

## НЕУСТОЙЧИВЫЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. Бородин, Ю. Ф. Дитякин

(Москва)

Изучение распада жидкой струи, перемещающейся в другой среде, например струи топлива, вытекающей из форсунки, показывает, что при достаточно больших скоростях истечения струя распадается на некоторое число капель различного диаметра. При еще больших скоростях истечения нераспавшийся участок струи практически исчезает и струя распадается непосредственно у сопла на множество капель различных диаметров (случай «распыливания»). Механизм распада в этом случае имеет весьма сложный характер. Струя распадается совершенно нерегулярно и множество различных по диаметру капель образует вблизи сопла расходящийся конус (факел распыливания).

Релей <sup>[1]</sup> впервые теоретически изучил распад струи и установил возможность образования капель. Релей показал, что возмущение струи идеальной жидкости, вытекающей в вакуум, имеющее длину волны в 4.4 раза больше диаметра струи, будет возрастать быстрее других возмущений, и в конечном счете струя распадется на капли одинакового диаметра. При этом Релею удалось теоретически определить диаметр капли, который хорошо согласуется с опытами при истечении струй с очень малыми скоростями. В дальнейшем Релей принял во внимание и вязкость струи. Оказалось, что вязкость уменьшает скорость нарастания возмущений, но отношение оптимальной длины волны к диаметру струи остается неизменным.

Другие авторы, изучавшие условия осесимметричного распада струи вязкой жидкости, нашли, что отношение оптимальной длины волны к диаметру струи несколько больше, чем вычислено Релеем.

Томотика <sup>[2]</sup> помимо вязкости принял во внимание плотность и вязкость среды, окружающей струю, и получил хорошее согласование с опытами по истечению струй с очень малыми скоростями, при которых образуются капли одинакового диаметра.

Однако ни одна из указанных теорий распада струи жидкости не давала возможности обосновать появление при распаде струи капель различного диаметра, что объясняется идеализацией условий задачи. Эта идеализация состояла либо в пренебрежении вязкостью струи или плотностью и вязкостью окружающей среды, либо в пренебрежении силами инерции. Такие упрощения были допущены ввиду сложности математического решения задачи и, в частности, сложности исследования характеристического уравнения (обычно трансцендентного), определяющего связь между длиной волны и инкрементом нарастания колебаний.

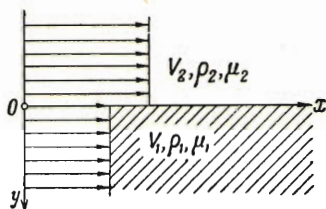
Ниже излагается попытка теоретически обосновать возможность появления в результате распада струи капель различного диаметра на основе рассмотрения неустойчивых капиллярных волн на поверхности раздела двух вязких жидкостей.

Для упрощения решения задачи, в частности для получения алгебраического характеристического уравнения, сделано предположение, что длины капиллярных волн на поверхности струи жидкости настолько малы по сравнению с радиусом струи, что радиус струи можно рассматривать бесконечно большим и, следовательно, можно перейти к изучению устойчивости плоской поверхности раздела двух беско-

нечно простирающихся вязких жидкостей. Это предположение представляет весьма большую идеализацию, но тем не менее позволяет качественно выявить наличие не одной, а нескольких неустойчивых капиллярных волн, приводящих к образованию при переходе на струю капель различных диаметров.

В работе доказано наличие нескольких неустойчивых капиллярных волн, могущих привести к отрыву от поверхности раздела нескольких бесконечно длинных шнуров различных размеров. Исследованная задача дает грубо приближенную схему распада струи жидкости в другой среде и не претендует на объяснение сложного механизма предельной формы распада струи — распыливания. Тем не менее одна из особенностей распыливания — появление спектра размеров капель — начинает выявляться даже при данном идеализированном рассмотрении устойчивости поверхности раздела.

**1. Уравнения малых колебаний и их решение.** Рассмотрим плоскую поверхность раздела двух бесконечно простирающихся вязких жидкостей (фиг. 1). Вязкость и плотность нижней жидкости обозначим соответственно через  $\mu_1$  и  $\rho_1$ , а верхней жидкости —



Фиг. 1

через  $\mu_2$  и  $\rho_2$ . Предположим, что нижняя жидкость движется со скоростью  $V_1$ , а верхняя — со скоростью  $V_2$ , причем направления движения одинаковы и скорости не зависят от  $y$ .

Исследуем характер равновесия поверхности раздела под действием вязких сил и сил поверхностного натяжения, задавая обеим жидкостям малые возмущения, параллельные оси  $x$ . Будем считать жидкости несжимаемыми и невесомыми и дадим компонентам движения некоторые возмущения:

$$V_x = V + v_x, \quad V_y = v_y, \quad p = P + p^*$$

Далее будем считать, что скорости наложенных возмущений и их производные до третьей включительно являются малыми и что можно пренебречь величинами второго порядка малости.

Тогда из уравнений Навье-Стокса получим уравнения наложенных возмущений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + V \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + V \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \Delta v_y \quad (1.1)$$

где  $\nu = \mu / \rho$  — кинематическая вязкость.

Уравнение неразрывности будет

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Введем функцию тока возмущения

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

и исключим из уравнений (1.1) давление  $p^*$ .



Тогда получим линеализованное уравнение в форме Гельмгольца

$$\nu \Delta \Delta \psi - V \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

Пусть функция тока наложенного возмущения есть периодическая функция  $x$  и времени  $t$ :

$$\psi = f(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad \left( \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \quad (1.5)$$

где  $\alpha$  — пространственная круговая частота колебаний (волновое число),  $\lambda$  — длина волны наложенного возмущения,  $\beta = \beta_r + i\beta_i$  — комплексная частота колебаний по времени,  $\beta_r$  — действительная частота колебаний по времени,  $\beta_i$  — инкремент нарастания или декремент затухания.

Таким образом, характер движения волн на поверхности раздела после сообщения обеим жидкостям возмущения будет зависеть от знака мнимой части частоты  $\beta_i$ : если  $\beta_i$  положительно, то будет происходить нарастание амплитуд волн по времени; если  $\beta_i$  отрицательно, то будет происходить затухание амплитуд волн; наконец, если  $\beta_r = 0$ , то будет происходить аperiodическое нарастание ( $\beta_i > 0$ ) или затухание ( $\beta_i < 0$ ) амплитуд волн. Подставляя выражение (1.5) в уравнение (1.4), получим

$$\nu f^{IV} - (2\alpha^2\nu - i\beta) f'' - (i\beta\alpha^2 - \nu\alpha^4) f - iV\alpha(f'' - \alpha^2 f) = 0 \quad (1.6)$$

Приходим к задаче о собственных значениях однородной системы уравнений четвертого порядка.

Обозначив  $f'' - \alpha^2 f = \varphi$ , получим систему уравнений второго порядка

$$\varphi'' + \left( i \frac{\beta - V\alpha}{\nu} - \alpha^2 \right) \varphi = 0, \quad f'' - \alpha^2 f = \varphi \quad (1.7)$$

Для дальнейшего введем обозначения

$$\sqrt{i \frac{\beta - V_1\alpha}{\nu_1} - \alpha^2} = m_1, \quad \sqrt{i \frac{\beta - V_2\alpha}{\nu_2} - \alpha^2} = m_2 \quad (1.8)$$

Решение первого уравнения (1.7) имеет вид

$$\varphi = C_1 e^{im_1 y} + C_2 e^{-im_1 y} \quad (1.9)$$

Подставив выражение (1.9) во второе уравнение (1.7), получим неоднородное уравнение, решение которого будет

$$f = -\frac{e^{im_1 y}}{m_1^2 + \alpha^2} C_1 - \frac{e^{-im_1 y}}{m_1^2 + \alpha^2} C_2 + e^{\alpha y} C_3 + e^{-\alpha y} C_4 \quad (1.10)$$

Функция тока для нижней и верхней жидкостей согласно (1.5) будут

$$\psi_1 = e^{i(\alpha x - \beta t)} \left( -\frac{e^{im_1 y}}{m_1^2 + \alpha^2} C_1 - \frac{e^{-im_1 y}}{m_1^2 + \alpha^2} C_2 + e^{\alpha y} C_3 + e^{-\alpha y} C_4 \right) \quad (1.11)$$

$$\psi_2 = e^{i(\alpha x - \beta t)} \left( -\frac{e^{im_2 y}}{m_2^2 + \alpha^2} C_5 - \frac{e^{-im_2 y}}{m_2^2 + \alpha^2} C_6 + e^{\alpha y} C_7 + e^{-\alpha y} C_8 \right) \quad (1.12)$$

Произвольные постоянные  $C_i$  должны быть определены из условий на поверхности раздела и на бесконечности.

**2. Граничные условия.** Граничные условия задачи будут следующие.

1. На бесконечности ( $y = \pm \infty$ ) должны сохраняться конечные решения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Следовательно, произвольные постоянные при членах с положительными показателями степеней экспоненты для  $\psi_1$  и с отрицательными показателями для  $\psi_2$  должны быть приравнены нулю:  $C_1 = C_3 = C_6 = C_8 = 0$ . Тогда уравнения (1.10) и (1.11) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\psi_1 &= e^{i(\alpha x - \beta t)} \left( -\frac{e^{-im_1 y}}{m_1^2 + \alpha^2} C_2 + e^{-\alpha y} C_4 \right) \\ \psi_2 &= e^{i(\alpha x - \beta t)} \left( -\frac{e^{im_2 y}}{m_2^2 + \alpha^2} C_5 + e^{\alpha y} C_7 \right)\end{aligned}\quad (2.1)$$

2. На поверхности раздела должно отсутствовать скольжение, т. е.

$$(v_{x1})_{y=0} = (v_{x2})_{y=0}, \quad (v_{y1})_{y=0} = (v_{y2})_{y=0}$$

или

$$\left( \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)_{y=0} \quad (2.2)$$

3. Касательные напряжения на поверхности раздела непрерывны

$$\mu_1 (\Delta \psi_1)_{y=0} = \mu_2 (\Delta \psi_2)_{y=0} \quad (2.3)$$

4. Разность нормальных напряжений  $p_{y1}$  и  $p_{y2}$  на поверхности раздела равна давлению, вызванному поверхностным натяжением, т. е.

$$p_{y1} - p_{y2} = \left( -p_1 + 2\mu_1 \frac{\partial v_{y1}}{\partial y} \right) - \left( -p_2 + 2\mu_2 \frac{\partial v_{y2}}{\partial y} \right) = -T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

где  $T$  — капиллярная постоянная одной жидкости относительно другой,  $h$  — поднятие поверхности раздела в точке  $x$ .

Используя уравнения (2.1), получим граничные условия (2.2) в виде

$$\begin{aligned}\frac{im_1}{m_1^2 + \alpha^2} C_2 - \alpha C_4 + \frac{im_2}{m_2^2 + \alpha^2} C_5 - \alpha C_7 &= 0 \\ -\frac{C_2}{m_1^2 + \alpha^2} + C_4 + \frac{C_5}{m_2^2 + \alpha^2} - C_7 &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Аналогично граничное условие (2.3) получим в виде

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1}{\mu_2} \left[ -\left( -\frac{C_2}{m_1^2 + \alpha^2} + C_4 \right) \alpha^2 + \frac{m_1^2}{m_1^2 + \alpha^2} C_2 + \alpha^2 C_4 \right] &= \\ = -\left( -\frac{C_5}{m_2^2 + \alpha^2} + C_7 \right) \alpha^2 + \frac{m_2^2}{m_2^2 + \alpha^2} C_5 + \alpha^2 C_7\end{aligned}\quad (2.6)$$

Давления  $p_1$  и  $p_2$  вычислим из уравнений (1.1) и (2.1). Имеем

$$p_1 = \rho_1 e^{i(\alpha x - \beta t)} \left[ \frac{\alpha e^{-im_1 y}}{m_1^2 + \alpha^2} \left( \frac{v_1 \alpha^2}{m_1} - \frac{iV_1 \alpha}{m_1} + \frac{i\beta}{m_1} + m_1 v_1 \right) C_2 + \right. \\ \left. + (\beta + i v_1 \alpha^2 - V_1 \alpha - i v_1 \alpha^2) e^{-\alpha y} C_4 \right] \quad (2.7)$$

$$p_2 = \rho_2 e^{i(\alpha x - \beta t)} \left[ \frac{\alpha e^{im_2 y}}{m_2^2 + \alpha^2} \left( \frac{v_2 \alpha^2}{m_2} - \frac{iV_2 \alpha}{m_2} + \frac{i\beta}{m_2} + m_2 v_2 \right) C_5 + (\beta - V_2 \alpha) e^{\alpha y} C_7 \right]$$



Поднятие точки на поверхности есть периодическая функция от  $x$  и  $t$ :

$$h = H e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (2.8)$$

где  $H$  — максимальное поднятие точки над поверхностью раздела.

Скорость поднятия точки на поверхности раздела

$$-(v_{y1})_{y=0} = \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)_{y=0} = \frac{\partial h}{\partial t} + V_1 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.9)$$

После дифференцирования выражений (2.1) и (2.8) и подстановки в выражение (2.9) получим

$$H = \frac{\alpha}{\alpha V_1 - \beta} \left( C_4 - \frac{C_2}{m_1^2 + \alpha^2} \right) \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9) и дифференцируя (2.9), получим

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\alpha^3}{\alpha V_1 - \beta} \left( \frac{C_2}{m_1^2 + \alpha^2} - C_4 \right) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (2.11)$$

Подсчитав производные  $\partial v_{y1} / \partial y$  и  $\partial v_{y2} / \partial y$  и подставив их совместно с выражениями (2.7) и (2.11) в (2.4), получим граничное условие

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{m_1^2 + \alpha^2} \left[ \frac{-\mu_1 \alpha^2 + i \rho_1 V_1 \alpha - i \beta \rho_1}{m_1} + m_1 u_1 + \frac{T \alpha^2}{\alpha V_1 - \beta} \right] C_2 - \\ & - \left( \rho_1 \beta - \rho_1 V_1 \alpha - i 2 \mu_1 \alpha^2 + \frac{T}{\alpha V_1 - \beta} \right) C_4 + \frac{\alpha}{m_2^2 + \alpha^2} \left[ \frac{\mu_2 \alpha^2 - i \rho_2 V_2 \alpha + i \beta \rho_2}{m_2} + \right. \\ & \left. + 3 m_2 \mu_2 \right] C_5 + (\rho_2 \beta - \rho_2 V_2 \alpha + i 2 \mu_2 \alpha^2) C_7 = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Введем безразмерные параметры

$$Z = \frac{c}{v_1 \alpha}, \quad R_1 = \frac{V_1}{v_1 \alpha}, \quad R_2 = \frac{V_2}{v_2 \alpha}, \quad A = \frac{v_1}{v_2}, \quad N = \frac{T \rho_1}{\mu_1^2 \alpha}, \quad K = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (2.13)$$

Здесь  $c = \beta / \alpha$  — комплексная волновая скорость.

Тогда выражения (1.8) представим в виде

$$m_1 = \alpha \sqrt{i(Z - R_1) - 1}, \quad m_2 = \alpha \sqrt{i(ZA - R_2) - 1}$$

Представим уравнения (2.5), (2.6) и (2.12) в безразмерных параметрах. Предварительно введем обозначения

$$\begin{aligned} a_1^* &= \mu_1 \frac{i}{Z - R_1} \left[ \frac{2}{\sqrt{i(Z - R_1) - 1}} + \frac{N}{Z - R_1} \right] = \mu_1 a_1 \\ b_1^* &= \alpha^2 \mu_1 \left( Z - R_1 - 2i + \frac{N}{R_1 - Z} \right) = \alpha^2 \mu_1 b_1, \\ c_1^* &= \mu_2 \frac{2(i - 2R_2 + 2AZ)}{(ZA - R_2) \sqrt{i(ZA - R_2) - 1}} = \mu_2 \alpha^2 c_1, \quad a_3^* = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{i}{Z - R_1} = \frac{a_3}{\alpha^2} \\ d_1^* &= \mu_2 \alpha^2 (ZA - R_2 + 2i) = \mu_2 \alpha^2 d_1, \quad c_3^* = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{i}{ZA - R_2} = \frac{c_3}{\alpha^2} \\ a_2^* &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{i(Z - R_1) - 1} = \frac{a_2}{\alpha} \quad c_2^* = \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{i(ZA - R_2) - 1}}{ZA - R_2} = \frac{c_2}{\alpha} \end{aligned}$$

где  $a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, c_2, c_3, d_1$  будут также безразмерными величинами.

Тогда получим систему уравнений для постоянных  $C_2, C_4, C_5, C_7$ :

$$\begin{aligned} a_1 * C_2 - b_1 * C_4 + c_1 * C_5 + d_1 * C_7 &= 0 \\ a_2 * C_2 - \alpha C_4 + c_2 * C_5 - \alpha C_7 &= 0 \\ -a_3 * C_2 + C_4 + c_3 * C_5 - C_7 &= 0 \\ K C_2 - C_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Эта система однородных уравнений имеет решения, отличные от нуля, если ее определитель равен нулю. Составив определитель и развернув его, получим

$$2K(a_1 + c_1) + (d_1 - Kb_1)(a_2 + Kc_3) + (Kb_1 + d_1)(Kc_3 - a_3) = 0$$

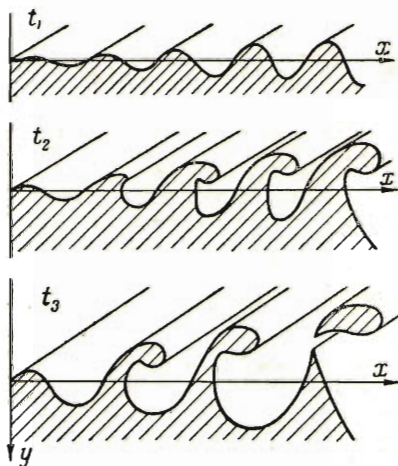
Раскрывая это уравнение относительно  $Z$ , получим полное уравнение 18-й степени с комплексными коэффициентами

$$r_{18}Z^{18} + (r_{17} + is_{17})Z^{17} + \dots + (r_1 + is_1)Z + (r_0 + is_0) = 0 \quad (2.16)$$

Действительные и мнимые части коэффициентов зависят от пяти безразмерных параметров:  $R_1, R_2, A, N, K$ .

**3. Исследование корней характеристического уравнения.** Нарастание колебаний, т. е. потеря устойчивости поверхности раздела, происходит у тех волн, у которых мнимая часть частоты положительна ( $\beta_i > 0$ ). Следовательно, исследование корней уравнения (2.16) должно определить те области параметра  $N$  или волнового числа  $\alpha$ , в которых комплексные корни уравнения лежат в верхней полуплоскости.

По гипотезе Релея дальнейшее развитие неустойчивой деформации, т. е. форма и размер отрывающихся частиц, определяется наиболее опасными (или оптимальными) возмущениями. Наиболее опасными возмущениями называются такие возмущения, которые развиваются быстрее других, т. е. соответствуют максимуму инкремента нарастания  $\beta_i$ . Этот принцип определения характера неустойчивых деформаций по характеру максимально неустойчивого возмущения нашел экспериментальное подтверждение у ряда исследователей [3].



Фиг. 2

В рассматриваемом случае нарастание амплитуд колебаний будет приводить к отрыву от поверхности раздела бесконечно длинных шнуров подобно образованию и отрыву гребней волн. При этом отрыв будет происходить при таких значениях  $\alpha$  или длин волн  $\lambda$ , при которых  $\beta_i$  имеет максимальное значение.



Если представить себе, что на обе жидкости накладывается спектр малых периодических возмущений, который можно разложить в ряд Фурье, то гармоники с длинами волн, равными длинам волн максимально неустойчивых возмущений, вызовут отрыв от поверхности раздела бесконечно длинных шнуров. Поскольку характеристический размер (например, диаметр поперечника шнура) связан с длиной волны максимально неустойчивого возмущения, то с поверхности раздела будут отрываться шнуры различных размеров. На фиг. 2 представлена схема образования таких шнуров для трех последовательных моментов времени.

Исследуем корни наиболее простого частного случая уравнения (2.16).

Пусть обе жидкости неподвижны, а кинематические вязкости жидкостей одинаковы. В этом случае  $V_1 = V_2 = 0$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $m_1 = m_2$ ,  $A = 1$ ,  $R_1 = R_2 = 0$  и уравнение (2.16) перейдет в уравнение 8-й степени, коэффициенты которого зависят только от двух параметров  $K$  и  $N$ :

$$A_0 Z^8 + (A_1 + iB_1) Z^7 + (A_2 + iB_2) Z^6 + (A_3 + iB_3) Z^5 + (A_4 + iB_4) Z^4 + (A_5 + iB_5) Z^3 + (A_6 + iB_6) Z^2 + (A_7 + iB_7) Z + A_8 = 0 \quad (3.1)$$

Здесь (3.2)

$$\begin{aligned} A_0 &= -(1 - K)^2, \quad A_2 = 2K(K - 1)N - K^4 + 2K^3 - 4K^2 + 6K + 13 \\ A_1 &= -2K(K - 1)^2, \quad A_3 = 4K^2(K - 1)N - 2K(3K^2 + 13), \quad A_7 = 2K^3N^2 \\ A_4 &= -K^2N^2 + 2(K^4 - K^3 + 3K^2 + 5K)N - 12K^3 + 26K^2 - 10K - 9 \\ A_5 &= -2K^3N^2 + 12K^3N - 8K^3 - 8K^2, \quad A_8 = -K^2(1 + 2K)N^2, \\ A_6 &= (1 - K^2)K^2N^2 + (4K^4 - 10K^3 - 4K^2 - 6K)N - 8K^3 + 12K^2 - 8K + 4 \\ B_1 &= 2(K^2 + 2K - 3), \quad B_3 = 3K^4 - 14K^3 + 13K^2 + 18K + 13 - 8KN \\ B_2 &= 4K(K - 1)^2, \quad B_4 = 8K^3 - 4K^2 - 20K - 2K^3N, \quad B_6 = 4K^2(1 - K)N \\ B_5 &= -2K^2N^2 + [2K(1 + K)(1 + K - K^2) + 8K^3 + 4K^2 + 4K]N + \\ &\quad + 4(K - 1 - K^2)(1 + K - K^2) + 4K^4 - 20K^3 - 4(K - 1 - K^2)^2 \\ B_7 &= [K^2(1 + K)^2 - 2K^4]N^2 + [4K^4 + 4K(1 + K)(K - 1 - K^2)]N \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение (3.1) является полиномом, коэффициенты которого нелинейно зависят от двух параметров  $K$  и  $N$ . Каждой паре значений параметров  $K$  и  $N$ , т. е. каждой точке плоскости  $KN$ , соответствует вполне определенный полином (3.1), т. е. вполне определенные значения восьми корней полинома. На плоскости  $KN$ , очевидно, можно найти кривую, каждая точка которой соответствует полиному (3.1), имеющему по крайней мере один корень, расположенный на действительной оси, так что только при переходе через эту кривую возможен переход корней через действительную ось. Эта кривая разбивает плоскость  $KN$  на области, точкам каждой из которых соответствуют полиномы (3.1), имеющие одно и то же число корней с положительной мнимой частью.

Построим эти кривые, используя метод Ю. И. Неймарк<sup>[4]</sup>, который позволяет производить разбиение плоскости параметров для корней полинома, лежащих в левой или правой полуплоскости.

Сделаем подстановку  $Z = -i\zeta$ . Верхняя полуплоскость корней уравнения (3.1) преобразуется в левую полуплоскость корней уравнения

$$-A_0\zeta^8 + i(A_1 + iB_1)\zeta^7 + (A_2 + iB_2)\zeta^6 - i(A_3 + iB_3)\zeta^5 - (A_4 + iB_4)\zeta^4 + + i(A_5 + iB_5)\zeta^3 + (A_6 + iB_6)\zeta^2 - (A_7 + iB_7)\zeta + A_8 = 0 \quad (3.3)$$

Сделав в уравнении (3.3) подстановку  $\zeta = i\xi/\eta$  и умножив результат на  $\eta^8$ , уравнение (3.3) приведем к виду

$$F(\xi, \eta) + iG(\xi, \eta) = 0 \quad (3.4)$$

где

$$F(\xi, \eta) = A_0\xi^8 + A_1\xi^7\eta + A_2\xi^6\eta^2 + A_3\xi^5\eta^3 + A_4\xi^4\eta^4 + A_5\xi^3\eta^5 + + A_6\xi^2\eta^6 + A_7\xi\eta^7 + A_8\eta^8 \quad (3.5)$$

$$G(\xi, \eta) = B_1\xi^7\eta + B_2\xi^6\eta^2 + B_3\xi^5\eta^3 + B_4\xi^4\eta^4 + B_5\xi^3\eta^5 + B_6\xi^2\eta^6 + B_7\xi\eta^7$$

Если  $R_{2n}$  — пространство комплексных полиномов степени  $n$  и  $D(k, n-k)$  — множество полиномов  $R_{2n}$ , имеющих  $k$  корней слева и  $n-k$  корней справа от мнимой оси комплексной сферы, то, составив таблицу

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

и произведя преобразование

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} A_0 + \lambda_1 B_1 & A_1 + \lambda_1 B_2 & A_2 + \lambda_1 B_3 & A_3 + \lambda_1 B_4 & \dots & A_7 & A_8 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_7 & 0 \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

получим, что таблице (3.7) соответствует полином того же типа в смысле распределения корней относительно мнимой оси, что и (3.4).

Из таблицы (3.6) получим неравенство, определяющее область в плоскости  $KN$ , соответствующую наличию первого корня уравнения (3.1) в верхней полуплоскости:

$$A_0 B_1 < 0 \quad (3.8)$$

Полагая в таблице (3.7)  $\lambda_1 = -A_0/B_1$ , получим

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} (A_1 B_1 - A_0 B_2)/B_1 & (A_2 B_1 - A_0 B_3)/B_1 & (A_3 B_1 - A_0 B_4)/B_1 & \dots & A_7 & A_8 \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_7 & 0 \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

Так как  $A_1 B_1 - A_0 B_2 = -16K(K-1)^3 < 0$  при  $K > 1$ , то, умножив элементы первой строки (3.9) на  $B_1^2/(A_1 B_1 - A_0 B_2)$  и поменяв знаки во второй строке, получим

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} B_1 & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & -B_4 & -B_5 & -B_6 & -B_7 & 0 \end{array} \right\} \quad (3.10)$$



где введено обозначение

$$\begin{aligned} \frac{B_1(A_2B_1 - A_0B_3)}{A_1B_1 - A_0B_2} = D_1, \quad \frac{B_1(A_3B_1 - A_0B_4)}{A_1B_1 - A_0B_2} = D_2, \quad \frac{B_1(A_4B_1 - A_0B_5)}{A_1B_1 - A_0B_2} = D_3 \\ \frac{B_1(A_5B_1 - A_0B_6)}{A_1B_1 - A_0B_2} = D_4, \quad \frac{B_1(A_6B_1 - A_0B_7)}{A_1B_1 - A_0B_2} = D_5 \quad (3.11) \\ \frac{B_1A_7}{A_1B_1 - A_0B_2} = D_6, \quad \frac{B_1A_8}{A_1B_1 - A_0B_2} = D_7 \end{aligned}$$

Оставим первую строку (3.10) без изменения, ко второй строке прибавим первую. Имеем

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} B_1 & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 \\ 0 & D_1 - B_2 & D_2 - B_3 & D_3 - B_4 & D_4 - B_5 & D_5 - B_6 & D_6 - B_7 & C_7 \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

Отсюда получим неравенство, определяющее область в плоскости  $KN$ , соответствующее наличию второго корня уравнения (3.1) в верхней полуплоскости:

$$B_1(D_1 - B_2) < 0 \quad (3.13)$$

Произведя преобразование, подобное (3.7) таблицы (3.12), получим

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} B_1 + \lambda_2(D_1 - B_2) & D_1 + \lambda_2(D_2 - B_3) & D_2 + \lambda_2(D_3 - B_4) & \dots & D_7 \\ 0 & D_1 - B_2 & D_2 - B_3 & \dots & C_7 \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

Положив  $\lambda_2 = -\frac{B_1}{D_1 - B_2}$  и подставив в (3.14), получим

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{D_1(D_1 - B_2) - B_1(D_2 - B_3)}{D_1 - B_2} & \frac{D_2(D_1 - B_2) - B_1(D_3 - B_4)}{D_1 - B_2} & & \\ D_1 - B_2 & D_2 - B_3 & & \\ \frac{D_3(D_1 - B_2) - B_1(D_4 - B_5)}{D_1 - B_2} & \dots & & \\ D_3 - B_4 & \dots & \dots & \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

Так как  $D_1(D_1 - B_2) - B_1(D_2 - B_3) > 0$  при  $K > 1$ , то, умножив элементы первой строки (3.15) на  $(D_1 - B_2)^2 / [D_1(D_1 - B_2) - B_1(D_2 - B_3)]$ , получим

$$\left\{ \begin{array}{cccc} D_1 - B_2 & \frac{[D_2(D_1 - B_2) - B_1(D_3 - B_4)](D_1 - B_2)}{D_1(D_1 - B_2) - B_1(D_2 - B_3)} & \dots & \\ D_1 - B_2 & D_2 - B_3 & \dots & \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Вычитаем из элементов второй строки (3.16) элементы первой строки:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} D_1 - B_2 & [D_2(D_1 - B_2) - B_1(D_3 - B_4)](D_1 - B_2) & \dots & \\ 0 & (D_2 - B_3) - \frac{[D_2(D_1 - B_2) - B_1(D_3 - B_4)](D_1 - B_2)}{D_1(D_1 - B_2) - B_1(D_2 - B_3)} & \dots & \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Отсюда получим неравенство, определяющее область в плоскости параметров  $KN$ , соответствующее наличию третьего корня уравнения (3.1) в верхней полуплоскости:

$$(D_1 - B_2) \left[ (D_2 - B_3) - \frac{[D_2(D_1 - B_2) - B_1(D_3 - B_4)](D_1 - B_2)}{D_1(D_1 - B_2) - B_1(D_2 - B_3)} \right] < 0 \quad (3.18)$$

Подобные условия можно получить и для всех остальных корней уравнения (3.1). Ограничимся здесь тремя условиями, которых достаточно для доказательства существования нескольких неустойчивых волн.

Заменяя неравенства (3.8), (3.13) и (3.18) равенствами, получим уравнения кривых, определяющих разбиение плоскости  $KN$  на области.

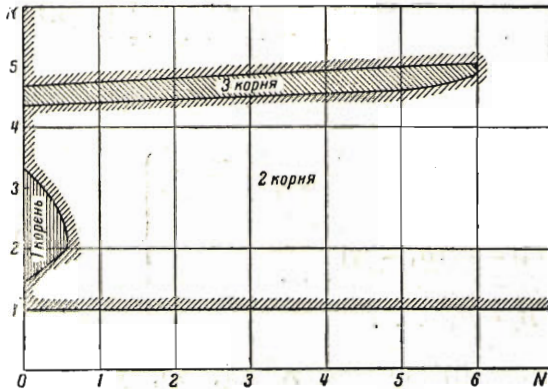
Рассмотрим наиболее интересный случай больших  $K = \nu_1 / \nu_2 \gg 1$ . Тогда из (3.8), (3.13) и (3.18), принимая во внимание (3.2) и (3.11) и пренебрегая малыми степенями  $K$ , получим

$$\begin{aligned} 2(K-1)^3(K+3) &= 0, & e_0 N^3 + e_1 N^2 + e_2 N + e_3 &= 0 \\ 4(K^2-1)(K+3)N + K(K-1)(K^3 + 17K^2 - 96K + 99) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} e_0 &= 128(K^4 - K^3 - 23K^2 - 39K - 18) \\ e_1 &= 592K(K^5 + 8.4K^4 + 3.18K^3 - 96K^2 - 20.3K + 0.98) \\ e_2 &= 9K^2(K^6 + 8.4K^5 - 97.3K^4 - 2045K^3 + 1700K^2 + 390K + 363) \\ e_3 &= 24K^5(K^5 + 12.3K^4 + 306K^3 - 4100K^2 + 12300K - 7000) \end{aligned}$$

Изображая кривые (3.19) в плоскости  $KN$  и выделяя штриховкой области разбиения в соответствии со знаками неравенств (3.8), (3.13)



Фиг. 3

(3.18), получим диаграмму, представленную на фиг. 3.

Диаграмма показывает, что при  $K > 0$ ,  $N > 0$  существует область значений  $K$  и  $N$ , соответствующая наличию трех корней с положительной мнимой частью, т. е. трех неустойчивых волн на поверхности раздела.

Разбиение плоскости  $KN$  для остальных корней могло бы установить области с еще большим числом корней с положительной мнимой частью. Однако и данная неполная диаграмма показывает существование нескольких неустойчивых волн. При наличии максимума  $\beta_i$  или  $c_i$  от поверхности раздела будет отрываться несколько бесконечно длинных шнуров, размер поперечника которых будет зависеть от длины волны наиболее опасного возмущения.

Поступила в редакцию  
25 III 1949

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Релей Д. В. Теория звука. ОГИЗ. 1944. Т. 2.
2. Tomotika S. Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 150. No 870.
3. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев. Изд. ЦАГИ. 1937. Вып. 304.
4. Неймарк Ю. И. К задаче распределения корней полиномов. ДАН. 1947. Т. 58. № 3.