Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЖУКОВСКОГО НА СЛУЧАЙ ПРОФИЛЯ В РЕШЕТКЕ, ОБТЕКАЕМОЙ СЖИМАЕМЫМ ГАЗОМ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

При расчете рабочих колес турбомашин применяется формула Жуковского, согласно которой подъемная сила профиля лопатки равна произведению плотности газа на среднюю векторную скоростей до и за решеткой и на циркуляцию скорости вокруг лопатки.

При наличии значительных относительных скоростей набегания газового потока на лопатку возникает необходимость учета влияния сжимаемости воздуха на подъемную силу лопатки.

В 1934 г. М. В. Келдыш и Ф. И. Франкль [1] показали, что в случае изолированного крылового профиля формула Жуковского сохраняет свой обычный вид как при обтекании несжимаемым, так и сжимаемым газом. Насколько нам известно, обобщений на случай профиля в решетке до сих пор не было[1].

В этой заметке доказывается, что при докритических значениях числа Маха с вполне достаточным для практики приближением формулу Жуковского можно принять в обычном ее виде и в случае решетки, обтекаемой сжимаемым газом, если только под величиной плотности понимать *среднее арифметическое из плотности газа на бесконечности до и за решеткой*.

Этот простой результат может быть полезен для расчета решеток, особенно при решении вопроса о сопротивлении решетки, когда бывает необходимо из полной силы, определенной по теореме импульсов, выделять подъемную силу [2].

1. Векторная формула подъемной силы профиля плоской безграничной решетки в идеальной несжимаемой жидкости. Рассмотрим (фиг. 1) обтекание одного из профилей решетки, расположенного в трубке тока, имеющей на бесконечности перед и за решеткой размер в направлении оси решетки, равный шагу t. Обозначим через ρ плотность жидкости, через $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ и p_1, p_2 соответственно скорости и давления жидкости на бесконечности до и за решеткой. Тогда, применяя теорему количеств движения к массе жидкости, заключенной в указанной трубке тока между бесконечно удаленными сечениями σ_1 и σ_2, можно написать формулу для вектора подъемной силы

$$\mathbf{R} = (p_1 - p_2)\,\mathbf{t} + \rho\,(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_1)\,\mathbf{w}_1 - \rho\,(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_2)\,\mathbf{w}_2 \tag{1.1}$$

где вектор $\mathbf{t}$ равен по величине шагу и направлен перпендикулярно оси решетки вниз по потоку.

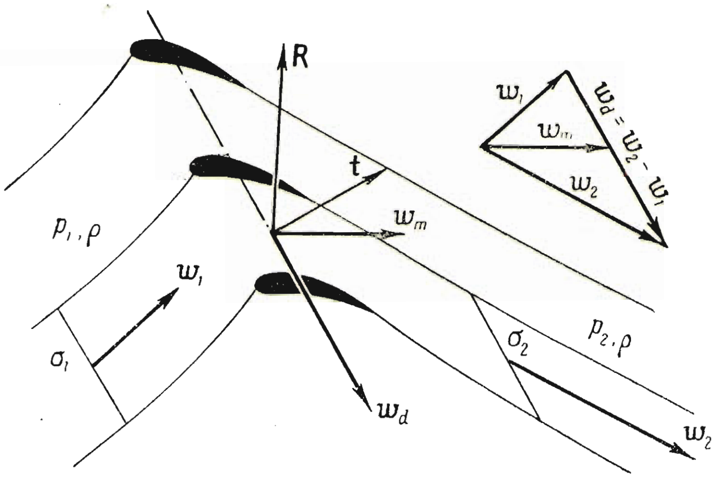
---

[1] В самое последнее время автору стало известно пока не опубликованное обобщение Э. М. Берзона, отличное от предлагаемого здесь.

Входящая в равенство (1.1) разность давлений $p_1 - p_2$ может быть выражена через векторы скорости на бесконечности по формуле

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(w_2^2 - w_1^2) = \frac{\rho}{2}(\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1)\cdot(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \tag{1.2}$$

Введем в рассмотрение среднюю векторную скорость $\mathbf{w}_m$ и скорость $\mathbf{w}_d$, ха-



Фиг. 1

рактеризующую векторное изменение скорости потока при прохождении его через решетку:

$$\mathbf{w}_m = {}^1/_2(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2), \qquad \mathbf{w}_d = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \tag{1.3}$$

Тогда формула (1.2) примет вид

$$p_1 - p_2 = \rho\mathbf{w}_m\cdot\mathbf{w}_d \tag{1.4}$$

Условие сохранения расхода вдоль трубки тока дает

$$\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{t} = \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{t} = \mathbf{w}_m\cdot\mathbf{t}, \qquad \mathbf{w}_d\cdot\mathbf{t} = 0 \tag{1.5}$$

Равенство (1.1), используя (1.4) и (1.5), представим в виде

$$\mathbf{R} = \rho(\mathbf{w}_m\cdot\mathbf{w}_d)\,\mathbf{t} - \rho(\mathbf{w}_m\cdot\mathbf{t})\,\mathbf{w}_d = \rho\mathbf{w}_m\times(\mathbf{t}\times\mathbf{w}_d) \tag{1.6}$$

Как видно из формулы (1.6), вектор $\mathbf{R}$ лежит в плоскости течения и направлен перпендикулярно $\mathbf{w}_m$ в сторону, определяемую векторным произведением, стоящим в правой части равенства (1.6).

Величина вектора $\mathbf{R}$ равна

$$R = \rho w_m w_d t \tag{1.7}$$

2. Возможное преобразование формулы Бернулли на случай сжимаемого газа при дозвуковых скоростях. При обтекании плоской решетки идеальным сжимаемым газом, пользуясь условием сохранения массового расхода вдоль трубки тока

$$\rho_1(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_1) = \rho_2(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_2) \tag{2.1}$$

и обозначением (1.3), формулу для вектора подъемной силы можно представить в виде

$$\mathbf{R} = (p_1 - p_2)\,\mathbf{t} + \rho_1(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_1)\,\mathbf{w}_1 - \rho_2(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_2)\,\mathbf{w}_2 = (p_1 - p_2)\,\mathbf{t} - \rho_1(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_1)\,\mathbf{w}_d \tag{2.2}$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотности газа вдали перед и за решеткой

Рассмотрим первое слагаемое этой формулы. Полагая движение адиабатическим, напишем известные соотношения для давления

$$p = p_0\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = p_0\left[1 - \frac{k}{k+1}\lambda^2 + \frac{k}{2(k+1)^2}\lambda^4 - \dots\right] \tag{2.3}$$

и плотности

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \rho_0\left[1 - \frac{1}{k+1}\lambda^2 + \frac{2-k}{2(k+1)^2}\lambda^4 - \dots\right] \tag{2.4}$$

Здесь через p_0 и ρ_0 обозначены соответственно давление и плотность в адиабатически заторможенном газе, k — отношение коэффициента теплоемкости газа при постоянном давлении c_p к коэффициенту теплоемкости при постоянном объеме c_v, а через λ — известный параметр — отношение скорости потока w к критической скорости газа a_*, выражаемой через скорость звука a_0 в адиабатически заторможенном газе:

$$\lambda = \frac{w}{a_*}, \qquad a_* = \sqrt{\frac{2}{k+1}}\, a_0 = \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}} \tag{2.5}$$

Используя разложение (2.3), составим разность давлений

$$p_1 - p_2 = \frac{k}{k+1}\, p_0(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\left[1 - \frac{1}{2(k+1)}\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \varepsilon_p\right] \tag{2.6}$$

где

$$\varepsilon_p = \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\,k/(k+1)}\left[\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2\right)^{k/(k-1)} - \left(1 - \frac{k-1}{k+\lambda}\lambda_2^2\right)^{k/(k-1)}\right] -$$
$$- 1 + \frac{1}{2(k+1)}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \frac{2-k}{6(k+1)^2}(\lambda_1^4 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4) - \dots \tag{2.7}$$

а λ_1 и λ_2 — значения параметра λ до и за решеткой.

Используя формулу (2.4), составим среднюю арифметическую ρ_m из плотностей ρ_1 и ρ_2:

$$\rho_m = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \rho_0\left[1 - \frac{1}{2(k+1)}\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \varepsilon_\rho\right] \tag{2.8}$$

где

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{1/(k-1)} + \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda_2^2\right)^{1/(k-1)}\right] - 1 +$$
$$+ \frac{1}{2(k+1)}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \frac{2-k}{4(k+1)^2}(\lambda_1^4 + \lambda_2^4) - \dots \tag{2.9}$$

Сравнивая (2.6) и (2.8), имеем

$$p_1 - p_2 = \frac{k}{k+1}\,\frac{p_0}{a_*^2}(w_2^2 - w_1^2)\left(\frac{\rho_m}{\rho_0} + \varepsilon_p - \varepsilon_\rho\right) =$$
$$= \rho_m \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{W}_d\left[1 + \frac{\rho_0}{\rho_m}(\varepsilon_p - \varepsilon_\rho)\right] \tag{2.10}$$

Здесь использованы равенства, вытекающие соответственно из (2.5) и (1.3):

$$\frac{k}{k+1}\,\frac{p_0}{\rho_0 a_*^2} = \frac{1}{2}\,\frac{kp_0}{\rho_0 a_0^2} = \frac{1}{2}, \qquad w_2^2 - w_1^2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{W}_m \cdot \mathbf{W}_d$$

Из формулы (2.10) следует, что с некоторой ошибкой, порядок которой будет указан, разность давлений перед и за решеткой можно определять по формуле, аналогичной формуле (1.4) для несжимаемой жидкости, если заменить плотность газа средней арифметической из плотностей газа до и за решеткой.

§ 3. Обобщение формулы Жуковского на случай обтекания решетки сжимаемым газом при дозвуковых скоростях. Рассмотрим второе слагаемое формулы (2.2). Пользуясь (2.1), представим его в виде

$$\rho_1(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_1)\,\mathbf{w}_d = [\rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m) + \rho_1(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_1) - \rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)]\,\mathbf{w}_d = \rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d +$$

$$+ \left[\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_m}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m) - \rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\right]\mathbf{w}_d = \rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d + \left(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_m} - \rho_m\right)(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d =$$

$$=\left(1 - \frac{\rho_m^2 - \rho_1\rho_2}{\rho_m^2}\right)\rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d = \left[1 - \left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^2\right]\rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d$$

Оценим второе слагаемое в квадратной скобке. Для этого заметим сначала, что по (2.4)

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{\rho_0}{k+1}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\left[1 - \frac{2-k}{2(k+1)}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \ldots\right]$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\rho_0\left[1 - \frac{1}{2(k+1)}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \ldots\right] \tag{3.1}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^2 = \frac{1}{4(k+1)^2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)^2\left[1 + \frac{k-1}{k+1}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \ldots\right] \tag{3.2}$$

Итак, будем иметь

$$\rho_1(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_1)\,\mathbf{w}_d = \rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d - \varepsilon_\rho'\rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d \tag{3.3}$$

где по только что доказанному, полагая для удобства записи $\varkappa = \frac{1}{k-1}$, будет

$$\varepsilon_\rho' = \left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_m^2} =$$

$$= \left[\frac{[1-(k-1)/(k+1)\,\lambda_1^2]^\varkappa - [1-(k-1)/(k+1)\,\lambda_2^2]^\varkappa}{[1-(k-1)/(k+1)\,\lambda_1^2]^\varkappa - [1-(k-1)/(k+1)\,\lambda_2^2]^\varkappa}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4(k+1)^2}(\lambda_2^2-\lambda_1^2)^2\left[1 + \frac{k-1}{k+1}(\lambda_1^2+\lambda_2^2) - \ldots\right] \tag{3.4}$$

Оставляя пока в стороне вопрос о порядке ошибки ε_ρ', вернемся к формуле (2.2), которую на основании формул (2.10) и (3.3) можно представить в виде

$$\mathbf{R} = \rho_m(\mathbf{w}_m\cdot\mathbf{w}_d)\,\mathbf{t} - \rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d + \varepsilon_R = \rho_m\mathbf{w}_m\times(\mathbf{t}\times\mathbf{w}_d) + \varepsilon_R \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_R$ представляет некоторый малый вектор:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_R = \frac{\rho_0}{\rho_m}(\varepsilon_p - \varepsilon_\rho)\,\rho_m(\mathbf{w}_m\cdot\mathbf{w}_d)\,\mathbf{t} + \varepsilon_\rho'\rho_m(\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}_m)\,\mathbf{w}_d \tag{3.6}$$

порядок которого будет указан.

Откидывая этот малый вектор ε_R, получим обобщение формулы Жуковского на случай обтекания сжимаемым газом профиля в решетке

$$\mathbf{R} = \rho_m\mathbf{w}_m\times(\mathbf{t}\times\mathbf{w}_d) \tag{3.7}$$

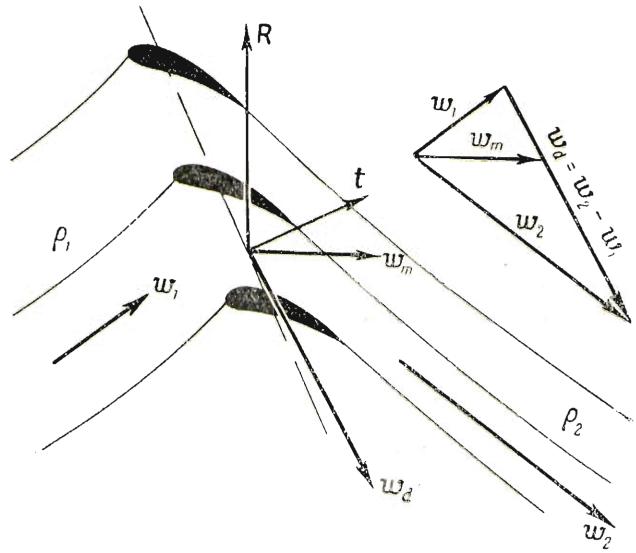
Сравнивая формулу (3.7) с ранее выведенной формулой (1.6) для обтекания решетки несжимаемой жидкостью, приходим к следующему выводу: *при дозвуковых скоростях подъемная сила профиля в решетке может приближенно определяться по формуле Жуковского для несжимаемой жидкости, если плотность этой жидкости приравнять среднему арифметическому плотностей газа вдалеке перед и за решеткой.*

Определим абсолютную величину и направление вектора **R** в принятом приближении и посмотрим, в чем отличие их от величины и направления вектора **R**, определенного для случая несжимаемой жидкости формулой (1.6).

Замечая, что вектор $\mathbf{t} \times \mathbf{w}_d$ перпендикулярен плоскости течения газа, а следовательно, и вектору $\mathbf{w}_m$, получим

$$R = \rho_m w_m \mid \mathbf{t} \times \mathbf{w}_d \mid \tag{3.8}$$

В отличие от несжимаемого газа, в случае обтекания решетки сжимаемым газом вектор $\mathbf{w}_d$ не перпендикулярен вектору $\mathbf{t}$, а направлен под некоторым ма-



Фиг. 2

лым углом к оси решетки (фиг. 2). Действительно, в отличие от условия перпендикулярности (1.5), имеющего место в несжимаемом газе, будем иметь по (2.1)

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_d = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) = \mathbf{t} \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} \rho_2 \mathbf{w}_2 - \frac{1}{\rho_1} \rho_1 \mathbf{w}_1 \right) = (\mathbf{t} \cdot \rho_1 \mathbf{w}_1) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_m = \frac{\mathbf{t}}{2} \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \frac{\mathbf{t}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} \rho_1 \mathbf{w}_1 + \frac{1}{\rho_2} \rho_2 \mathbf{w}_2 \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{t} \cdot \rho_1 \mathbf{w}_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

Следовательно,

$$\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_d}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_m} = 2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_m} = 2 \sqrt{\varepsilon_\rho'} \tag{3.9}$$

Отсюда, пользуясь равенством (3.2), получим

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_d = 2 \sqrt{\varepsilon_\rho'}\, \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_m = \frac{1}{k+1} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_m) [1 + \ldots] \tag{3.10}$$

Обозначая углы между вектором $\mathbf{t}$ и векторами $\mathbf{w}_m$ и $\mathbf{w}_d$ через θ_m и θ_d, получим для модуля $\mid \mathbf{t} \times \mathbf{w}_d \mid$ следующее выражение:

$$\mid \mathbf{t} \times \mathbf{w}_d \mid = t w_d \sin \theta_d = \sqrt{t^2 w_d^2 - t^2 w_d^2 \cos^2 \theta_d} = \sqrt{t^2 w_d^2 - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_d)^2} =$$

$$= \sqrt{t^2 w_d^2 - 4 \varepsilon_\rho' (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_m)^2} = t w_d \sqrt{1 - 4 \varepsilon_\rho' \left(\frac{w_m}{w_d} \right)^2 \cos^2 \theta_m} =$$

$$= t w_d \left[1 - 2 \varepsilon_\rho' \left(\frac{w_m}{w_d} \right)^2 \cos^2 \theta_m \right] \tag{3.11}$$

Таким образом, модуль вектора **R** равен

$$R = \rho_m w_m w_d t \left[1 - 2\varepsilon_\rho' \left(\frac{w_m}{w_d}\right)^2 \cos^2\theta_m\right] \approx \rho_m w_m w_d t \tag{3.12}$$

Направление вектора **R** и в случае сжимаемого газа остается перпендикулярным вектору средней скорости $\mathbf{w}_m$ (фиг. 2).

4. Оценка точности обобщенной формулы Жуковского. Для решения вопроса о возможности применения ранее выведенных формул необходимо оценить порядок откидываемых членов, а также интервал чисел Маха, в котором с заданной наперед точностью можно применять предлагаемую приближенную формулу.

Для этого займемся оценкой порядка величины вектора ε_R. Применим наиболее простой и грубый метод оценки, написав очевидное неравенство

$$\varepsilon_R \leqslant \frac{\rho_0}{\rho_m} \mid \varepsilon_p - \varepsilon_\rho \mid \rho_m w_m w_d t \cos\theta_{md} + \varepsilon_\rho' \rho_m w_m w_d t \cos\theta_m$$

или, заменяя косинусы на их максимальные значения:

$$\varepsilon_R < \left(\frac{\rho_0}{\rho_m} \mid \varepsilon_p - \varepsilon_\rho \mid + \varepsilon_\rho'\right) \rho_m w_m w_d t \tag{4.1}$$

Отношение ρ_0 / ρ_m легко оценить, используя известные равенства:

$$\rho_0 = \rho_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^\varkappa = \rho_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)^\varkappa \qquad \left(\varkappa = \frac{1}{k-1}\right)$$

Заменяя в них $M_1 = M_2 = 1$, найдем

$$\rho_0 < \rho_1 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^\varkappa = \rho_1 \left(\frac{k+1}{2}\right)^\varkappa$$

$$\rho_0 < \rho_2 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^\varkappa = \rho_2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^\varkappa$$

Полагая же $M_1 = M_2 = 0$, будем иметь

$$\rho_0 > \rho_1 \qquad \rho_0 > \rho_2$$

Отсюда непосредственно вытекает

$$1 < \frac{\rho_0}{\rho_m} < \left(\frac{k+1}{2}\right)^\varkappa \qquad \left(\varkappa = \frac{1}{k-1}\right) \tag{4.2}$$

Обратимся к оценке остальных величин, входящих в круглую скобку равенства (4.1). Для этого применим следующий простой прием. Рассмотрим значения $k = {}^4/_3 = 1.33$ и $k = {}^3/_2 = 1.5$, между которыми находится наиболее интересующая нас область значений величины k (воздух и некоторые другие газы), и подсчитаем при этих значениях числа k величины ε_p, ε_ρ и ε_ρ'. Аналогичные вычисления при желании легко сделать и в интервале ${}^5/_4 \leqslant k \leqslant {}^4/_3$ и т. д.

При выбранных значениях числа k показатели степеней в формулах (2.7), (2.9) и (3.4) становятся целыми и все вычисления легко провести. Имеем:

при $k = {}^4/_3$

$$\varepsilon_p = \frac{(1 - {}^1/_7\lambda_1^2)^4 - (1 - {}^1/_7\lambda_2^2)^4}{{}^4/_7(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} - 1 + \frac{3}{14}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) =$$

$$= \frac{1}{7^2}(\lambda_1^4 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4) - \frac{1}{4\cdot 7^3}(\lambda_1^6 + \lambda_1^4\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^4 + \lambda_2^6)$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{7}\lambda_1^2\right)^3+\left(1-\frac{1}{7}\lambda_2^2\right)^3\right]-1+\frac{3}{14}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=$$

$$=\frac{3}{2\cdot 7^2}(\lambda_1^4+\lambda_2^4)-\frac{1}{2\cdot 7^3}(\lambda_1^6+\lambda_2^6)$$

$$\varepsilon_\rho' = \frac{1}{4}\frac{(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_m^2}=\frac{\rho_0^2}{4\rho_m^2}\left[\left(1-\frac{1}{7}\lambda_1^2\right)^3-\left(1-\frac{1}{7}\lambda_2^2\right)^3\right]=$$

$$=\frac{1}{4\cdot 7^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_m}\right)^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2\left[\left(1-\frac{1}{7}\lambda_1^2\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{7}\lambda_1^2\right)\left(1-\frac{1}{7}\lambda_2^2\right)+\left(1-\frac{1}{7}\lambda_2^2\right)^2\right]^2$$

при $k={}^3/_2$

$$\varepsilon_p=\frac{(1-{}^1/_5\lambda_1^2)^3-(1-{}^1/_5\lambda_2^2)^3}{{}^3/_5(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}-1+\frac{1}{5}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=$$

$$=\frac{1}{3\cdot 5^2}(\lambda_1^4+\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^4)$$

$$\varepsilon_\rho=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{5}\lambda_1^2\right)^2+\left(1-\frac{1}{5}\lambda_2^2\right)^2\right]-$$

$$-1+\frac{1}{5}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=\frac{1}{2\cdot 5^2}(\lambda_1^4+\lambda_2^4)$$

$$\varepsilon_\rho'=\frac{1}{4}\frac{(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_m^2}=\frac{\rho_0^2}{4\rho_m^2}\left[\left(1-\frac{1}{5}\lambda_1^2\right)^2-\left(1-\frac{1}{5}\lambda_2^2\right)^2\right]^2=$$

$$=\frac{1}{4\cdot 5^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_m}\right)^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2\left[2-\frac{1}{5}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\right]^2$$

Отсюда следует

$$\varepsilon_p-\varepsilon_\rho=-\frac{1}{98}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2\left[1-\frac{1}{14}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\right]\qquad \text{при } k=\frac{4}{3} \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_p-\varepsilon_\rho=-\frac{1}{150}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2\qquad \text{при } k=\frac{3}{2} \tag{4.4}$$

Основываясь на полученных формулах, дадим оценку выражения

$$\frac{\varepsilon_R}{\rho_m w_m w_d l}=\frac{\rho_0}{\rho_m}\mid\varepsilon_p-\varepsilon_\rho\mid+\varepsilon_\rho' \tag{4.5}$$

при любых значениях k в интервале ${}^4/_3\leqslant k\leqslant{}^3/_2$. Имеем по (5.2), (5.3) и др.:

при $k={}^4/_3$

$$\left[\frac{1}{98}\frac{6}{7}+\frac{1}{4\cdot 7^2}3^2\left(\frac{6}{7}\right)^4\right](\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2<\frac{\rho_0}{\rho_m}\mid\varepsilon_p-\varepsilon_\rho\mid+\varepsilon_\rho'<$$

$$<\left[\left(\frac{7}{6}\right)^3\frac{1}{98}+\frac{1}{4\cdot 7^2}\left(\frac{7}{6}\right)^6 9\right](\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2$$

или

$$0.033\,(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2<\frac{\rho_0}{\rho_m}\mid\varepsilon_p-\varepsilon_\rho\mid+\varepsilon_\rho'<0.133\,(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2 \tag{4.6}$$

при $k={}^3/_2$

$$\left[\frac{1}{150}+\frac{1}{4\cdot 5^2}\left(\frac{8}{5}\right)^2\right](\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2<\frac{\rho_0}{\rho_m}\mid\varepsilon_p-\varepsilon_\rho\mid+\varepsilon_\rho'<$$

$$<\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2\frac{1}{150}+\frac{1}{4\cdot 5^2}\left(\frac{5}{4}\right)^4 4\right](\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2$$

или

$$0.032\,(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 < \frac{\rho_0}{\rho_m} \mid \varepsilon_p - \varepsilon_\rho \mid + \varepsilon_p' < 0.108\,(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \qquad (4.7)$$

Таким образом, для величины ε_R получаем оценку

$$0.033\,(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 < \frac{\varepsilon_R}{\rho_m w_m w_d t} < 0.133\,(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \qquad (4.8)$$

От параметров λ_1, λ_2 можно перейти к числам Маха $M_1 = w_1 / a_1$ и $M_2 = w_2 / a_2$, где a_1 и a_2 — скорости звука вдалеке перед и за решеткой. По известным формулам газовой динамики

$$\lambda_1^2 = \frac{k+1}{2}\,\frac{M_1^2}{1 + {}^1/_2\,(k-1)\,M_1^2}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{k+1}{2}\,\frac{M_2^2}{1 + {}^1/_2\,(k-1)\,M_2^2}$$

Отсюда

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \frac{k+1}{2}\,\frac{M_1^2 - M_2^2}{[1 + {}^1/_2\,(k-1)\,M_1^2]\,[1 + {}^1/_2\,(k-1) M_2^2]}$$

Следовательно,

$$\frac{2}{k+1}\,(M_1^2 - M_2^2)^2 < (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 < \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 (M_1^2 - M_2^2)^2 \qquad (4.9)$$

Таким образом, в интервале ${}^4/_3 \leqslant k \leqslant {}^3/_2$ вместо (4.8) можно пользоваться оценкой

$$0.03\,(M_1^2 - M_2^2)^2 < \frac{\varepsilon_R}{\rho_m w_m w_d t} < 0.2\,(M_1^2 - M_2^2)^2 \qquad (4.10)$$

Предлагаемая оценка весьма груба, на самом деле модуль вектора ε_R будет много меньше. Все же из этой простой оценки уже следует полная возможность применения приближенной формулы (3.7) для практики. Так, например, если на входе в турбинную решетку число Маха равно $M_1 = 0.2$, а на выходе $M_2 = 0.7$, то относительная ошибка не будет превосходить 4% даже по принятой весьма грубой оценке.

Поступила в редакцию
29 I 1948

Институт механики АН СССР
Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. и Франкль Ф. И. Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений с приложением к теории крыла в сжимаемом газе, Известия АН СССР. Отд. мат. и ест. наук. 1934.
2. Лойцянский Л. Г. Сопротивление решетки профилей обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 4.