Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ЗАМЕТКИ

К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

В. В. Васильев

(Иркутск)

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$L[z(x)] = \lambda \int_a^b M[z(y)]\, K(x, y)\, dy \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} L[z(x)] &= \frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dz(x)}{dx} + a_n z(x) \\ M[z(y)] &= b_0 \frac{d^m z(y)}{dy^m} + b_1 \frac{d^{m-1} z(y)}{dy^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dz(y)}{dy} + b_m z(y) \end{aligned} \tag{2}$$

причем $a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$ — постоянные числа, λ — параметр, а ядро $K(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y)$.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$z(x) = c_1 z_1(x) + \cdots + c_n z_n(x) + F_1(x) + F_2(x)$$

где c_k — произвольные постоянные, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции, вид которых зависит от вида функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, а $z_k(x)$ линейно независимые решения дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$.

Пусть $f(l) = 0$ — характеристическое уравнение дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$, а $g(m) = 0$ для уравнения $M[z(y)] = 0$. Остановимся на двух случаях.

1. Пусть

$$\varphi_1(x) = \theta_1(x)\, e^{\alpha x}, \qquad \varphi_2(x) = \theta_2(x)\, e^{\beta x} \tag{3}$$

где $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ — многочлены соответственно степени p и q. Если α является корнем характеристического уравнения $f(l) = 0$ кратности $r \geqslant 1$, а β — корнем уравнения $g(m) = 0$ кратности $s \geqslant 1$, то решение уравнения (1) следует искать в форме

$$z(x) = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_r x^{r-1})\, e^{\alpha x} + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \ldots + c_{r+s} x^{s-1})\, e^{\beta x} + \\ + \sum_{i=r+s+1}^{n} c_i z_i(x) + x^r e^{\alpha x} P_1(x) + x^s e^{\beta x} P_2(x) \tag{4}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочленны степеней p и q, коэффициенты которых нужно подобрать так, чтобы решение (4) действительно удовлетворяло уравнению (1). С этой целью подставим решение (4) в уравнение (1). Приравнивая коэффициенты при $e^{\alpha x}$ и $e^{\beta x}$ в правой и левой частях равенства, получим два равенства многочленов степеней p и q. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, приходом к системе линейных алгебраических уравнений, которая всегда разрешима относительно искомых коэффициентов. Аналогично решение можно получить и для ядра $K(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$.

2. Пусть

$$K(x, y) = e^{\alpha x}\left[\theta_1(x)\cos\beta x + \theta_2(x)\sin\beta x\right]\psi(y) \tag{5}$$

где $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ — многочлены степени k.

Заменяя тригонометрические функции показательными, получим

$$K(x, y) = \frac{1}{2}\{e^{(\alpha+\beta i)x}[\theta_1(x) - i\theta_2(x)] + e^{(\alpha-\beta i)x}[\theta_1(x) + i\theta_2(x)]\}\psi(y)$$

Таким образом, этот случай сводится к предыдущему. Если $\alpha \pm \beta i$ будет корнем уравнения $f(l) = 0$ кратности r, то согласно (4) решение имеет вид

$$z(x) = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2x + \ldots + c_rx^{r-1})\cos\beta x + (c_{r+1} + c_{r+2}x + \cdots + c_{2r}x^{r-1})\sin\beta x] + \\ + \sum_{i=2r+1}^{n} c_iz_i(x) + x^r[e^{(\alpha+\beta i)x}P_1(x) + e^{(\alpha-\beta i)x}P_2(x)] \tag{6}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены степени k — представляют собой сопряженные выражения $P_1 = Q_1(x) + iQ_2(x)$, $P_2 = Q_1(x) - iQ_2(x)$. Подставляя P_1 и P_2 в выражение (6) и переходя к тригонометрическим функциям, получим

$$z(x) = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2x + \ldots + c_rx^{r-1})\cos\beta x + (c_{r+1} + c_{r+2}x + \ldots + c_{2r}x^{r-1})\sin\beta x] + \\ + \sum_{i=2r+1}^{n} c_iz_i(x) + x^re^{\alpha x}[R_1(x)\cos\beta x + R_2(x)\sin\beta x]$$

где $R_1(x) = 2Q_1(x)$ и $R_2(x) = -2Q_2(x)$ — многочлены той же степени, что многочлены $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$, если их степени равны, и наибольшей степени из этих многочленов, если их степени различны.

После подстановки в уравнение (1) решения (7) приравниваем выражения при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ в правой и левой частях равенства, в результате чего приходим к равенству двух пар многочленов степени k. Сравнивая коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях буквы x, получим всегда разрешимую систему $2k$ линейных алгебраических равнений относительно коэффициентов R_1 и R_2.

Если интегро-дифференциальное уравнение (1) с правой частью

$$L[z(x)] = \lambda\int_a^b M[z(y)]K(x, y)\,dy + \omega(x)$$

то его решение имеет вид

$$z(x) = c_1z_1(x) + \ldots + c_nz_n(x) + F_1(x) + F_2(x) + \Omega(x)$$

где $\Omega(x)$ — частное решение уравнения $L[z(x)] = \omega(x)$.

Присутствие в решении функции $\Omega(x)$ изменит только свободные члены в системах, служащих для определения неизвестных коэффициентов.

Приведем пример из работы А. И. Некрасова. (Труды ЦАГИ. 1934.)

$$\frac{d^2z}{dx^2} + k^2z = -\lambda\int_0^{2\pi}\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{\sin x\cos y}{\pi\mu} + \frac{\sin 2x\sin 2y}{\pi\nu}\right)dy \tag{8}$$

Решение ищем в форме

$$z(x) = A\sin(kx + \alpha) + A_1\sin x + B_1\cos x + A_2\sin 2x + B_2\cos 2x$$

где $A\sin(kx + \alpha)$ — общий интеграл уравнения $d^2z/dx^2 + k^2z = 0$.

Для определения независимых коэффициентов получим систему

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{k^2-1}\right)A_1 = \frac{\lambda Ak^2}{\pi\mu}\frac{2}{(k^2-1)^2}\sin\pi k\cos(\pi k + \alpha), \qquad k^2B_1 - B_1 = 0$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\frac{4}{k^2-1}\right)A_2 = \frac{\lambda Ak^2}{\pi\nu}\frac{4}{(k^2-4)^2}\sin\pi k\cos(\pi k + \alpha), \qquad k^2B_2 - 4B_2 = 0$$

Решение этой системы относительно A_1, B_1, A_2, B_2 очевидно.

Поступило в редакцию
1 VII 1948