Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

В. В. Соколовский

(Москва)

В работе рассматриваются уравнения плоского установившегося безвихревого течения идеального газа без трения и теплопроводности.

Компоненты вектора скорости v_x, v_y, величина вектора скорости v, плотность ρ и скорость звука a удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0,\qquad v^2+\frac{2a^2}{\varkappa-1}=\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2 \tag{1}$$

где a_* — критическая скорость, $\varkappa=c_p/c_v$.

Давление p, плотность ρ и скорость звука a связаны равенствами

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa},\qquad a^2=\varkappa\frac{p}{\rho} \tag{2}$$

Система уравнений (1) и (2) приводит к уравнениям

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}-2v_xv_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+(a^2-v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \tag{3}$$

Введем, как обычно, вместо v_x, v_y новые переменные

$$v_x=v\cos\theta,\qquad v_y=v\sin\theta \tag{4}$$

где θ — угол, который вектор скорости образует с положительным направлением оси x, и будем пользоваться обозначениями

$$M=\frac{v}{a},\qquad V=\frac{v}{a_*},\qquad \gamma\tau=\left(\frac{v}{a_*}\right)^2,\qquad \gamma=\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}$$

Число Маха M в силу (1) связано с τ равенством

$$M^2=\frac{(\gamma-1)\tau}{1-\tau} \tag{5}$$

Уравнения (3) на основании (4) после преобразований дают

$$\begin{gathered}(1-M^2\cos^2\theta)\frac{\partial\tau}{\partial x}-M^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\tau}{\partial y}+2\tau\frac{\partial\theta}{\partial y}=0\\ M^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\tau}{\partial x}-(1-M^2\sin^2\theta)\frac{\partial\tau}{\partial y}+2\tau\frac{\partial\theta}{\partial x}=0\end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения характеристик системы уравнений (5) имеют вид [1]

$$dy=\frac{M^2\sin\theta\cos\theta\pm\sqrt{M^2-1}}{M^2\cos^2\theta-1}dx,\qquad 2\,d\theta=\pm\sqrt{M^2-1}\;\frac{d\tau}{\tau} \tag{7}$$

Введем вместо x, y новые переменные X, Y по формулам

$$x=-X\sin\theta+Y\cos\theta,\qquad y=X\cos\theta+Y\sin\theta \tag{8}$$

а также новые переменные λ и μ:

$$X = \frac{\lambda}{\sqrt{\tau}}, \qquad Y = \frac{\mu}{\sqrt{\tau}}(1-\tau)^{-(\gamma-1)/2} \tag{9}$$

Уравнения характеристик (7) после замены x, y на λ и μ будут

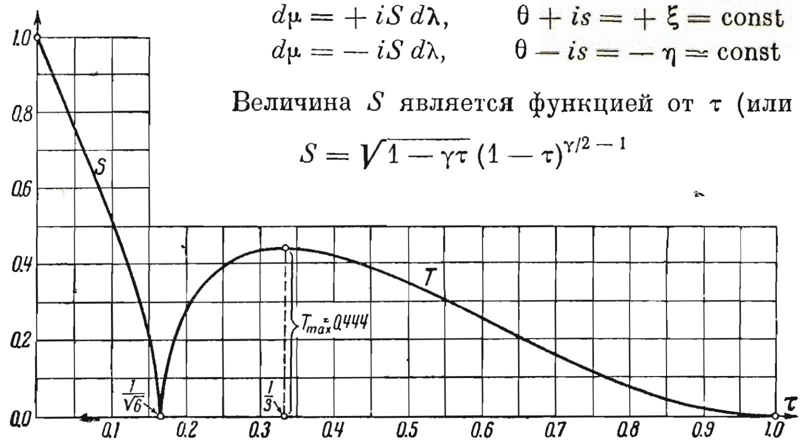
$$d\mu = \pm\sqrt{\gamma\tau - 1}\,(1-\tau)^{\gamma/2-1}\,d\lambda, \quad 2d\theta = \pm\sqrt{\gamma\tau-1}\,(1-\tau)^{-1/2}\,\frac{d\tau}{\tau} \tag{10}$$

При дозвуковых скоростях, когда $\gamma\tau < 1$ (или $V < 1$), величины $d\mu\,/\,d\lambda$ и $d\theta\,/\,d\tau$ комплексные и сопряженные; уравнения характеристик будут

$$\begin{aligned} d\mu &= +iS\,d\lambda, \qquad \theta + is = +\xi = \text{const} \\ d\mu &= -iS\,d\lambda, \qquad \theta - is = -\eta = \text{const} \end{aligned} \tag{11}$$

Величина S является функцией от τ (или V):

$$S = \sqrt{1-\gamma\tau}\,(1-\tau)^{\gamma/2-1} \tag{12}$$



Фиг. 1

графики которой для $\varkappa = 1.4$ ($\gamma = 6$) приведены на фиг. 1 и 2.

Величина s есть функция от τ, хорошо известная в теории дозвуковых течений газа [1]:

$$s = c - \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1-\gamma\tau}{1-\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau} = c - \frac{\delta}{2}\ln\frac{\delta+u}{\delta-u} - \frac{1}{2}\ln\frac{1-u}{1+u} \tag{13}$$

$$u^2 = \frac{1-\gamma\tau}{1-\tau}, \quad \delta^2 = \gamma, \quad c = \text{const}$$

Формулы (12) — (13) определяют S как функцию от s; т. е. $S = S(s)$. Уравнения характеристик (11) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial\mu}{\partial\eta} = +iS\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\xi} = -iS\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}$$

Заменяя в этих уравнениях

$$+2\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} - i\frac{\partial\lambda}{\partial s}, \qquad -2\frac{\partial\lambda}{\partial\eta} = \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} + i\frac{\partial\lambda}{\partial s} \qquad \text{и т. д.}$$

и разделяя вещественные и мнимые части, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial\mu}{\partial s} = +S\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\theta} = -S\frac{\partial\lambda}{\partial s} \tag{14}$$

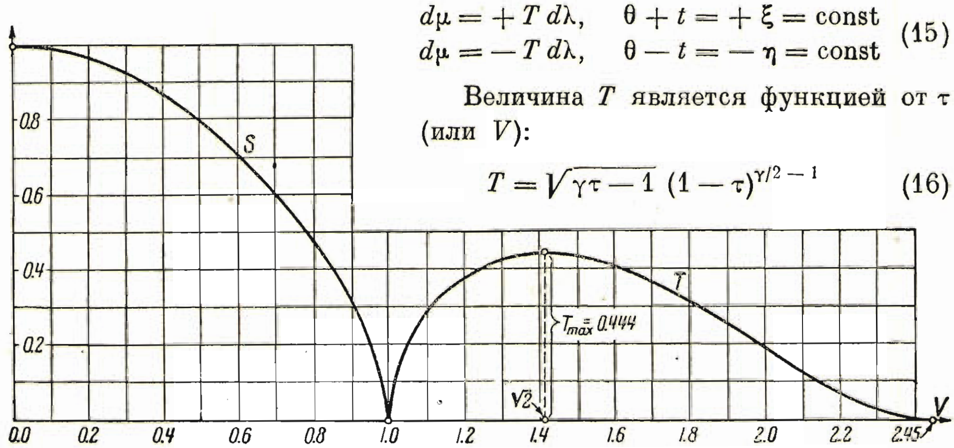
причем $S = S(s)$ определена формулами (12)—(13).

При сверхзвуковых скоростях, когда $\gamma\tau > 1$ (или $V > 1$), величины $d\mu / d\lambda$ и $d\theta / d\tau$ вещественные, а уравнения характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} d\mu &= +T\,d\lambda, \quad \theta + t = +\xi = \text{const} \\ d\mu &= -T\,d\lambda, \quad \theta - t = -\eta = \text{const} \end{aligned} \tag{15}$$

Величина T является функцией от τ (или V):

$$T = \sqrt{\gamma\tau - 1}\,(1-\tau)^{\gamma/2 - 1} \tag{16}$$



Фиг. 2

графики которой для $\varkappa = 1.4$ $(\gamma = 6)$ изображены на фиг. 1 и 2.

Величина t также есть функция от τ, известная в теории сверхзвуковых течений газа [1]:

$$t = c - \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{\gamma\tau - 1}{1-\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau} = c + \operatorname{arc\,tg} z - \delta \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\delta} \tag{17}$$

$$z^2 = \frac{\gamma\tau - 1}{1 - \tau}, \quad \delta^2 = \gamma, \quad c = \text{const}$$

Формулы (16) и (17) определяют T как функцию от t; т. е. $T = T(t)$.

Уравнения характеристик могут быть заменены системой уравнений

$$\frac{\partial\mu}{\partial\eta} = +T\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\xi} = -T\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} \tag{18}$$

причем $T = T(t)$, где $2t = \xi + \eta$ определена формулами (16) — (17).

Рассмотрим контурные условия, когда контур есть линия тока.

Для прямолинейного контура, уравнение которого имеет вид

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + a$$

на основании формул (8) и (9) имеем

$$\lambda = X_0\sqrt{\tau}, \qquad \theta = \alpha = \text{const}, \qquad X_0 = a\cos\alpha = \text{const}$$

Для криволинейного контура, уравнения которого имеют вид

$$x = x(\alpha), \qquad y = y(\alpha)$$

где α — угол между касательной к контуру t и осью x, выполняется равенство $\alpha = \theta$, так как контур совпадает с линией тока.

Подставляя $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$ в уравнения (8) и решая их относительно X и Y, получим

$$X(\alpha) = -x(\alpha)\sin\alpha + y(\alpha)\cos\alpha, \quad Y(\alpha) = x(\alpha)\cos\alpha + y(\alpha)\sin\alpha$$

Так как $dx / d\alpha = r \cos \alpha$, $dy / d\alpha = r \sin \alpha$, где r — радиус кривизны контура, то $Y(\alpha) = -X'(\alpha)$.

На основании формул (9) будем иметь

$$d\lambda - \lambda \frac{d\tau}{2\tau} + \mu (1-\tau)^{-(\gamma-1)/2} d\theta = 0, \qquad \theta = \alpha$$

Если контуром служит свободная поверхность, то вдоль нее $p = p_0 = \mathrm{const}$, а, следовательно, $\tau = \tau_0 = \mathrm{const}$. Поэтому

$$d\lambda + \mu (1-\tau_0)^{-(\gamma-1)/2} d\theta = 0, \qquad \theta = \alpha$$

Вернемся теперь к уравнениям (6) и произведем замену переменных, принимая за независимые переменные τ и θ, а за искомые x и y. Формулы преобразования будут

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial\tau}$$

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial\tau}\frac{\partial y}{\partial\theta} - \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\tau}$$

Внося эти выражения в уравнения (6) и вводя вместо x, y переменные X, Y, получим

$$2\tau \frac{\partial X}{\partial\tau} - \frac{\partial Y}{\partial\theta} + X = 0, \qquad \frac{2\tau(1-\tau)}{1-\gamma\tau}\frac{\partial Y}{\partial\tau} + \frac{\partial X}{\partial\theta} + Y = 0 \tag{19}$$

Будем искать частное решение этих уравнений в виде

$$X = X_n(\tau)\cos(n\theta + \varepsilon_n), \qquad Y = Y_n(\tau)\sin(n\theta + \varepsilon_n) \tag{20}$$

где n и ε_n — постоянные.

Подстановка этих выражений в уравнения (19) дает уравнения

$$2\tau \frac{dX_n}{d\tau} + X_n = nY_n, \qquad \frac{2\tau(1-\tau)}{1-\gamma\tau}\frac{dY_n}{d\tau} + Y_n = nX_n \tag{21}$$

Величины X_n и Y_n могут быть выражены через новую функцию χ_n:

$$X_n = \tau^\omega \chi_n, \qquad Y_n = \tau^\omega\left(\chi_n + 2\frac{\tau}{n}\frac{d\chi_n}{d\tau}\right) \quad \left(\omega = \frac{n-1}{2}\right) \tag{22}$$

которая должна удовлетворять гипергеометрическому уравнению

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2\chi_n}{d\tau^2} + \{c_n - (a_n + b_n + 1)\tau\}\frac{d\chi_n}{d\tau} - a_n b_n \chi_n = 0 \tag{23}$$

причем

$$\left.\begin{matrix} 2a_n \\ 2b_n \end{matrix}\right\} = \left(n + \frac{\gamma-1}{2}\right) \pm \sqrt{n^2\gamma + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2}, \qquad c_n = n + 1 \tag{24}$$

Уравнения (23), (24) аналогичны уравнениям С. А. Чаплыгина.

Поступила в редакцию
11 II 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Труды ЦАГИ. 1940. № 481. 1941. № 543.