Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В СЛУЧАЕ, КОГДА ОДИН КОРЕНЬ РАВЕН НУЛЮ

С. В. Калинин

(Москва)

Применение метода Ляпунова [1] к исследованию систем уравнений с периодическими коэффициентами требует интеграции уравнений первого приближения. Чтобы обойти это затруднение, пользуются заменой периодических коэффициентов их средними значениями за период. Этим способом Ш. Нугманова [2] получила для некритических случаев достаточные условия устойчивости или неустойчивости периодических решений механических систем со многими степенями свободы.

В заметке [3] этот же метод применен к критическому случаю, когда уравнения первого приближения имеют одно нулевое характеристическое число, причем предполагалось, что низшая степень x в разложении функций, входящих в правую часть уравнений, равнялась 2. Здесь рассмотрена более общая постановка, когда эта степень есть любое целое число.

1. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt}=X, \qquad \frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

где X, X_s — голоморфные функции относительно $x, x_1, \ldots, x_n$ в области $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant A$ для $t\geqslant t_0$.

Будем предполагать, что разложения функции X, X_s начинаются по крайней мере со второй степени, причем коэффициенты разложений являются ограниченными периодическими функциями t с периодом ω, а коэффициенты p_{sr} определяются выражениями

$$p_{sr}=c_{sr}+\varepsilon f_{sr}(t) \qquad \left(c_{sr}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p_{sr}(t)\,dt\right) \tag{1.2}$$

где c_{sr} — постоянные, f_{sr} — периодические функции t с периодом ω, а ε — некоторый малый параметр.

Обозначим через X°, X_s° значения функций X, X_s при значениях $x_1=\ldots=x_n=0$. Будем предполагать, что низшая степень x в разложениях X°, X_s° принадлежит X°.

Предположим также, что уравнение

$$\|\, c_{sr}-\delta_{sr}\lambda \,\|=0 \qquad (\delta_{ss}=1,\ \delta_{sr}=0 \quad \text{при} \quad r\neq s) \tag{1.3}$$

имеет все корни с отрицательными вещественными частями.

2. Рассмотрим случай, когда низшая степень x разложения X° и X_s° четная. Обозначим ее через $2m$.

Функции X и X_s полагаем в виде

$$X = (g + \varepsilon G)\,x^{2m} + P^{(1)}x + \ldots + P^{(m)}x^m + Q + R \tag{2.1}$$

$$X_s = P_s^{(1)}x + P_s^{(2)}x^2 + \ldots + P_s^{(m)}x^m + X_s' \quad (s=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

Здесь g — некоторая постоянная величина, отличная от нуля; — некоторый малый параметр, G — периодическая функция t с периодом ω, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\omega G\,dt = 0$$

Величины $P^{(k)}$, $P_s^{(k)}$ в разложениях (2.1) и (2.2) полагаем линейными формами, а Q — квадратичной формой переменных $x_1, \ldots, x_n$ и определяем их формулами

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= \sum_r \left(a_r^{(k)} + \varepsilon A_r^{(k)}\right) x_r \\ P_s^{(k)} &= \sum_s \left(a_s^{(k)} + \varepsilon A_s^{(k)}\right) x_s \\ Q &= \sum_{sr} \left(b_{sr} + \varepsilon B_{sr}\right) x_s x_r \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $a_r^{(k)}$, $a_s^{(k)}$, b_{sr} — постоянные, а $A_r^{(k)}$, $A_s^{(k)}$, B_{sr} — периодические функции t с периодом ω; функции $A_r^{(k)}$, $A_s^{(k)}$, B_{sr} удовлетворяют условиям

$$\int_0^\omega A_r^{(k)}\,dt = 0, \qquad \int_0^\omega A_s^{(k)}\,dt = 0, \qquad \int_0^\omega B_{sr}\,dt = 0$$

Далее в формуле (2.1) R представляет собою голоморфную функцию переменных x и x_s, разложение которой не имеет членов ниже третьего порядка, и притом в членах, линейных относительно x_s, содержит x в степенях не ниже $m+1$, а в членах, не зависящих от этих величин, — в степенях не ниже $2m+1$; наконец, X_s' — голоморфные функции переменных x, x_s, разложения которых могут содержать x только в степенях выше m в тех членах, которые не зависят от величин x_s.

Функцию Ляпунова V возьмем в виде

$$V = x + U^{(1)}x + \ldots + U^{(m)}x^m + W \tag{2.4}$$

где функции $U^{(k)}$ и W имеют следующую форму

$$U^{(k)} = \sum_s \left(e_s^{(k)} + \varepsilon E_s^{(k)}\right) x_s, \qquad W = \sum_{sr} D_{sr}\, x_s x_r \tag{2.5}$$

Здесь $e_s^{(k)}$, D_{sr} — некоторые постоянные, а $E_s^{(k)}$ — периодические функции t с периодом ω, удовлетворяющие условию

$$\int_0^{\omega} E_s^{(k)}\, dt = 0$$

Пользуясь исходными уравнениями (1.1) и разложениями (2.1), (2.2), производную dV / dt согласно (2.4) получим в виде

$$\frac{dV}{dt} = (g + \varepsilon G)\, x^{2m} + P^{(1)} x + \ldots + P^{(m)} x^m + Q + R + \sum_{k=1}^{m} x^k \frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} +$$
$$+ \sum_s \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s} x + \ldots + \frac{\partial U^{(m)}}{\partial x_s} x^m \right) \times$$
$$\times (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + P_s^{(1)} x + \ldots + P_s^{(m)} x^m + X_s') +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} k U^{(k)} x^{k-1} X + \sum_s \frac{\partial W}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s) \qquad (2.6)$$

При тех предположениях, которые сделаны о корнях уравнения (1.3), можно функции $U^{(k)}$ выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) + \sum_s \sum_{r=2}^{m} \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial x_s} P_s^{(\beta)} + P^{(k)} = 0 \qquad (2.7)$$

$$\begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n; & k = 1, \ldots, m; & \alpha = 1, \ldots, & m - 1 \\ \beta = 1, \ldots, m-1; & \alpha + \beta = r; & r = 2, \ldots, m & \end{pmatrix}$$

Эта система m-го порядка с переменными коэффициентами, зависящими от времени, дает возможность определить все функции $U^{(k)}$. Подобные системы были рассмотрены Ляпуновым [1] (§ 57, стр. 246) и в дальнейшем Малкиным [4].

При таком выборе $U^{(k)}$ квадратичную функцию W достаточно подчинить условию

$$\sum_s \frac{\partial W}{\partial x_s} (c_{s1} x_1 + \ldots + c_{sn} x_n) + \sum_{sr} b_{sr} = g (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \qquad (2.8)$$

Из дальнейшего будет видно, что для определения функции W достаточно выделить члены с постоянными коэффициентами, что упрощает определение этой функции.

Подставив выражения функций $U^{(k)}$ и W в уравнении (2.6) и положив $x^m = x_0$, это равенство представим в виде

$$\frac{dV}{dt} = g (x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{ij} w_{ij} x_i x_j \qquad (2.9)$$

Здесь w_{ij} обозначают голоморфные функции переменных x, x_s, уничтожающиеся при $\varepsilon = 0$, $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$, причем $w_{ij} = w_{ji}$.

Для квадратичной формы, имеющейся в выражении

$$\frac{dV}{dt} - \mu\,(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{2.10}$$

составим дискриминант $D(\mu)$, равный

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} g - \mu + w_{00} & w_{01} & \ldots & w_{0n} \\ w_{10} & g - \mu + w_{11} & \ldots & w_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n0} & w_{n1} & \ldots & g - \mu + w_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

Главный диагональный минор порядка r от дискриминанта $D(\mu)$ является полиномом от ε со свободным членом $(g-\mu)^r$ и с функцией, уничтожающейся вместе с ε, x и x_s.

Таким образом, при положительном g найдется такое положительное μ и такое число C, зависящее от μ, что для всех значений $|\varepsilon| \leqslant C$ все главные диагональные миноры дискриминанта $D(\mu)$ будут при $t \geqslant t_0$ положительны.

Следовательно, при положительном g и указанных значениях μ и ε квадратичная форма в выражении (2.9) будет определенно положительной на основании критерия Сильвестра. При этом для достаточно малых значений переменных x, x_s производная dV/dt будет определенно положительной функцией в смысле Ляпунова.

Функция V допускает бесконечно малый высший предел и будет положительной при $g > 0$, $x > 0$, $x_1 = \ldots x_n = 0$.

Согласно теореме Ляпунова о неустойчивости заключаем, что при $g > 0$ и указанных значениях ε невозмущенное движение неустойчиво

Если $g < 0$, то найдется такое отрицательное значение $\mu = -\theta$ (причем $\theta > 0$) и такое C, что при $|\varepsilon| < C$ все главные диагональные миноры определителя $D(\mu)$ будут знакоопределенны и начинаться с отрицательного. При этих условиях выражение

$$\frac{dV}{dt} - \mu\,(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

будет положительной функцией и, следовательно, функция dV/dt будет определенно отрицательной функцией в смысле Ляпунова. Функция V допускает бесконечно малый высший предел и принимает отрицательные значения при $x < 0$, $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

На основании теоремы Ляпунова об устойчивости заключаем, что невозмущенное движение неустойчиво.

3. Рассмотрим случай, когда низшая степень x в разложениях X°, X°_s будет нечетное число. Обозначим ее через $2m+1$.

Функции X и X_s, входящие в систему уравнений (1.1), представим в виде

$$X = (g + \varepsilon G)\, x^{2m+1} + P^{(1)}x + \ldots + P^{(m)} x^m + Q + R \tag{3.1}$$

$$X_s = P_s^{(1)} x + \ldots + P_s^{(m)} x^m + X_s' \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Предполагается, что все входящие в равенства (3.1) и (3.2) величины определены так же, как и в предыдущем случае.

Функцию Ляпунова V возьмем в виде

$$V = \frac{1}{2} x^2 + U^{(1)} x^2 + \ldots + U^{(m)} x^{m+1} + W \tag{3.3}$$

где функции $U^{(k)}$ и W будут определяться, как и раньше, выражениями (2.5).

Пользуясь исходными уравнениями (1.1) и разложениями (3.1), (3.2), производную dV/dt согласно (3.3) получим в виде

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = (g + \varepsilon G)^{2m+2} + P^{(1)} x^2 + \ldots + P^{(m)} x^{m+1} + Qx + Rx + \sum_{k=1}^{m} x^{k+1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + \\ + \sum_s \sum_{k=1}^{m} x^{k+1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) + \\ + \sum_s \sum_{k=1}^{m} x^{k+1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s} (P_s^{(1)} x + \ldots + P_s^{(m)} x^m + X_s') + \\ + \sum_{k=1}^{m} (k+1) U^{(k)} x^k X + \sum_s \frac{\partial W}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s)\end{aligned} \tag{3.4}$$

При тех предположениях, которые были сделаны о корнях уравнения (1.3), функции $U^{(k)}$ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) + \sum_s \sum_{r=2}^{m} \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial x_s} P_s^{(\beta)} + P^{(k)} = 0$$

$$\begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n; & k = 1, \ldots, m; & \alpha = 1, \ldots, m-1 \\ \beta = 1, \ldots, m-1; & \alpha + \beta = r; & r = 2, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Эта система m-го порядка с переменными коэффициентами, зависящими от времени, дает возможность определить все функции $U^{(k)}$, как это было сделано выше.

При таком выборе функций $U^{(k)}$ квадратичную функцию W достаточно подчинить условию

$$\sum_s \frac{\partial W}{\partial x_s} (c_{s1} x_1 + \ldots + c_{sn} x_n) = g (x_1^2 + \ldots + x_n) \tag{3.6}$$

Так же как и в предыдущем случае, для определения W достаточно выделить члены с постоянными коэффициентами.

Подставим в уравнении (3.4) выражения $U^{(k)}$ и W согласно (3.5) и (3.6) и, положив $x^{m+1} = x_0$, получим

$$\frac{dV}{dt} = g (x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{ij} w_{ij} x_i x_j \tag{3.7}$$

Здесь w_{ij} обозначают голоморфные функции переменных x, x_s, уничтожающиеся при $\varepsilon = 0$ и $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$, причем $w_{ij} = w_{ji}$.

Для квадратичной формы, имеющейся в выражении

$$\frac{dV}{dt} - \mu\,(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{3.8}$$

составим детерминант

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} g - \mu + w_{00} & w_{01} \;\ldots & w_{0n} \\ w_{10} & g - \mu + w_{11} \;\ldots & w_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n0} & w_{n1} & g - \mu + w_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Как и в предыдущем случае, главный диагональный минор порядка r от дискриминанта $D(\mu)$ является полиномом ε со свободным членом $(g-\mu)^r$ и с функцией, уничтожающейся вместе с ε, x и x_s.

Производная dV/dt будет знакоопределенной функцией x, x_s и знак ее при достаточно малых $|x|$, $|x_s|$ будет одинаков со знаком постоянной g.

Функция W, удовлетворяющая условию (3.6), будет тоже знакоопределенной функцией и будет иметь знак, противоположный знаку g.

Из выражения (3.4) видно, что если W будет определенно-положительной формой x_s, то и V будет определенно-положительной функцией, ее производная — определенно-отрицательной. Таким образом, при $g<0$ удовлетворяются условия первой теоремы Ляпунова.

Если же $g>0$, то функцию V всегда можно будет сделать любого знака, как бы ни был мал предел, которого не должны превосходить величины $|x|$, $|x_s|$. В этом случае выполняются условия второй теоремы Ляпунова.

Следовательно, приходим к заключению, что при нечетном низшем показателе степени x разложения X°, X_s° могут быть два случая: а) при $g>0$ невозмущенное движение будет неустойчиво; б) при $g<0$ невозмущенное движение будет устойчиво.

Поступила в редакцию
9 III 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, Л.-М. 1935 (гл. III).
2. Нугманова Ш. Об устойчивости периодических движений. Доклады АН. 1944. Т. XLII. № 5.
3. Калинин С. В. Об устойчивости периодических движений в случае, когда один корень равен нулю. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
4. Малкин И. Г. Некоторые основные теоремы устойчивости движения в критических случаях. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 6.