

## НОРМАЛЬНЫЙ УДАР ПО НЕОГРАНИЧЕННОЙ ТОНКОЙ МЕМБРАНЕ

Д. М. Григорян

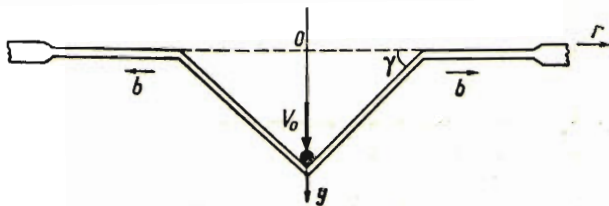
(Ереван)

**§ 1. Постановка задачи.** Пусть прямой круговой конус при своем движении встречает своей вершиной бесконечно простирающуюся тонкую мембрану. Будем предполагать, что:

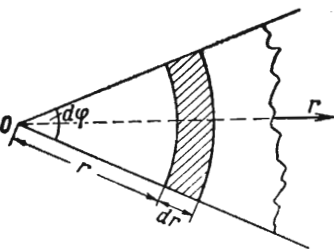
1) вектор скорости конуса  $V_0$ , направленный по оси конуса перпендикулярно мембране, остается постоянным;

2) после удара в мембране возникают только радиальные напряжения, а тангенциальные (кольцевые) напряжения равны нулю (достаточно тонкая мембрана).

После удара в деформированной области мембраны, где она принимает форму прямого кругового конуса, ее частицы приобретают радиальные и поперечные скорости. За пределами указанной области частицы обладают только радиальными скоростями.



Фиг. 1



Фиг. 2

Определим распространение напряжений в мембране при упругих и пластических ее деформациях.

Начало неподвижной системы координат расположим в точке удара, ось  $y$  по направлению скорости удара, ось  $r$  перпендикулярно оси  $y$  вправо (фиг. 1).

Рассмотрим элемент мембраны, отсекаемый двумя плоскостями, проходящими через ось  $y$ , и двумя бесконечно близкими коническими поверхностями, нормальными к деформированной поверхности мембраны (фиг. 2). Пусть угол, под которым виден элемент из центра удара, будет  $d\varphi$ .

Обозначим радиальные напряжения через  $\sigma$ , угол между касательной к меридиональному сечению мембраны и положительным направлением оси  $r$  через  $\gamma$ , радиальное смещение элемента через  $U(r, t)$ , поперечное через  $W(r, t)$  и лагранжеву координату частицы мембраны через  $r$ , деформацию элемента через  $\epsilon$  (фиг. 3)

Уравнения поперечно-радиального движения напишутся так:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{(r+U)}{1+\epsilon} \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right], \quad \rho_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{(r+U)\sigma}{1+\epsilon} \frac{\partial W}{\partial r} \right] \quad (1.1)$$

Обозначим через  $V$  эйлерову координату частицы в радиальном направлении, тогда  $V = r + U$  и уравнения (1.1) переписутся так:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V\sigma}{1+\epsilon} \frac{\partial V}{\partial r} \right), \quad \rho_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V\sigma}{1+\epsilon} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (1.2)$$

а уравнение движения в радиальном направлении при  $\gamma = 0$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(r+U)_r \sigma_r] \quad (1.3)$$

Здесь индекс  $r$  означает область радиального движения ( $\gamma = 0$ ).

**§ 2. Интегрирование уравнения радиального движения.** В уравнение движения, в начальные и граничные условия задачи входят три размерные постоянные:  $\rho_0$  — плотность материала мембраны,  $\sigma_r$  — величина, имеющая размерность давления, и  $V_0$  — скорость удара, из которых нельзя образовать величину, имеющую размерность длины. Поэтому положим

$$U_r(r, t) = a_0 t u_r \quad \left( z = \frac{r}{a_0 t} \right)$$

где  $a_0$  есть некоторая величина, имеющая размерность скорости. Тогда функция  $u_r$  будет зависеть только от безразмерной величины  $z$ .

Уравнение (1.3) приведет к виду

$$(1-z^2) \frac{d^2 u_r}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du_r}{dz} = 0 \quad (2.1)$$

где  $U_r$  по сравнению с  $r$  и  $\partial U_r / \partial r$  по сравнению с единицей пренебрежено. Интеграл уравнения (2.1) будет

$$u_r = c \left( \log \frac{1 - \sqrt{1-z^2}}{z} + \sqrt{1-z^2} \right) \quad (2.2)$$

При этом вторая произвольная постоянная опущена, так как из условия непрерывности смещения на поверхности продольного слабого разрыва получим  $u_r(1) = 0$ , и, следовательно, она равна нулю.

**§ 3. Интегрирование уравнений поперечно-радиального движения.** Нетрудно заметить, что выражение

$$W = c_2 V + c_3 a_0 t \quad (3.1)$$

является одним из первых интегралов уравнений (1.2). Поэтому интегрирование системы (1.2) приводится к решению уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma V}{\alpha} \quad \left( \alpha = \frac{1}{\cos \gamma} \right) \quad (3.2)$$

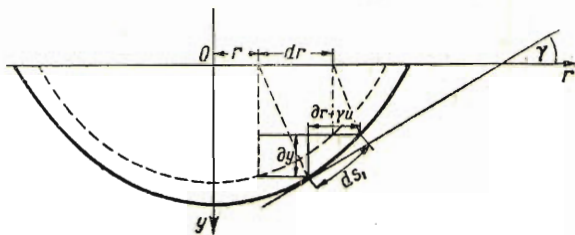
Рассмотрим случай достаточно малой скорости удара, когда пластические деформации распространяются на небольшую окрестность точки удара.

В этом случае для рассматриваемой области поперечно-радиального движения деформации будут упругими и, следовательно,

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \frac{E}{\rho_0 a_0} = 1$$

Раскрывая скобки и переходя в уравнении (3.2) к безразмерным величинам  $z$  и  $v = z + x$ , получим

$$v'' = \frac{(v' \alpha - 1) v'}{\alpha (z^2 - v)} \quad (3.3)$$



Фиг. 3

Так как  $z^2$  относительно  $v$  есть малая величина высшего порядка, то ею можно пренебречь. Уравнение (3.3) приведет к виду уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{\alpha dv'}{\alpha v' - 1} = \frac{dv}{v}$$

Дважды интегрируя, получим

$$\alpha [v - c_4 \log(v + c_4)] = z + c_5 \quad (3.4)$$

Интеграл (3.4) в безразмерных величинах имеет вид

$$w = c_2 v + c_3 \quad (3.5)$$

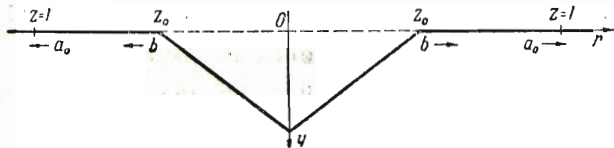
В точке удара эйлера координата частицы равна нулю, а пройденный путь в вертикальном направлении за время  $t$  равен  $V_0 t$ , т. е.

$V = 0$  и  $W = V_0 t$  при  $r = 0$ . Из (3.5) имеем

$$c_3 = \frac{V_0}{a_0} = v_0$$

Вставляя в (3.5) значение  $c_3$ , получим

$$w = c_2 v + v_0 \quad (3.6)$$



Фиг. 4

Механический смысл этого интеграла таков: форма мембраны в области продольно-поперечных движений имеет вид кругового конуса.

**§ 4. Граничные условия и определение неизвестных величин.** Принимаем следующую схему движения: в точке удара возникает радиальная волна слабого разрыва, распространяющаяся со скоростью звука  $a_0$ , и волна сильного разрыва, распространяющаяся со скоростью  $b_0$ , фронт которой является границей радиальных и поперечно-радиальных движений частиц мембраны. Эта схема движения отличается от схемы движения нити <sup>[1]</sup> тем, что в последнем случае после сильного разрыва имеет место только поперечное движение (фиг. 4).

Пусть  $z_0$  — безразмерная координата поверхности сильного разрыва,  $\varepsilon_1$  — деформация элемента слева от волны сильного разрыва,  $\varepsilon_r$  — упру-

го-радиальная деформация,  $\partial U_r / \partial t$  — радиальная скорость частицы справа от волны сильного разрыва,  $\partial V / \partial t$  — радиальная скорость частицы слева от поверхности сильного разрыва.

Применим теорему о количестве движения для элемента длиной  $(b_0 + \partial U_r / \partial t) dt$ , лежащего справа от поверхности сильного разрыва. Имеем

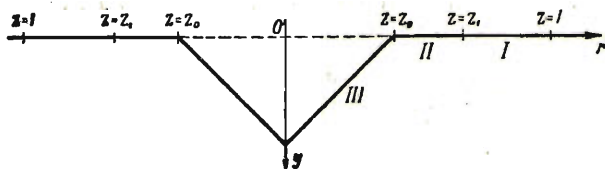
$$\begin{aligned} \rho_0 \left( b_0 - \frac{\partial U_r}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U_r}{\partial t} \right) &= \sigma_r - \sigma_1 \cos \gamma \\ \rho_0 \left( b_0 - \frac{\partial U_r}{\partial t} \right) \left( V_0 - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= \sigma_1 \sin \gamma \end{aligned} \quad (4.1)$$

На поверхности сильного разрыва  $W = 0$ . Из уравнения (3.5) следует, что  $dw / dv = c_2 = -\operatorname{tg} \gamma$ . Поэтому одно из уравнений непрерывности смещения

получим в виде

$$v_0 - v \operatorname{tg} \gamma = 0 \quad (4.2)$$

Второе уравнение непрерывности смещения получим, приравнявая радиальные смещения справа и



Фиг. 5

слева, т. е.  $V = r + U_r$ , или на основании (2.2)

$$v = z_0 + c \left( \log \frac{1 - \sqrt{1 - z_0^2}}{z_0} + \sqrt{1 - z_0^2} \right) \quad (4.3)$$

Рассматривая движения поверхности разрыва, замечаем, что

$$V = b_0 t, \quad \text{или} \quad v = b \quad (4.4)$$

где  $b$  — безразмерная скорость поверхности сильного разрыва.

Из симметрии движения следует равенство нулю радиального смещения частицы, лежащей в точке удара; т. е.  $v = 0$  при  $z = 0$ .

Следовательно, интеграл уравнения поперечного движения (3.3) после определения произвольного постоянного  $c_4$  из вышеуказанного условия запишется так:

$$\alpha \left( v - c_4 \log \frac{v + c_4}{c_4} \right) = z_0 \quad (4.5)$$

Таким образом, имеем шесть уравнений (4.1) — (4.5) с шестью неизвестными величинами  $c$ ,  $c_4$ ,  $b$ ,  $v$ ,  $\gamma$ ,  $z_0$ .

Решая эти уравнения, получим (с точностью до малых высшего порядка относительно  $z_0^2$ ) деформации и скорость удара:

$$\varepsilon = \varepsilon_r = \varepsilon_1 = z_0^2, \quad v_0 = 2\varepsilon \sqrt{-\log \varepsilon} \quad (4.6)$$

Для поверхности сильного разрыва получим

$$z_0 = \sqrt{\varepsilon}, \quad \operatorname{tg} \gamma = 2 \sqrt{-\varepsilon \log \varepsilon}, \quad v(z_0) = b = \sqrt{\varepsilon} \quad (4.7)$$

**§ 5. Случай упруго-пластических деформаций. Интегрирование уравнения радиального движения.** Из полученных формул следует, что для скоростей удара, больших  $V_{0s} = 2\varepsilon_s \sqrt{-\log \varepsilon_s}$ , вся область поперечно-продольных движений будет областью пластических деформаций. Очевидно, для  $V_0 \gg V_{0s}$  область пластических деформаций распространится и на часть мембраны, где движение только радиальное.

В этом случае возникают еще радиально-пластические волны. Схема движения приведена на фиг. 5; область  $z_1 \leq z \leq 1$  будет областью упругих движений, а  $z \leq z_1$  областью пластических деформаций. На поверхности  $z = z_1$  предполагаем, что скорости и деформации непрерывны.

Из графика растяжения (фиг. 6) нетрудно заметить, что для случая упруго-пластических деформаций напряжение выразится так:

$$\sigma_r = \sigma_s + E'(\varepsilon - \varepsilon_s),$$

или

$$\sigma_r = E'u' + \varepsilon_s(E - E')$$

Разделив все члены этого равенства на  $a_0^2 \rho$  и полагая  $E/a_0^2 \rho = 1$ , получим

$$\sigma_r = a_1^2 u' + \varepsilon_s(1 - a_1^2) \quad (5.1)$$

где

$$a_1^2 = \frac{E'}{a_0^2 \rho}, \quad \text{или} \quad a_1^2 = \frac{d}{du'} \frac{\sigma_r}{a_0^2 \rho} \quad (5.2)$$

Поэтому уравнение радиально-пластического движения примет вид

$$z(a_1^2 - z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1^2 \frac{dw}{dz} + \varepsilon_s(1 - a_1^2) = 0 \quad (5.3)$$

Легко видеть, что общее решение неоднородного уравнения (5.3) будет

$$w_r = c_6 \left( \log \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - z^2}}{z} + \frac{\sqrt{a_1^2 - z^2}}{a_1} \right) - \frac{1 - a_1^2}{a_1^2} \varepsilon_s z + c_7 \quad (5.4)$$

**§ 6. Интегрирование уравнений поперечных движений для пластического случая.** Как было упомянуто, интегрирование системы уравнений (1.2) сводится к интегрированию одного нелинейного уравнения в частных производных второго порядка (3.2). Раскрывая скобки в уравнении (3.2) и переходя к безразмерным величинам, получим

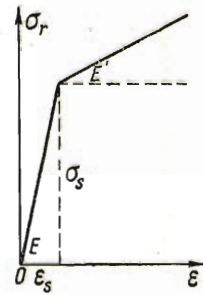
$$v''(z^3 - a_1^2 v) = a_1^2 v'^2 - kv' \quad (6.1)$$

где

$$a_1^2 = \frac{E'}{a_0^2 \rho}, \quad k = \frac{a_1^2(1 + \varepsilon_s) - a_2^2}{\alpha}, \quad a_2^2 = \frac{\sigma_s}{a_0^2 \rho} \quad (6.2)$$

В уравнении (6.1) с большой точностью можно заменить  $z^3$  через  $v^3$ , как это будет видно из численной оценки принятого приближения в конце этой статьи (табл. 1). Имеем

$$v''(v^2 - a_1^2) v = a_1^2 v'^2 - kv' \quad (6.3)$$



Фиг. 6

Интегрируя это уравнение, получим

$$z = \frac{c_8}{k_1(1+c_8^2)} \left\{ 1 + \frac{v - c_8 \sqrt{a_1^2 - v^2}}{a_1 c_8} + \frac{1}{\sqrt{1+c_8^2}} \log \frac{[\sqrt{a_1+v} + (c_8 + \sqrt{1+c_8^2})\sqrt{a_1-v}](1+c_8 - \sqrt{1+c_8^2})}{[\sqrt{a_1+v} + (c_8 - \sqrt{1+c_8^2})\sqrt{a_1-v}](1+c_8 + \sqrt{1+c_8^2})} \right\} \quad (6.4)$$

Здесь, так же как в упругом случае, для определения второй произвольной постоянной использовано условие  $v = 0$  при  $z_0 = 0$ ; величина  $k_1$  определяется формулой

$$k_1 = \frac{a_1^2(1+\epsilon_s) - a_2^2}{\alpha a_1^3}$$

**§ 7. Граничные условия.** Из условия равенства нулю вертикального смещения частицы на поверхности сильного разрыва  $W = 0$  при  $z = z_0$ , получаем первое уравнение непрерывности смещений (4.2), где  $z = z_0$ .

Второе уравнение непрерывности смещения получим, приравнявая между собой радиальные смещения справа и слева от поверхности сильного разрыва. Имеем  $v(z_0) = z_0 + u(z_0)$  или, пользуясь (5.4):

$$v(z_0) = z_0 + c_6 \left( \log \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - z_0^2}}{z_0} + \frac{\sqrt{a_1^2 - z_0^2}}{a_1} \right) - k_2 z_0 + c_7 \quad (7.1)$$

где

$$k_2 = \frac{1 - a_1^2}{a_1^2} \epsilon_s$$

Уравнения количества движения для элемента длины, лежащего справа от поверхности сильного разрыва  $z = z_0$ , как и для упругого случая, имеют вид (4.1).

Так как  $V = r + U$  и  $b_0$  есть скорость поверхности сильного разрыва, то в точке  $z = z_0$  имеет место равенство

$$v(z_0) = b \quad (7.2)$$

Как было упомянуто в § 5, точка  $z = z_1$  есть граница радиально-пластических деформаций и радиально-упругих деформаций. Из непрерывности деформации в этой точке слева и справа имеем

$$c \frac{\sqrt{1-z_1^2}}{z_1} = \epsilon_s, \quad \frac{c_6 \sqrt{a_1^2 - z_1^2}}{a_1 z_1} = \epsilon_s + k_2 = \frac{\epsilon_s}{a_1^2} \quad (7.3)$$

Наконец, из непрерывности радиально-упругих и радиально-пластических смещений в точке  $z_1$  имеем

$$\begin{aligned} & c \left( \log \frac{1 - \sqrt{1-z_1^2}}{z_1} + \sqrt{1-z_1^2} \right) = \\ & = c_6 \left( \log \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - z_1^2}}{z_1} + \frac{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}}{a_1} \right) - k_2 z_1 + c_7 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Значение интеграла (6.4) на поверхности сильного разрыва в точке  $z = z_0$ , условия (4.2), (7.1), уравнения (4.1) при  $z = z_0$  и равенства (7.2), (7.3) и (7.4) дают девять уравнений с десятью неизвестными  $v$ ,  $b$ ,  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $c_6$ ,  $c_7$ ,  $c_8$ ,  $\gamma$  и  $c$ .

Решая эти уравнения, получим (7.5)

$$z_1 = a_1 \left[ 1 + \left( \frac{(\epsilon_s + k_2) \sqrt{a_1^2 - z_0^2}}{z_0 x(z_0)} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad c = \frac{z_1 \epsilon_s}{\sqrt{1 - z_1^2}}, \quad c_6 = \frac{z_1 \epsilon_s}{a_1 \sqrt{a_1^2 - z_1^2}}$$

где

$$x(z_0) = \frac{a_1^2 - 2z_0^2(1 - k_2) - a_1 \sqrt{a_1^2 - 4z_0^2(1 - k_2)}}{2z_0^2}$$

Тогда  $v$  как функция  $z_0$  примет вид

$$v(z_0) = z_0(1 - k_2) + z_1(\epsilon_s + k_2) \left[ \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}} \log \frac{z_1(a_1 - \sqrt{a_1^2 - z_0^2})}{z_0(a_1 - \sqrt{a_1^2 - z_1^2})} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a_1^2 - z_0^2}{a_1^2 - z_1^2}} \right] + \frac{\epsilon_s z_1}{\sqrt{1 - z_1^2}} \log \frac{1 - \sqrt{1 - z_1^2}}{z_1}$$

Скорость волны сильного разрыва выразится через  $z_0$  из условий (7.2) и (7.6).

Таблица 1

$z_0$	$\epsilon$		$b$		$v_0$		$\text{tg } \gamma$	
	мем-брана	нить	мембрана	нить	мембрана	нить	мембрана	нить
Упругие деформации	220	5	224	219	27.7	47.3	878	2164
	316	10	316	301	54.5	79.5	1175	2642
	440	20	447	428	99.7	133.7	1551	3127
	630	40	632	594	188.0	224.9	2101	3789
	770	60	775	717	255.2	304.9	2484	4252
Пластическ. деформации	500	133	496	465	276	210	5571	4524
	600	398	592	532	416	350	7026	6573
	700	753	683	597	608	503	8906	8436
	800	1236	745	658	863	689	9945	10473
	1100	5261	—	1879	—	2110	—	10123

(все величины умножены на  $10^4$ )

Определяя постоянную  $c_8$  как функцию  $z_0$ , найдем

$$c_8 = \frac{Az_0 b(z_0)}{(a_1^2 - Az_0) \sqrt{a_1^2 - b^2}} \quad \left( A = z_0 + c_6 \frac{\sqrt{a_1^2 - z_0^2}}{a_1} - k_2 z_0 \right)$$

Подставляя значение  $c_8$  и  $v(z_0)$  в значение интеграла (6.4) при  $z = z_0$ , получим

$$\cos \gamma \doteq \zeta(z_0)$$

Из (4.2) определяем  $v_0$  как функцию  $z_0$ . Имеем

$$v_0 = b(z_0) \frac{\sqrt{1 - \zeta^2(z_0)}}{\zeta(z_0)}$$

и из (7.8) определяем  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ :

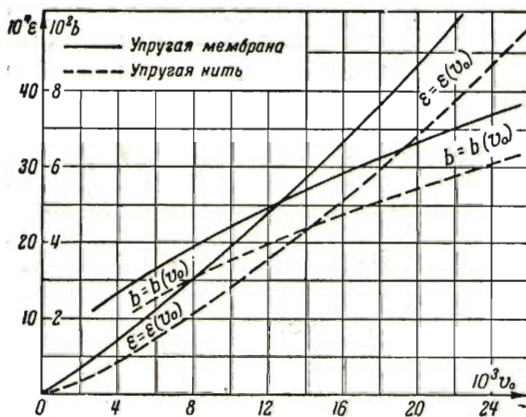
$$\epsilon_1 = c_6 \frac{\sqrt{a_1^2 - z_0^2}}{a_1 z_0} - \frac{1 - a_1^2}{a_1^2}, \quad \epsilon_2 = \alpha \frac{k_2(v + c_8 \sqrt{a_1^2 - v^2})}{v} - 1 \quad (k_3 = a_1 k_2)$$

Следовательно, все нужные величины выражены через координату поверхности сильного разрыва; в зависимости от задания этой координаты определяются  $v_0$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma$  и т. д.

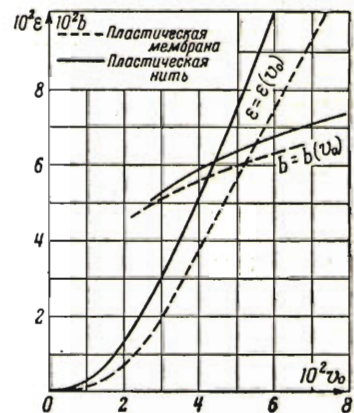
При вычислениях, результаты которых приведены в табл. 1, было принято  $a_1^2 = 0.05$ ,  $\varepsilon = 0.002$ . Заметим, что расхождения между коэффициентами точного уравнения (6.1) и приближенного (6.3), принятого для вычислений, в зависимости от значений координаты фронта поверхности сильного разрыва  $z_0$  оказались следующие:

	$z_0$	0.05	0.06	0.07	0.08
Коэффициент точный уравнений (6.1)	$(z^3 - a_1^2 v) 10^5$	235	274	307	321
Коэффициент приближенный уравнений (6.3)	$(v^2 - a_1^2) v 10^5$	236	275	399	332
Расхождения (в проц.)		0.13	0.30	0.82	3.42

На основании этих вычислений на фиг. 7 и 8 построены кривые зависимости  $\varepsilon = \varepsilon(v_0)$  и  $b = b(v_0)$  для упругих и пластических деформаций соответственно.



Фиг. 7



Фиг. 8

Из полученных нами формул (7.5) следует, что для некоторого значения  $z_0 > z^*$  решение делается мнимым. Поэтому случай  $z_0 > z^*$  подлежит дальнейшему исследованию.

Заметим, что для стали  $z^* = 0.11$  это соответствует скорости удара  $v_0 = 1055$  м/сек; следовательно, решение для  $z_0 > z^*$  имеет некоторый практический интерес.

Поступила в редакцию  
14 X 1948

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Х. А. Рахматулин. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 6.