Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В. В. Соколовский

(Москва)

В нашей работе [1] показано, что уравнения пластического плоского напряженного состояния могут быть эллиптического или гиперболического типов. Уравнения гиперболического типа были исследованы достаточно подробно, уравнения же эллиптического типа не изучались вовсе.

Ниже приведено новое исследование уравнений пластического плоского напряженного состояния как эллиптического, так и гиперболического типов.

Плоское напряженное состояние описывается компонентами напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, так как компоненты $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz}$.

Основная система уравнений состоит из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

и условие пластичности

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \tag{2}$$

где σ_s — предел текучести при простом растяжении.

Условие (2) тождественно удовлетворяется, если принять

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} &= \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}\cos\omega \pm \sin\omega\cos 2\varphi) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin\omega \sin 2\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1), получим

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi \frac{\partial\omega}{\partial y} - 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \\ \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x} - (\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi + \cos\omega)\frac{\partial\omega}{\partial y} + 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения характеристик системы (4) имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi \pm R(\omega)}{\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega}, \qquad d\varphi = \pm\frac{R(\omega)}{2\sin\omega}d\omega \tag{5}$$

где обозначено

$$R(\omega) = \sqrt{3 - 4\cos^2\omega}$$

Из этих уравнений ясно, что система (4) будет *гиперболической* при $\pi/6 < \omega < 5\pi/6$ и *эллиптической* при $0 \leqslant \omega < \pi/6$, $5\pi/6 < \omega \leqslant \pi$.

Введем вместо x и y новые величины X и Y:

$$X = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \qquad Y = x\cos\varphi + y\sin\varphi \tag{6}$$

$$x = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi \qquad y = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$$

а также

$$p = X\sqrt{\sin\omega}\exp\frac{\sqrt{3}\,\omega}{2}, \qquad q = Y\sqrt{\sin\omega}\exp\frac{-\sqrt{3}\,\omega}{2} \tag{7}$$

Уравнения характеристик (5) после замены x, y на p, q будут

$$dq = \pm\sqrt{\frac{\sin(\omega - \pi/6)}{\sin(\omega + \pi/6)}}\exp(-\sqrt{3}\,\omega)\,dp$$

$$d\varphi = \pm\frac{R(\omega)}{2\sin\omega}\,d\omega \tag{8}$$

При $0 \leqslant \omega < \pi/6$ и $5\pi/6 < \omega \leqslant \pi$ величины dq/dp и $d\varphi/d\omega$ комплексные и сопряженные, а уравнения характеристик принимают вид

$$dq = +iSdp, \qquad \varphi + is = +\xi = \text{const}$$

$$dq = -iSdp, \qquad \varphi - is = -\eta = \text{const} \tag{9}$$

Величина S является функцией от ω:

$$S = \sqrt{-\frac{\sin(\omega - \pi/6)}{\sin(\omega + \pi/6)}}\exp(-\sqrt{3}\,\omega) \tag{10}$$

Величина s также есть функция от ω:

$$s = c - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{4\cos^2\omega - 3}}{\sin\omega}\,d\omega = c - \frac{1}{4}\ln\frac{(1-u)(2+u)^2}{(1+u)(2-u)^2} \tag{11}$$

где

$$u^2 = \frac{4\cos^2\omega - 3}{\cos^2\omega}$$

причем постояннная c может быть выбрана произвольно.

Формулы (10) и (11) при помощи параметра ω определяют S как функцию от s; обозначим эту функцию через $S = S(s)$.

Уравнения характеристик могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial q}{\partial\eta} = +iS\frac{\partial p}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial q}{\partial\xi} = -iS\frac{\partial p}{\partial\xi}$$

Заменяя в этих уравнениях

$$+2\frac{p\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial p}{\partial\varphi} + i\frac{\partial p}{\partial s}, \qquad -2\frac{\partial p}{\partial\eta} = \frac{\partial p}{\partial\varphi} - i\frac{\partial p}{\partial s} \quad \text{и т. д.}$$

а затем, разделяя вещественную и мнимую части, получим систему уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -S\frac{\partial p}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial q}{\partial\varphi} = +S\frac{\partial p}{\partial s} \tag{12}$$

причем $S = S(s)$ определена формулами (10) и (11).

Заметим, что эта система останется неизменной, если в качестве независимых переменных будут приняты новые переменные φ_* и s_*, связанные с φ и s соотношением

$$\varphi_* + is_* = f(\varphi + is),$$

где f — произвольная аналитическая функция.

При $\pi/6 < \omega < 5\pi/6$ величины dq/dp и $d\varphi/d\omega$ вещественные, уравнения характеристик принимают вид

$$
\begin{aligned}
dq &= +T\,dp, \qquad & \varphi + t &= +\xi = \text{const} \\
dq &= -T\,dp, \qquad & \varphi - t &= -\eta = \text{const}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Величина T является функцией от ω:

$$
T = \sqrt{\frac{\sin(\omega - \pi/6)}{\sin(\omega + \pi/6)}}\,\exp(-\sqrt{3}\,\omega) \tag{14}
$$

Величина t также есть функция ω:

$$
t = c - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{3 - 4\cos^2\omega}}{\sin\omega}\,d\omega = c + \arcsin\frac{2\cos\omega}{\sqrt{3}} -
$$

$$
- \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4\cos\omega + 3}{R(\omega)} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4\cos\omega - 3}{R(\omega)} \tag{15}
$$

причем постоянная c может быть выбрана произвольно. Под arc sin и arc tg подразумеваются их главные значения, лежащие между $-\pi/2$ и $+\pi/2$.

Формулы (14) и (15) определяют T как функцию t; обозначим эту функцию через $T = T(t)$.

Уравнения характеристик (13) могут быть заменены системой уравнений

$$
\frac{\partial q}{\partial \eta} = +T\,\frac{\partial p}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial q}{\partial \xi} = -T\,\frac{\partial p}{\partial \xi} \tag{16}
$$

причем $T = T(t)$, где $2t = \xi + \eta$, определена формулами (14) и (15).

Заметим, что эта система останется неизменной, если за новые независимые переменные принять

$$
\xi_* = f_1(f), \qquad \eta_* = f_2(\eta)
$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции, имеющие непрерывные производные.

Поступило в редакцию
31 I 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР. 1946.