Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

О 84-МИНУТНОМ ПЕРИОДЕ ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗАННЫМИ И СВОБОДНЫМИ ГИРОСКОПАМИ

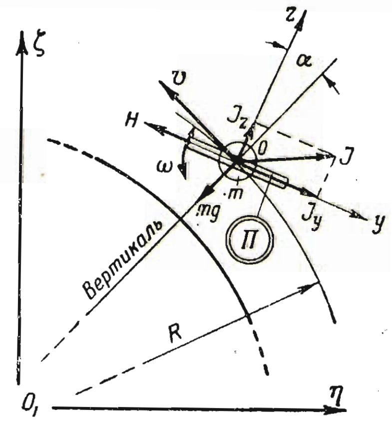
Л. И. Ткачев
(Москва)

Физический маятник, гиромаятник и гирокомпас, рассмотренные в 1923 г. М. Шулером[1], равно как и последующие предложения — гироскопы с интеграторной коррекцией Е. Б. Левенталя, и И. М. Бойкова, гироскопический горизонт Б. В. Булгакова и Я. Н. Ройтенберга[2], представляют собой маятниковые системы, не возмущаемые горизонтальными ускорениями при периоде свободных колебаний $T = 84.4$ минуты. В этой заметке показано, что период М. Шулера не является исключительным свойством подобных маятникообразных устройств, но имеет место также в системах со „связанными" и „свободными" гироскопами.

1. Система со связанным гироскопом. Рассмотрим движение системы по дуге большого круга неподвижной сферы в радиальном поле тяготения.

На платформе $П$ установлены два акселерометра (фиг. 1), измеряющие проекции J_y, J_z на оси Oy и Oz вектора суммарного ускорения $\mathbf{J}$ тяготения $\mathbf{g}$ и движения $d\mathbf{v} / dt$ и связанный гироскоп с кинетическим моментом H, гироскопический момент M относительно оси Oz которого непрерывно измеряется.

Платформа может поворачиваться вокруг оси Ox, перпендикулярной плоскости чертежа, с произвольной абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega(t)$ и перемещаться по дуге радиуса R с произвольной скоростью $v = v(t)$



Фиг. 1

Для определения угла отклонения платформы от горизонта имеем уравнения

$$\left(\frac{v}{R} + \dot{\alpha}\right) = \omega = \frac{M}{H}$$

$$\dot{v} = -J_y \cos\alpha + J_z \sin\alpha \qquad (1.1)$$

или

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^t \left\{\frac{M}{H} - \frac{1}{R}\left[v_0 + \int_0^t (-J_y \cos\alpha + J_z \sin\alpha)\, dt\right]\right\} dt \qquad (1.2)$$

Вычисление производится счетно-решающим устройством, в которое вводятся показания приборов $M(t) / H$, $J_y(t)$, $J_z(t)$ и начальные значения α_0, v_0.

Предположим теперь, что угол α_0 задан с погрешностью $\Delta\alpha_0$. Полученное показание интегратора обозначим $\alpha^* = \alpha + \Delta\alpha$. Принимая во внимание, что

$$J_y = -\dot{v}\cos\alpha + \left(g - \frac{v^2}{R}\right)\sin\alpha, \qquad J_z = \dot{v}\sin\alpha + \left(g - \frac{v^2}{R}\right)\cos\alpha \qquad (1.3)$$

имеем

$$\alpha^* = \alpha_0 + \Delta\alpha_0 + \int_0^t \left\{\frac{M}{H} - \frac{1}{R}\left[\dot{v}_0 + \int_0^t \left[\dot{v}\cos(\alpha^* - \alpha) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \left(g - \frac{v^2}{R}\right)\sin(\alpha^* - \alpha)\right] dt\right]\right\} dt \qquad (1.4)$$

При малом $\Delta\alpha$ после очевидных преобразований получим

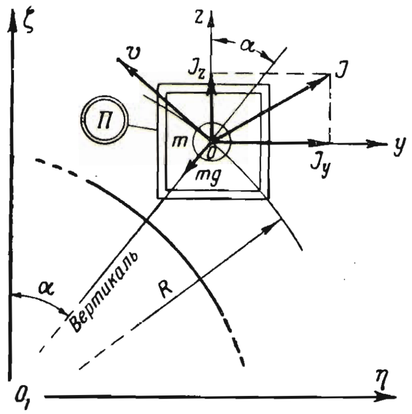
$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_0 - \int_0^t dt \int_0^t \frac{\Delta\alpha}{R}\left(g - \frac{v^2}{R}\right) dt \tag{1.5}$$

Дифференцируя (1.5) дважды и пренебрегая центростремительным ускорением v^2 / R, получаем

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\varphi = 0 \qquad (\varphi = \Delta\alpha) \tag{1.6}$$

Таким образом, при неточной начальной установке в показаниях угла отклонения платформы от вертикали будут наблюдаться свободные колебания с периодом М. Шулера $T = 2\pi \sqrt{R / g}$.

2. Система со свободными гироскопами. В частном случае платформа $П$ может удерживаться с помощью свободных гироскопов в положении, неизменном относительно неподвижных звезд (фиг. 2). В этом случае измерения гироскопического момента не требуется.



Фиг. 2

Вычисление угла α по показаниям двух акселерометров может быть произведено согласно (1.2), где надо положить $M = 0$. Очевидно, что колебания в показаниях здесь определяются уравнением (1.6).

Возможна еще одна схема для вычисления α согласно очевидным соотношениям

$$\sin\alpha = \frac{\eta}{R} \tag{2.1}$$

$$\eta = \eta_0 + \int_0^t dt \left[v_{y0} + \int_0^t (J_y - g\sin\alpha)\, dt \right]$$

Если начальная установка системы будет выполнена неточно, то, принимая во внимание соотношение

$$J_y = \dot{v}_y + g\sin\alpha \tag{2.2}$$

будем иметь

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{1}{R}\left\{ \eta_0 + \int_0^t dt \left[v_{y0} + \int_0^t \dot{v}_y + g[\sin\alpha - \sin(\alpha + \Delta\alpha)]\, dt \right] \right\} \tag{2.4}$$

или при малом $\Delta\alpha$

$$\Delta\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{R}\int_0^t dt \int_0^t g\Delta\alpha\cos\alpha\, dt \tag{2.4}$$

Если ввести обозначение $\varphi = \Delta\alpha\cos\alpha$ и продифференцировать это равенство дважды, то получим уравнение (1.6). Таким образом, во всех случаях при неточной начальной установке получаем колебания в показаниях угла отклонения платформы от вертикали, причем период колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{R / g}$, независимо от того, движется сама платформа произвольно или сохраняет неизменное положение в мировом пространстве.

Поступила в редакцию
16 XII 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Schuler M. Die Störung von Pendel- und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges. Physikalische Zeitschrift. 24 Jahrgang. 1923. Nr. 16.
2. Б. В. Булгаков и Я. Н. Ройтенберг. К теории силовых гироскопических горизонтов. Известия Академии Наук СССР. ОТН. 1948. № 4.