодичность функций осуществляется, однако ортогональная траектория будет неизбежно обладать петлями.

Кроме того, из (23) и (24) следует, что для выполнения условия (25) должно иметь место

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \operatorname{tg} \psi(\chi)] \operatorname{ctg} \frac{\chi - \omega}{2} d\omega \right] \cos \psi(\chi) \psi'(\chi) d\chi = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\chi - \omega}{2} d\omega + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \psi(\chi) \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\chi - \omega}{2} d\omega \right] \cos \psi(\chi) \psi'(\chi) d\chi = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что это условие будет выполняться, в частности, тогда, когда $\psi(\tau)$ является нечетной функцией от τ . Из условия (11) следует, что в этом случае сечение призматического стержня будет симметрично относительно оси x . Заметим, что при этом выражения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega$$

будут соответственно четными и нечетными функциями от τ .

Принимая во внимание это обстоятельство, можно установить, что в том случае, когда $\psi(\tau)$ нечетная функция, выражение (27) равно нулю.

Для того чтобы ортогональная траектория к семейству прямых (15) не обладала петлями ни при каком значении постоянной C , достаточно потребовать, чтобы угол наклона нормали к этой траектории, т. е. угол θ , непрерывно возрастал.

При этом ортогональная траектория (расположенная, естественно, вне упругой области I) нигде не будет пересекаться сама с собой. Таким образом, из выражения (11) следует, что должно иметь место

$$\psi'(\tau) \neq 0, \quad v < \tau < v + 2\pi \quad (28)$$

Однако, если это последнее условие не будет выполняться, все же возможны при не слишком больших значениях C ортогональные траектории, не обладающие петлями, которые могут быть контурами сечения призматического стержня.

Итак, функция $\psi(\tau)$ должна удовлетворять условиям (26), (27) и (28), причем последнее условие является, вообще говоря, чрезмерно ограничивающим.

Все эти условия будут, в частности, выполнены тогда, когда $\psi(\tau)$ нечетная, монотонная функция от τ , меняющаяся в пределах от $-\pi$ до $+\pi$. В этом случае контур сечения призматического стержня будет симметричен.

Для того чтобы решить прямую задачу, необходимо определить функцию $\psi(\tau)$ тогда, когда известна зависимость между $y(\tau)$ и $x(\tau)$. Таким образом, условие

$$y(\tau) = F(x(\tau)) \quad (29)$$

вместе с выражениями (23) и (24) позволяет построить нелинейное интегральное уравнение для определения функции $\psi(\tau)$.

Установим теперь некоторые следствия из полученных результатов. Пусть дана некоторая функция $\psi(\tau)$ такая, что функции $w_1(\zeta)$, определенной на основании нее, соответствует некоторая упругая область, контур которой L ограничен волнистой линией, вообще говоря, далекой от круга. Из выражений (23) и (24) следует, что при увеличении значения C контур Γ , ограничивающий поперечное сечение стержня, делается все более и более близким к кругу радиуса C . Размеры этого круга будут увеличиваться по сравнению с размерами упругой области. При увеличении C волнистость внешнего контура Γ' будет, естественно, становиться меньше. Отсюда можно сделать обратное заключение: если сечение призматического стержня ограничено слабо волнистым контуром, близким к кругу, то при увеличении угла закручивания стержня ϑ упругая область, размеры которой будут становиться меньше, будет иметь границы контур с увеличивающейся волнистостью. Это обстоятельство, повидимому, является одной из причин, которая влечет сильную волнистость и изрезанность границы области, остающейся в упругом состоянии при кручении призматического стержня (см. по этому поводу фиг. 160—183, в книге А. Надаи^[31]).

Рассмотрим теперь несколько приложений полученных результатов. Прежде всего решение задачи о кручении призматического стержня кругового сечения будет получено, если мы положим $\psi(\tau) = \tau$. Из (10) следует, что координаты точек на контуре упругой области L будут

$$x^* = \frac{k}{G\vartheta} \cos \tau, \quad y^* = -\frac{k}{G\vartheta} \sin \tau$$

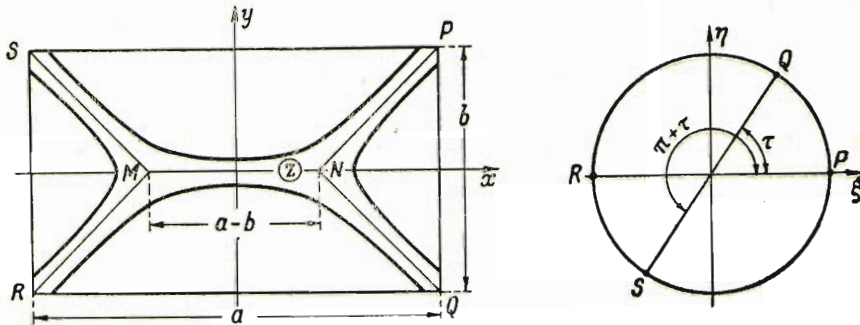
Из (14) видно, что в этом случае $b(\tau) = 0$ и поэтому координаты точек на внешнем контуре стержня Γ таковы:

$$x = C \cos \tau, \quad y = -C \sin \tau$$

Таким образом, оба этих контура будут круговыми.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\psi(\tau)$ равна постоянным, различным на различных частях интервала $-\pi < \tau < \pi$. Необходимо заметить, что в этом случае функция $w_1(\zeta)$ будет отображать на единичный круг некоторую бесконечную область. Это следует из выражения (9), так как аналитическая функция, значение действительной части которой на контуре имеет разрывы, будет в этих точках контура неограни-

ченной. Граница области L , соответствующей функции $w_1(\zeta)$, будет состоять из нескольких ветвей, причем в каждой точке отдельной ветви наклон нормали к контуру, т. е. $\operatorname{tg} \theta$, равен постоянной величине. В этом случае граничное условие $\tau_{xz} = 0$ выполняется на некотором контуре, ограниченном прямыми, там, где этот контур проходит вне упругой области, и некоторыми кривыми там, где он пересекает упругую область. При этом указанные кривые при увеличении размеров контура будут стремиться к некоторым параболом, вписанным в угол между двумя соседними прямыми. Эти обстоятельства указаны



Фиг. 2

в нашей работе [4]; причем в ней приведено решение для стержня, поперечное сечение которого близко к квадратному. Рассмотрим теперь случай, когда контур призматического стержня близок к некоторому прямоугольнику (фиг. 2).

Направление, по которому действует максимальное тангенциальное напряжение в пластических областях, в этом случае известно, причем оно постоянно в каждой области. Это позволяет определить компоненты тангенциального напряжения τ_{xz} и τ_{yz} , имеющие место на частях контура L , соответствующих различным участкам контура единичного круга. На основании выражения (7) определяются также значения функции $\psi(\tau)$. Значения этих величин будут такими:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} &= -k, & \tau_{yz} &= 0, & \psi(\tau) &= \frac{3\pi}{2} & (0 < \tau < \kappa) \\
 \tau_{xz} &= 0, & \tau_{yz} &= -k, & \psi(\tau) &= \pi & (\kappa < \tau < \pi) \\
 \tau_{xz} &= +k, & \tau_{yz} &= 0, & \psi(\tau) &= +\frac{\pi}{2} & (\pi < \tau < \pi + \kappa) \\
 \tau_{xz} &= 0, & \tau_{yz} &= +k, & \psi(\tau) &= \pi & (\pi + \kappa < \tau < 2\pi)
 \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь выражением (9), на основании (30) определяется функция $w_1(\zeta)$, отображающая на единичный круг некоторую область, частично совпадающую с контуром упругой области. Эта функция будет иметь следующее выражение:

$$w_1(\zeta) = -\frac{k}{2\pi G\vartheta} (1+i) \left[\lg \frac{1-\zeta}{1+\zeta} - i \lg \frac{e^{i\kappa} - \zeta}{e^{i\kappa} + \zeta} \right] \quad (31)$$

В этих выражениях параметр κ подлежит определению. Он должен быть таким, чтобы найденная при этом упругая область соответствовала контуру, ограничивающему поперечное сечение призматического стержня.

Если стороны прямоугольника будут соответственно a и b , то разность $a - b$ будет представлять собой расстояние между точками M и N , в которых пересекаются две пары прямых, каждая из которых расположена между асимптотами двух соседних ветвей кривой, уходящих в бесконечность (фиг. 2).

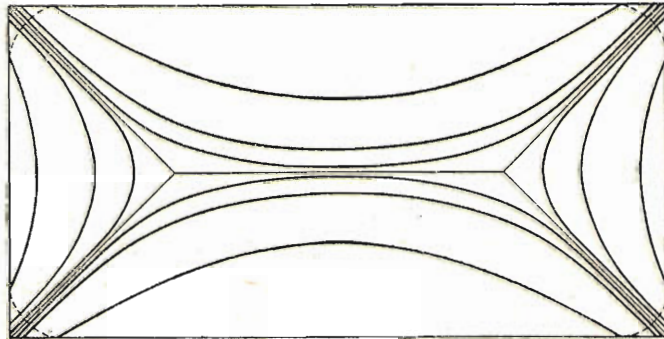
Если на основании (31) найти положение этих асимптот, то можно установить, что это расстояние будет равно

$$a - b = \frac{2k}{\pi G \vartheta} \lg \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2} \quad (32)$$

Отсюда для параметра κ находим следующее значение:

$$\kappa = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \exp \frac{(a - b) \pi G \vartheta}{2k} \quad (33)$$

Придавая углу закручивания ϑ разные значения, мы будем получать различные виды границы, отделяющей упругую область от пластиче-



Фиг. 3

ской. Это постепенное продвижение границы пластической области при увеличении угла закручивания и, следовательно, крутящего момента, приложенного к призматическому стержню прямоугольного сечения, показано на фиг. 3. Форма контура при различных значениях параметра κ будет несколько меняться, как это показывают пунктирные кривые на фиг. 3, однако это изменение незначительно влияет на распределение напряжений.

Вычисление формы кривых, представляющих границу пластических областей, на фиг. 3, а также ниже на фиг. 4 было произведено Н. А. Котеленец.

Рассмотрим теперь задачу о кручении призматического стержня с сечением, близким к равностороннему треугольнику.

В этом случае величины τ_{xz} , τ_{yz} и $\psi(\tau)$, соответствующие различным участкам контура единичного круга, будут таковы:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= +\frac{k}{2}, & \tau_{yz} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}k, & \psi(\tau) &= \frac{\pi}{6} & (0 < \tau < \frac{2\pi}{3}) \\ \tau_{xz} &= +\frac{k}{2}, & \tau_{yz} &= +\frac{\sqrt{3}}{2}k, & \psi(\tau) &= \frac{5\pi}{6} & (\frac{2\pi}{3} < \tau < \frac{4\pi}{3}) \\ \tau_{xz} &= -k, & \tau_{yz} &= 0, & \psi(\tau) &= \frac{3\pi}{2} & (\frac{4\pi}{3} < \tau < 2\pi) \end{aligned} \quad (34)$$

На основании (9) и (34) определяем функцию $w_1(\zeta)$, которая оказывается равной

$$w_1(\zeta) = \frac{k}{2\pi G \vartheta} [\lg(1-\zeta) + e^{2\pi i/3} \lg(e^{2\pi i/3} - \zeta) + e^{-2\pi i/3} \lg(e^{-2\pi i/3} - \zeta)] \quad (35)$$

На фиг. 4 тонкими линиями показано продвижение пластической области, при увеличении угла закручивания ϑ . На этой фигуре темные линии представляют границы пластических областей, найденных для этой задачи численным путем (методом релаксации). Результаты последних вычислений для построения фиг. 4 взяты из работы Саусвелла [4].

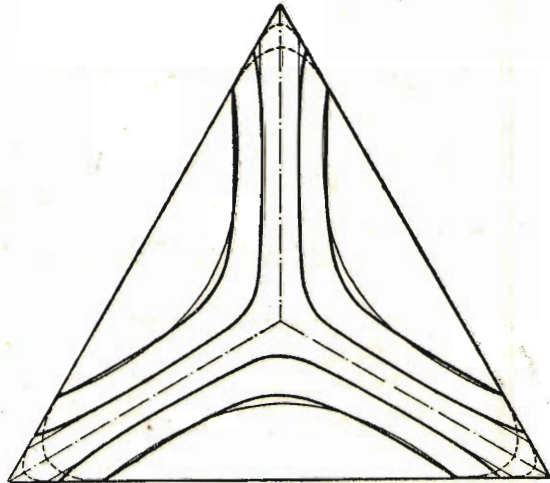
Во всех рассмотренных выше задачах определена форма границы между упругой и пластической областью на основании угла закручивания ϑ , а также величин модуля упругости G и константы пластичности k .

Для того чтобы определить, какому крутящему моменту, приложенному к призматическому стержню, соответствует данный угол закручивания и обусловленная им форма границы между упругой и пластическими областями, необходимо определить величину крутящего момента по формуле

$$M = \iint_F (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dF$$

Здесь F — площадь сечения стержня. Для определения компонент напряжений τ_{yz} и τ_{xz} необходимо воспользоваться выражениями (9) и (6).

Таким образом, в настоящей статье получен следующий результат.



Фиг. 4

Если дана функция $\psi(\tau)$, причем $-\pi < \tau < +\pi$, удовлетворяющая условиям

$$\nu < \psi(\tau) < \nu + 2\pi, \quad \psi'(\tau) \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \operatorname{tg} \psi(\chi)] \operatorname{ctg} \frac{\chi - \omega}{2} d\omega \right] \cos \psi(\chi) \psi'(\chi) d\chi = 0$$

то может быть построено решение задачи об упруго-пластическом кручении призматического стержня, контур которого определяется уравнениями

$$x(\tau) = C \cos \psi(\tau) + \frac{k}{4\pi G \vartheta} \left\{ \sin \psi(\tau) \cos \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \operatorname{tg} \psi(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega + \cos \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\tau} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \operatorname{tg} \psi(\chi)] \operatorname{ctg} \frac{\chi - \omega}{2} d\omega \right] \cos \psi(\chi) \psi'(\chi) d\chi \right\}$$

$$y(\tau) = -C \sin \psi(\tau) + \frac{k}{4\pi G \vartheta} \left\{ \cos^2 \psi(\tau) \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi[\operatorname{tg} \psi(\omega) + \operatorname{tg} \psi(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega + \sin \psi(\tau) \int_{\pi}^{\tau} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) [\operatorname{tg} \psi(\omega) + \operatorname{tg} \psi(\chi)] \operatorname{ctg} \frac{\chi - \omega}{2} d\omega \right] \cos \psi(\chi) \psi'(\chi) d\chi \right\}$$

а граница между упругой и пластической областями определяется на основании уравнений

$$x^*(\tau) = \frac{k}{2G \vartheta} \left[\cos \psi(\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega \right]$$

$$y^*(\tau) = \frac{k}{2G \vartheta} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \omega}{2} d\omega - \sin \psi(\tau) \right]$$

В случае, когда $\psi(\tau)$ нечетная монотонная функция от τ , изменяющаяся от $-\pi$ до π , стержень будет ограничен симметричным контуром.

Если $\psi(\tau) = \tau$, контур будет круговым. Если $\psi(\tau)$ на различных интервалах изменения будет принимать постоянные значения, контур будет близок к полигональному.

Поступила в редакцию
15 IV 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 4.
2. Соколовский В. В. Об одной задаче упруго-пластического кручения. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3.
3. Надаи А. Пластичность. ОНТИ. М. 1936.
4. Southwell R. V. Proc. of Roy. Soc. 1945. No 998.