

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

М. Е. Швец

(Ленинград)

В работе рассматривается приближенное решение некоторых задач из теории пограничного слоя. Используемый метод представляет собой сочетание методов пограничного слоя и последовательных приближений. Его сущность видна непосредственно из рассмотренных задач.

§ 1. Решение уравнения диффузии. Ряд физических процессов описывается уравнением диффузии

$$u' \frac{\partial q'}{\partial x'} = k' \frac{\partial^2 q'}{\partial z'^2} \quad (1.1)$$

и граничными условиями

$$q'(0, x) = Q = \text{const}, \quad q'(\infty, x) = 0, \quad q'(z, 0) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь q — концентрация, u — скорость. В безразмерных величинах, введенных по формулам

$$q' = Qq, \quad z' = \frac{k'}{u'} z, \quad x' = \frac{k'}{u'} x$$

уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (1.3)$$

Его решение при граничных условиях (1.2) будет

$$q = 1 - \Psi\left(\frac{z}{2\sqrt{Vx}}\right) \quad \left(\Psi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\lambda^2} d\lambda\right) \quad (1.4)$$

где Ψ — функция ошибок.

Это решение дает для скорости диффузии следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_0 = \frac{1}{\sqrt{V\pi x}} = \frac{0.57}{\sqrt{x}} \quad (1.5)$$

Рассмотрим приближенное решение этой задачи.

Введем в рассмотрение некоторую функцию δ , которую будем называть «толщиной пограничного слоя», и будем записывать условие при $z = \infty$ как условие при $z = \delta$. Тогда имеем условия

$$q(0, x) = 1, \quad q(\delta, x) = 0 \quad (1.6)$$

Толщина пограничного слоя δ является неизвестной функцией переменной x ; для ее определения примем условие

$$\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_\delta = 0 \quad (1.7)$$

Будем отыскивать q с помощью последовательных приближений

$$q^{(1)} = q_0, \quad q^{(2)} = q_0 + q_1, \quad q^{(3)} = q_0 + q_1 + q_2, \quad \dots, \quad q^{(n+1)} = q_0 + \dots + q_n \quad (1.8)$$

причем каждая из функций определяется соответственно уравнением

$$\frac{\partial^2 q_0}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2} = \dot{q}_0, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2} = \dot{q}_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 q_{n+1}}{\partial z^2} = \dot{q}_n \quad (1.9)$$

и удовлетворяет граничным условиям (1.6).

Здесь и в дальнейшем точка означает дифференцирование по x .

Обозначим операцию нахождения q по заданному ζ с помощью уравнения (1.9) и всех граничных условий задачи символом $\Phi(\zeta)$.

Равенства (1.9) при этом примут вид:

$$q_0 = 1 - \frac{z}{\delta}, \quad q_1 = \Phi(\dot{q}_0), \quad \dots, \quad q_{n+1} = \Phi(\dot{q}_n) \quad (1.10)$$

Рассматриваемый процесс последовательных приближений дает ряд

$$q = q_0 + \Phi(\dot{q}_0) + \Phi(\dot{q}_1) + \dots + \Phi(\dot{q}_n) \quad (1.11)$$

Если остановиться на втором приближении, то для q получим следующее выражение:

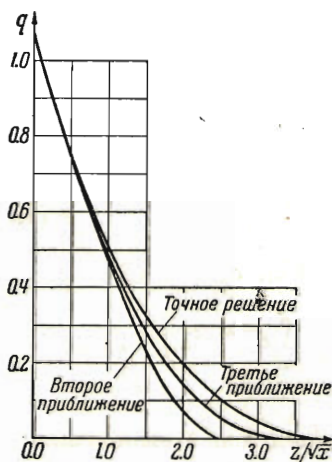
$$q = 1 - \frac{z}{\delta} + \frac{z\dot{\delta}}{6} \left(\frac{z^2}{\delta^2} - 1 \right) \quad (1.12)$$

Для толщины пограничного слоя из условия (1.7) имеем

$$\delta\dot{\delta} = 3, \quad \delta = 2.45 \sqrt{x} \quad (1.13)$$

При найденном значении δ для скорости диффузии и для концентрации q из (1.12) получим

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_0 &= \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{6} \approx \frac{0.61}{\sqrt{x}} \\ q &= 1 - \frac{\xi}{2.45} + \frac{2.45}{12} \xi \left[\frac{\xi^2}{6} - 1 \right] \\ \left(\xi = \frac{z}{\sqrt{x}} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$



Фиг. 1

Сравнивая скорости диффузии, вычисленные по точной (1.4) и приближенной (1.14) формулам, а также соответствующие кривые на фиг. 1, убеждаемся в эффективности приближенного метода.

§ 2. Приближенное интегрирование уравнения пограничного слоя плоской пластинки при обтекании несжимаемой жидкостью. Пусть плоская пластинка движется с постоянной скоростью U . Уравнения движения и неразрывности для ламинарного пограничного слоя будут

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.1)$$

где ν — кинематическая вязкость.

Отсюда, исключая вертикальную составляющую скорости, имеем

$$v \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = u' \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \int_0^{y'} \frac{\partial u'}{\partial x'} dy' \quad (2.2)$$

Введем безразмерные величины

$$x' = lx, \quad y' = \frac{l}{\sqrt{R}} y, \quad v' = v \frac{U}{\sqrt{R}}, \quad u' = Uu \quad (2.3)$$

Здесь l — длина пластины, R — число Рейнольдса. Уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) должно удовлетворять условиям

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad u = 1 \quad \text{при} \quad y = \delta \quad (2.5)$$

Первое приближение находим, решая уравнение $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ при граничных условиях (2.5). Это приближение имеет вид $u = y / \delta$.

Подставляя первое приближение для u в правую часть уравнения (2.4) и производя две квадратуры, получим второе приближение

$$u = \frac{y}{\delta} + \frac{\delta y}{24} \left(1 - \frac{y^3}{\delta^3} \right) \quad (2.6)$$

Как показывают вычисления, находить третье приближение не требуется. Величина δ определяется из условия $(\partial u / \partial y)_\delta = 0$. Имеем

$$\delta = 4 \sqrt{x} \quad (2.7)$$

Напряжение трения τ согласно (2.6) будет

$$\tau = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{24} = \frac{0.333}{\sqrt{x}} \quad (2.8)$$

или в размерных величинах

$$\tau' = \sqrt{\mu \rho} U^3 \frac{0.333}{\sqrt{x}} \quad (2.9)$$

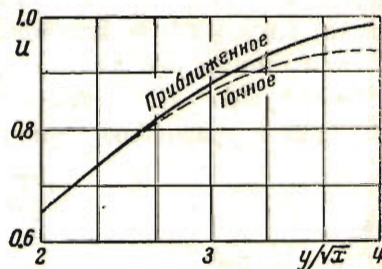
Эта формула отличается от точной численным коэффициентом, который согласно Блазиусу [1] будет 0.332.

Подставляя значение δ в (2.6), находим для профиля скорости

$$u = \frac{1}{3} \xi - \frac{1}{768} \xi^4 \quad \left(\xi = \frac{y}{\sqrt{x}} \right) \quad (2.10)$$

Вертикальная составляющая скорости определяется из уравнения неразрывности. Имеем

$$v = \frac{1}{12 \sqrt{x}} \left[\xi^2 - \frac{1}{160} \xi^5 \right] \quad (2.11)$$



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены профили скоростей, полученные по приближенному и точному решениям. Заметим, что точное решение является достаточно сложным в математическом отношении.

§ 3. Движение жидкости в ламинарном пограничном слое при продольном перепаде давления. В этом случае движение описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \frac{dU}{dx}$$

и граничными условиями:

$$u = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u = U \quad \text{при } y = \delta$$

Ограничиваясь вторым приближением, находим

$$\frac{u}{U} = \frac{\dot{U}}{24} \delta^2 (\xi^4 - 12\xi^2 + 11\xi) - \frac{U\dot{\delta}}{24} (\xi^4 - \xi) + \xi \quad (\xi = y/\delta)$$

Уравнение для определения толщины пограничного слоя, которое получается из условия $(\partial u / \partial \xi)_{\xi=1} = 0$, имеет вид

$$\frac{3}{8} \delta^2 \dot{U} + \frac{1}{8} U \dot{\delta} \delta = 1$$

Предположив, что $\delta = 0$ при $x = 0$, находим

$$\delta^2 = \frac{16}{U^6} \int_0^x U^5 dx$$

Для напряжения трения у стенки имеем

$$\tau_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{U}{3} \left[\frac{4}{\delta} + \delta \dot{U} \right] = \frac{U^4}{3} \left(\int_0^x U^5 dx \right)^{-1/2} \left[1 + \frac{4\dot{U}}{U^6} \int_0^x U^5 dx \right]$$

Точку отрыва пограничного слоя находим из условия

$$\frac{4\dot{U}}{U^6} \int_0^x U^5 dx = -1$$

§ 4. Теплопередача в ламинарном пограничном слое на пластинке, считая жидкость несжимаемой и физические константы жидкости не зависящими от температуры. Если пренебречь притоком тепла за счет трения и считать процесс установившимся, то, как известно, приходим к уравнению теплопроводности

$$u' \frac{\partial T}{\partial x'} + v' \frac{\partial T}{\partial y'} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \quad (4.1)$$

Введем безразмерные величины (2.3) и безразмерную температуру

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \theta \quad (4.2)$$

Здесь T_1 — абсолютная температура пластины, T_0 — абсолютная температура жидкости на границе пограничного слоя.

После этого уравнение (4.1) примет вид

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

где P — число Прандтля. Граничные условия будут

$$\vartheta = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \vartheta = 1 \quad \text{при } y = \delta$$

Если в уравнение (4.3) подставить значения скоростей по Блазиусу^[1], то уравнение решается и приводит к следующему результату:

$$\vartheta(\xi) = C(P) \int_0^{\xi} \exp \left\{ \frac{-P}{2} \int_0^{\xi} \varphi d\eta \right\} d\xi \quad (4.4)$$

где

$$C(P) = \left[\int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{-P}{2} \int_0^{\xi} \varphi d\eta \right\} d\xi \right]^{-1}, \quad \varphi'(\xi) = u, \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{x}} \quad (4.5)$$

Как видно из последних соотношений, при заданном числе Прандтля P можно найти температуру, а также поток тепла лишь путем численного интегрирования. Решение значительно усложняется, если в уравнении (4.1) учесть влияние притока тепла за счет работы трения.

По интерполяции Польгаузена в интервале $0.6 < P < 15.0$ функция $C(P)$ может быть представлена в виде

$$C(P) = 0.332 \sqrt[3]{P}$$

Заметим, что задача о теплоотдаче пластины составила предмет многих исследований, например^[2, 3], Пирси и Шмидт^[4], применяя приближенный метод, аналогичный методу Озеена, пришли к результату

$$C(P) = 0.404 \sqrt[3]{P}$$

Этот результат примерно на 20% больше результата Польгаузена.

Перейдем к решению рассматриваемой задачи приближенным методом. В качестве первого приближения имеем $\vartheta = y/\delta$.

Подставляя в левую часть уравнения (4.3) значения составляющих скоростей, найденные в § 2, и производные от температуры, вычисленные по первому приближению, находим второе приближение:

$$\vartheta = \frac{y}{\delta} + \frac{P}{9\delta \sqrt{x}} \left\{ \frac{y^4}{4} \left(\frac{1}{4x} - \frac{\delta}{\delta} \right) + \frac{y^7}{1792x^{3/2}} \left(\frac{\delta}{2\delta} - \frac{1}{5x} \right) \right\} + Cy \quad (4.6)$$

где

$$C = \frac{P}{9\delta \sqrt{x}} \left\{ \frac{\delta^3}{4} \left(\frac{\delta}{\delta} - \frac{1}{4x} \right) + \frac{1}{1792x^{3/2}} \left(\frac{1}{5x} - \frac{\delta}{2\delta} \right) \delta^6 \right\} \quad (4.7)$$

Из условия $(\partial T / \partial y)_{\delta} = 0$ имеем толщину пограничного слоя

$$\delta \approx \frac{3.63}{P^{1/3}} \sqrt{x} \quad (4.8)$$

При числе Прандтля $P = 1$ толщина пограничного слоя получается на 10% меньше, чем в динамической задаче обтекания пластины. Объясняется это тем, что решение (4.6) является приближенным. Если принять $P = 0.8$ (воздух), то толщина пограничного слоя будет

$$\delta = 4 \sqrt{x}$$

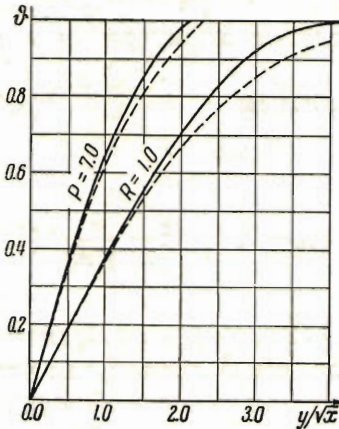
Продифференцировав (4.6) по y и положив здесь $y = 0$, получаем следующее выражение для потока:

$$q = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = 0.368 \sqrt[3]{P} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Сопоставляя этот результат с результатами, полученными другими авторами (Пирси и Шмидт^[4]), убеждаемся в том, что он ближе к точному значению.

Подставляя (4.8) в выражение (4.6), получаем температурный профиль

$$\vartheta = \frac{\xi}{\beta} - \frac{P}{144\beta} \left[(\xi^4 - \beta^3 \xi) - \frac{1}{2240} (\xi^7 - \beta^6 \xi) \right] \quad \left(\beta \approx \sqrt[3]{\frac{48}{P}} \right) \quad (4.9)$$



Фиг. 3

На фиг. 3 даны профили безразмерной температуры ϑ для значений $P = 1$ и $P = 7$. Сплошные кривые вычислены по приближенной формуле (4.6), а пунктирные по точной. Эти кривые близки одна к другой.

§ 5. Охлаждение нагретой сферы ламинарным потоком жидкости при малых значениях числа Рейнольдса. Задача об обтекании сферы медленным, установившимся ламинарным потоком была рассмотрена Стоксом^[5].

Величина тангенциальной компоненты скорости жидкости на расстоянии r от центра сферической капли радиуса r_0 определяется выражением

$$u_\theta = U \sin \theta \left[1 + \frac{3}{4} \frac{r_0}{r} - \frac{1}{4} \frac{r_0^3}{r^3} \right] \quad (5.1)$$

Введем величину y соотношением $r = r_0 + y$. Тогда для малых y (вблизи поверхности сферы) имеем

$$u_\theta = 3U \frac{y}{d} \sin \theta \quad (5.2)$$

Следуя Лейбензону^[6], представим уравнение теплопроводности в виде

$$u_\theta \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.4)$$

или, подставляя значение u_θ :

$$U \frac{3 \sin \theta}{kd} y \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.5)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять следующим граничным и начальным условиям:

$$T = T_0 \text{ при } y = 0, \quad T = 0 \text{ при } y = \infty, \quad T = 0 \text{ при } x = 0 \quad (5.6)$$

Для упрощения интегрирования уравнения (5.5) примем, следуя Лейбензону^[6], величину $(3/kd) \sin \theta$ сперва постоянной. Введем замену переменных

$$y = 2\sqrt{\tau}, \quad \frac{kd x}{U \sin \theta} = \xi \quad (5.7)$$

Тогда вместо уравнения (5.5) будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (5.8)$$

Найдем решение этого уравнения приближенным методом. Обозначим попрежнему толщину пограничного слоя через δ . Ограничиваясь вторым приближением, находим приближенное решение уравнения (5.8):

$$T = 1 - \sqrt{\frac{\tau}{\delta}} + \frac{\delta}{6} \sqrt{\frac{\tau}{\delta}} \left[\left(\frac{\tau}{\delta} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad (5.9)$$

Определяя толщину пограничного слоя из условия равенства потока нулю на границе слоя, находим уравнение

$$\delta^{1/2} \dot{\delta} = 2, \quad \delta = 2.08 \xi^{2/3} \quad (5.10)$$

Подставляя значение $\dot{\delta}$ в (5.9), получаем

$$T = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau}{\delta} \right)^{1/2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau}{\delta} \right)^2 \quad (5.11)$$

Вычисляя скорость потока тепла и возвращаясь к прежним переменным, последовательно имеем

$$-\left(\sqrt{\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_0 = \frac{2}{3\delta^{1/2}} = \frac{0.46}{\xi^{1/3}}, \quad (5.12)$$

или

$$-\left(\sqrt{\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_0 = 0.84 \left(\frac{U \sin \theta}{x kd} \right)^{1/2}$$

Теплоотдача сферы при малых значениях числа Рейнольдса R для потока обтекающего воздуха рассматривалась Л. С. Лейбензоном. В результате точного решения уравнения (5.8) он получил^[6] (стр. 280) формулу (5.12), но с численным коэффициентом 0.85.

§ 6. Свободная конвекция у плоской вертикальной стенки. Пусть начало координат находится на краю пластины, ось x направлена вдоль плоскости пластины, а ось y перпендикулярно ей.

Из физических соображений ясно, что скорость и разность температур $T - T_0$ (где T_0 — температура воздуха на больших расстояниях от пластины) заметно отличается от нуля лишь в тонком пограничном слое у поверхности пластины.

Поэтому процесс свободной конвекции описывается уравнениями пограничного слоя

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + g\beta(T' - T_0) \\ u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} &= k \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

При граничных условиях

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_1 \quad \text{при} \quad y = 0 \\ u = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad y = \infty \end{aligned} \quad (6.2)$$

где T_1 — температура пластины.

Из параметров, входящих в уравнения, можно составить масштабы длины и скорости:

$$\left[\frac{\nu^2}{g\beta(T_1 - T_0)} \right]^{1/4}, \quad [\nu g(T_1 - T_0)\beta]^{1/4} \quad (6.3)$$

и привести уравнения (6.1) к виду

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \vartheta \\ u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy &= \frac{1}{P} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь

$$\vartheta = \frac{T' - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \vartheta(0) = 1, \quad \vartheta(\infty) = 0 \quad (6.5)$$

Введем в рассмотрение пограничный слой конвекции δ и будем решать задачу приближенным методом.

Первое приближение будет

$$\vartheta = 1 - \frac{y}{\delta}, \quad u = \frac{y^3}{6\delta} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{3} \quad (6.6)$$

Подставляя значение u и ϑ в левую часть второго уравнения (6.4), получаем второе приближение

$$\vartheta = 1 - \frac{y}{\delta} + P \left\{ \frac{\delta}{\delta^2} \left(\frac{y^6}{240\delta} - \frac{y^5}{40} + \frac{\delta y^4}{24} \right) - \frac{\delta \delta^2}{48} y \right\} \quad (6.7)$$

Определение второго приближения для скорости, которое получается без затруднений, опускаем. Найдем толщину пограничного слоя из условия $(\partial \vartheta / \partial y)_\delta = 0$. Имеем

$$\delta^3 \dot{\delta} = \frac{240}{11P}, \quad \text{или} \quad \delta = 3.06 \left(\frac{x}{P} \right)^{1/4} \quad (6.8)$$

Подставляя значение $\dot{\delta}$ в (6.7), получаем температурный профиль

$$\vartheta = 1 - \frac{16}{11} \left(\frac{y}{\delta} \right) + \frac{1}{11} \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 - \frac{6}{11} \left(\frac{y}{\delta} \right)^5 + \frac{10}{11} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \quad (6.9)$$

Отсюда скорость потока тепла будет

$$-\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.48 \left(\frac{x}{P}\right)^{1/4}$$

Точное решение задачи о теплоотдаче от нагретой отвесной стенки было получено Польгаузенем [7]. Он показал, что если ввести в качестве независимой переменной величину

$$\xi = C \frac{y}{x^{1/4}} \quad \left(C = \left[\frac{\beta g (T_1 - T_0)}{4\nu^2} \right]^{1/4} \right) \quad (6.10)$$

и вместо искоемых функций новые функции, определяемые соотношением

$$u = 4\nu C^2 \sqrt{x} \varphi'(\xi), \quad \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \vartheta(\xi)$$

то основная система уравнений примет вид

$$\varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \vartheta = 0, \quad \vartheta'' + 3P\varphi\vartheta' = 0 \quad (6.11)$$

Решение этой системы получается численным интегрированием. Из (6.10) и (6.11) следует, что толщина пограничного слоя будет порядка $\delta \sim x^{1/4}$. На фиг. 4, взятой из книги [8], дан график ϑ для воздуха по Польгаузену. На этой же фигуре пунктирной кривой приводится график ϑ , вычисленный по формуле (6.9); для $y/\delta < 3/4$ обе кривые практически совпадают.

§ 7. Стационарная турбулентная диффузия. При решении некоторых вопросов геофизики приходится иметь дело с уравнением диффузии, в которое вместо постоянного коэффициента диффузии входит так называемый коэффициент турбулентного обмена A . При стационарных условиях он зависит лишь от расстояния z .

Ограничимся получением второго приближения, которое вполне достаточно для практических целей; при этом вопрос о характере зависимости коэффициента турбулентного обмена от расстояния z не затрагивается. Умножим обе части уравнения диффузии

$$u(z) \frac{\partial q'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} A(z) \frac{\partial q'}{\partial z} \quad (7.1)$$

на $A(z)$ и введем новую переменную

$$\eta = \int_0^z \frac{dz}{A} \quad (7.2)$$

Тогда уравнение (7.1) примет вид

$$\Phi(\eta) \frac{\partial q'}{\partial x} = \frac{\partial^2 q'}{\partial \eta^2} \quad (uA = \Phi(\eta)) \quad (7.3)$$

Пусть граничные и начальные условия будут

$$q' = q_0 \quad \text{при } z = 0, \quad q' = 0 \quad \text{при } z = \infty, \quad q' = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (7.4)$$

Чтобы упростить эти условия, положим $q' = q_0 q$, тогда

$$q = 1 \text{ при } z = 0$$

Потребуем, чтобы $q = 0$ на границе пограничного слоя, т. е. чтобы $q(\delta) = 0$.

Первое приближение имеет вид

$$q = 1 - \frac{\eta}{\delta} \quad (7.5)$$

Второе приближение будет равно

$$q = 1 - \frac{\eta}{\delta} + \frac{\delta}{\delta} \left[\int_0^{\eta} y(\eta - y) \Phi dy - \frac{\eta}{\delta} \int_0^{\delta} y(\delta - y) \Phi dy \right] \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = -\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{\delta^2} \left[\int_0^{\eta} y \Phi dy - \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} y(\delta - y) \Phi dy \right] \quad (7.7)$$

Условие $(\partial q / \partial \eta)_{\delta} = 0$ дает для толщины пограничного слоя δ уравнение

$$\delta \int_0^{\delta} y^2 \Phi dy = \delta^3 \quad (7.8)$$

Из (7.7) при $\eta = 0$ имеем

$$-\left(\frac{\partial q}{\partial \eta}\right)_0 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{\delta^3} \int_0^{\delta} y(\delta - y) \Phi dy \quad (7.9)$$

Пользуясь (7.8), выражение (7.9), а также формулу (7.6) для концентрации можно преобразовать к виду

$$-\left(\frac{\partial q}{\partial \eta}\right)_0 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{\delta^2} \int_0^{\delta} y \Phi dy = \frac{J_1}{J_2}, \quad q = 1 + \frac{1}{J_2} \int_0^{\eta} y(\eta - y) \Phi dy - \eta \frac{J_1}{J_2} \quad (7.10)$$

где

$$J_1 = \int_0^{\delta} y \Phi dy, \quad J_2 = \int_0^{\delta} y^2 \Phi dy$$

Рассмотренные задачи и сравнение с их точными решениями показывают эффективность данного приближенного метода.

Поступила в редакцию
13 I 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Blasius H. Zeitschr. f. Math. und Phys. 1908. Bd. 56.
2. Кружилин. Журнал технической физики. 1936. Т. VI.
3. Pohlhausen. ZAMM. 1921. Н. 1.
4. Pierson and Schmidt. Phil. Mag. 1934. Vol. 17. No 112.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат. М.—Л. 1948. Т. II.
6. Лейбензон Л. С. Изв. АН СССР (серия геогр. и геофиз.). 1940. № 3.
7. Ландау Д. и Лифшиц М. Механика сплошных сред. Гостехиздат. М.—Л. 1944.
8. Гребер Г. и Эрк С. Основы учения о теплообмене. Пер. с нем. ОНТИ. М.—Л. 1936.