

## СОПРОТИВЛЕНИЕ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ С ДОКРИТИЧЕСКИМИ СКОРОСТЯМИ

Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

Настоящая работа содержит изложение метода расчета сопротивления решетки профилей, обтекаемых вязким сжимаемым газом.

Случай несжимаемого газа был рассмотрен нами ранее [1] и излагается в настоящей статье лишь как простой частный случай общей теории сопротивления решетки в сжимаемом газе.

Автор принужден довольствоваться рассмотрением движения с докритическими скоростями (т. е. таких, при которых нигде на поверхности обтекаемых профилей не достигается местная звуковая скорость), так как только в этом случае справедливо необходимое для дальнейшего предположение об изэнтропичности потока, т. е. об отсутствии во всей области движения скачков уплотнения.

Второй причиной необходимости выбора сравнительно малых значений чисел Маха является возможность при этом применять формулу подъемной силы, аналогичную известной формуле Жуковского<sup>[2]</sup>, и, таким образом, строго сформулировать содержание термина «сопротивление решетки», или, правильнее говоря, «сопротивление профиля в решетке».

Формула сопротивления в случае изолированного профиля может быть выведена, как известно, обычным применением теоремы импульсов между двумя параллельными сечениями потока, удаленными на бесконечность впереди и позади профиля, и затем установлением связи между толщинами потери импульса в бесконечно удаленном сечении позади профиля и сечении на задней кромке профиля. В задаче о сопротивлении решетки имеется принципиальная трудность — отсутствие внешнего потенциального потока позади решетки вниз по потоку за сечением, где сошлись пограничные слои (следы), сошедшие с отдельных профилей решетки. Эта принципиальная трудность, с количественной стороны выражающаяся в невозможности использовать уравнение пограничного слоя (следа) вплоть до бесконечно удаленной от решетки плоскости, может быть обойдена введением в рассмотрение плоскости смыкания слоев (следов) и установления связи между газодинамическими элементами в этой плоскости и плоскости, удаленной на бесконечность вниз по потоку.

Центральным пунктом настоящего исследования является допущение о слабой неоднородности потока в сечении аэродинамического следа решетки, где смыкаются сходящие с отдельных профилей пограничные слои, рассматриваемые как слои конечной толщины: при этом можно пренебречь старшими степенями малых разностей скоростей. Аналогичное допущение было сделано в нашей работе по сопротивлению решетки в несжимаемом газе [1] и в дальнейшем прекрасно подтверждено опытами. Это допущение вводит в рассуждение ту необходимую для применения теоремы количеств движения контрольную плоскость, роль которой в случае изолированного профиля играет плоскость, бесконечно удаленная от решетки вниз по потоку. Очевидно, что при увеличении относительного шага решетки рассматриваемая плоскость смыкания слоев будет все более и более удаляться от осевой плоскости решетки и в пределе, при относительном



шаге, равном бесконечности, т. е. в случае изолированного профиля, уйдет на бесконечность. При не слишком густых решетках,— а это вполне соответствует применяемым на практике турбинным и компрессорным решеткам,— указанное допущение, повидимому, может быть принято.

В работе остается открытым вопрос о том, каким методом расчета пограничного слоя в сжимаемом газе следует пользоваться для вычисления характерных толщин слоя и как оценивать влияние сжимаемости газа на элементы внешнего потока. Решение поставленной задачи приводится в наиболее прямой и непосредственной форме, не зависящей от того метода, каким будут проводиться практические расчеты.

**§ 1. Сопротивление профиля в решетке. Выделение силы Жуковского из суммарной силы действия потока несжимаемой жидкости на профиль.** В условиях плоского потока реальной жидкости под профильным сопротивлением изолированного цилиндрического крыла бесконечного размаха понимают отнесенную к единице длины крыла составляющую полной силы действия потока на крыло по направлению скорости набегающего на крыло потока на бесконечности, или, что все равно, скорости движения крыла в неподвижной среде.

Такое определение не сохраняет своей силы в случае профиля в плоской решетке, так как при этом в общем случае нет единого направления скорости на бесконечности до и за решеткой, и вряд ли могут быть какие-нибудь соображения в защиту преимущества того или другого направления для определения сопротивления как составляющей по этому направлению полной силы действия потока на крыло. Что же в таком случае называть сопротивлением?

Обратимся к примеру изолированного крыла конечного размаха. В этом случае, так же как и в случае профиля в решетке, для каждого сечения крыла в силу наличия уходящей в бесконечность вниз по потоку вихревой системы (пелены) крыла существуют две разные по величине и направлению скорости на бесконечности перед и за крылом. Как известно, при рассмотрении *идеального* обтекания крыла конечного размаха по схеме несущей линии полная сила давления потока на данное сечение крыла оказывается перпендикулярной скорости потока в соответствующей выбранному сечению точке на несущей линии. Скорость эта, представляющая, как легко сообразить, половину векторной суммы скоростей на бесконечности впереди и позади крыла, в рассматриваемом его сечении принимается как «действительная» скорость натекания, угол, образованный хордой сечения крыла и направлением «действительной» скорости, как «действительный» угол атаки и т. д.

В случае плоской безграничной решетки профилей мы имеем аналогичное положение с той лишь разницей, что в теории крыла конечного размаха «действительная» скорость мало отличается от скорости набегающего потока, в случае же решетки «скос потока» имеет тот же порядок, что и геометрические углы атаки.

В аэродинамике крыла конечного размаха под *профильным* сопротивлением подразумевают разность между лобовым сопротивлением, представляющим составляющую полной силы действия реального, т. е.



вязкого, потока газа на направление скорости на бесконечности впереди крыла, и «индуктивным» сопротивлением, т. е. составляющей по тому же направлению от «действительной» подъемной силы.

Следует заметить, что при малой разнице между направлениями «действительной» скорости и скорости набегающего потока такое определение профильного сопротивления сечения крыла отличается на малые высших порядков от более строгого определения профильного сопротивления как векторной разности между полной силой действия реального потока на сечение крыла и «действительной» подъемной силой при реальном обтекании.

В случае плоской бесконечной решетки естественно принять за профильное сопротивление  $\mathbf{R}'$  разность между вектором полной силы  $\mathbf{R}$  (фиг. 1) и по введенной нами терминологии [1] «силой Жуковского»  $\mathbf{R}_j$ , в случае несжимаемого газа равной по величине

$$R_j = \rho V_m \Gamma \quad (1.1)$$

и направленной перпендикулярно к условной скорости на бесконечности  $\mathbf{V}_m$ , определяемой как

$$\mathbf{V}_m = 1/2 (\mathbf{V}_{1\infty} + \mathbf{V}_{2\infty}) \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{V}_{1\infty} (u_{1\infty}, v_{1\infty})$  и  $\mathbf{V}_{2\infty} (u_{2\infty}, v_{2\infty})$  — векторы скорости на бесконечности до и за решеткой,  $\rho$  — плотность жидкости и  $\Gamma$  — «циркуляция», определяемая по формуле

$$\Gamma = (v_{2\infty} - v_{1\infty}) t \quad (1.3)$$

где  $t$  — шаг решетки.

Вводя представление о векторе-шаге  $\mathbf{t}$ , равном по длине величине шага  $t$  и направленном перпендикулярно к оси решетки вниз по потоку, можно указать векторное выражение [2] для силы Жуковского

$$\mathbf{R}_j = \rho \mathbf{V}_m \times (\mathbf{t} \times \mathbf{V}_d) \quad (1.4)$$

где вектор

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{V}_{2\infty} - \mathbf{V}_{1\infty} \quad (1.5)$$

характеризует векторное изменение скорости потока, производимое решеткой. Все последние формулы справедливы не только для потока идеальной несжимаемой жидкости, но и для вязкой жидкости.

Сила профильного сопротивления  $\mathbf{R}'$  при этом оказывается равной [1]

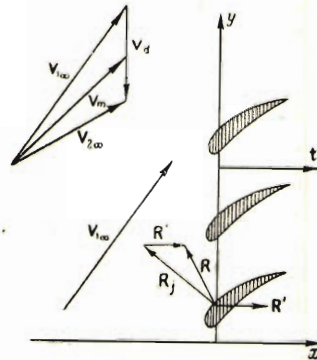
$$\mathbf{R}' = p' \mathbf{t} \quad (1.6)$$

где  $p'$  — потеря напора в решетке, определяемая равенством

$$\begin{aligned} p' &= (p_{1\infty} + 1/2 \rho V_{1\infty}^2) - (p_{2\infty} + 1/2 \rho V_{2\infty}^2) = \\ &= (p_{1\infty} + 1/2 \rho v_{1\infty}^2) - (p_{2\infty} + 1/2 \rho v_{2\infty}^2) \end{aligned}$$

Полная сила  $\mathbf{R}$  равна сумме

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_j + \mathbf{R}' = \rho \mathbf{V}_m \times (\mathbf{t} \times \mathbf{V}_d) + p' \mathbf{t} \quad (1.8)$$



Фиг. 1

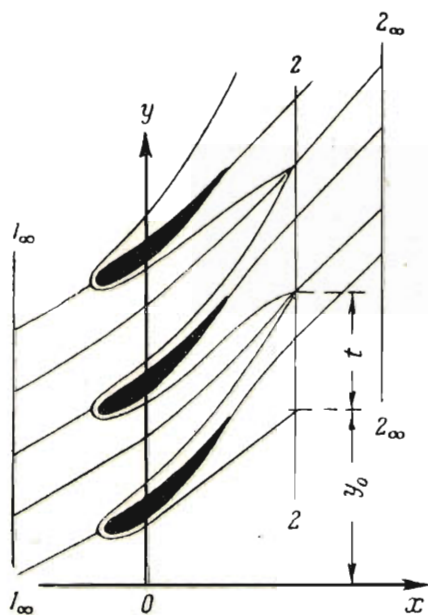
§ 2. Сопротивление плоской решетки, обтекаемой реальным газом при докритических скоростях. В этом случае выражение для полной силы  $\mathbf{R}$  взаимодействия потока с решеткой можно представить в виде<sup>[2]</sup>

$$\mathbf{R} = (p_{1\infty} - p_{2\infty}) \mathbf{t} + \rho_{1\infty} (\mathbf{V}_{1\infty} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{V}_{1\infty} - \rho_{2\infty} (\mathbf{V}_{2\infty} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{V}_{2\infty} \quad (2.1)$$

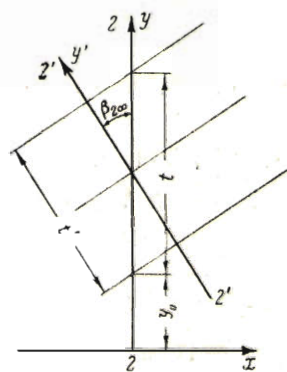
где  $p_{1\infty}$ ,  $\rho_{1\infty}$  и  $p_{2\infty}$ ,  $\rho_{2\infty}$  — соответственно давления и плотности газа в бесконечности перед и за решеткой. Равные между собой выражения

$$\rho_{1\infty} \mathbf{V}_{1\infty} \cdot \mathbf{t} = \rho_{2\infty} \mathbf{V}_{2\infty} \cdot \mathbf{t} \quad (2.2)$$

очевидно, выражают секундный массовый расход газа через сечение потока, параллельное оси решетки и равное по длине шагу.



Фиг. 2



Фиг. 3

Как показано<sup>[2]</sup> и в случае сжимаемого газа при числах Маха, не слишком близких к единице, подъемную силу профиля в решетке, обтекаемой идеальным газом, можно представить в виде (1.4), если только под плотностью  $\rho$  понимать среднюю арифметическую плотность  $\rho_m$ , равную

$$\rho_m = 1/2 (\rho_{1\infty} + \rho_{2\infty}) \quad (2.3)$$

Для этого используется приближенное выражение теоремы Бернулли

$$p_{1\infty} - p_{2\infty} = \rho_m \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{V}_d = 1/2 \rho_m (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \quad (2.4)$$

верное с точностью до десятых долей квадрата разности квадратов чисел Маха на бесконечности перед и за решеткой.

Полагая в случае реального (сжимаемого и вязкого) газа

$$p_{1\infty} - p_{2\infty} = 1/2 \rho_m (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) + p' \quad (2.5)$$

где  $p'$  характеризует потери в решетке из-за наличия внутреннего тре-



ния в газе, можно получить<sup>[2]</sup> формулу, аналогичную (1.8)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_j + \mathbf{R}' = \rho_m \mathbf{V}_m \times (\mathbf{t} \times \mathbf{V}_d) + p't \quad (2.6)$$

где  $p'$  определяется выражением

$$p' = p_{1\infty} - p_{2\infty} - 1/2 \rho_m (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \quad (2.7)$$

Таким образом вопрос об определении силы профильного сопротивления  $\mathbf{R}'$ , равной

$$\mathbf{R}' = p't \quad (2.8)$$

сводится к нахождению величины потерь  $p'$ , зависящей от формы профилей в решетке и характера их обтекания.

§ 3. Введение промежуточной плоскости; связь между газодинамическими элементами в этой плоскости и соответствующими их значениями в бесконечном удалении за решеткой. Подобно тому, как это делалось для несжимаемой жидкости<sup>[1]</sup>, и в случае сжимаемого газа введем (фиг. 2) наряду с бесконечно удаленными плоскостями  $1_\infty$  и  $2_\infty$  еще промежуточную плоскость 2, определив ее как плоскость, где смыкаются пограничные слои (следы), сошедшие с отдельных профилей решетки, причем во всем дальнейшем предполагается, что гидродинамические и тепловые пограничные слои в следу за решеткой имеют одинаковые очертания.

Относительно движения газа вблизи плоскости 2 необходимо сделать некоторые допущения. По определению положения плоскости 2, вниз по потоку за нею уже нет отдельных пограничных слоев, но, конечно, сохраняются аэродинамические и тепловые «следы» профилей, представляющие провалы на кривых скоростей или полных напоров, а также «провалы» или «горбы» на кривых температуры. По основному свойству пограничного слоя (следа) давление *поперек* следа одинаково во всех точках данного нормального сечения следа, т. е. провал давления в кривой распределения в этом сечении отсутствует. Давление *вдоль* следа резко меняется в непосредственной близости к задней кромке профиля и постепенно выравнивается при удалении от задней кромки.

Проведем через точку пересечения плоскости 2 с осью следа два сечения следа: одно, лежащее в плоскости 2, в которой (фиг. 3) расположена ось  $y$ , и второе сечение  $2'$  нормально к оси следа; в этой плоскости расположим ось  $y'$ .

Введем в рассмотрение величины

$$\begin{aligned} \Delta_u &= \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{u_2 - u}{u_2} dy, & \Delta_v &= \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{v_2 - v}{v_2} dy, & \Delta_V &= \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{V_2 - V}{V_2} dy \\ \Delta_\rho &= \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2} dy, & \Delta_p &= \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{p_2 - p}{p_2} dy, & \Delta_T &= \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{T_2 - T}{T_2} dy \end{aligned} \quad (3.1)$$

характеризующие средние относительные отклонения газодинамических элементов потока в точках сечения 2 следа от значения этих элементов на границах следа в точках пересечения пограничных слоев.

Будем предполагать сечение 2 настолько удаленным от решетки, что разности  $u_2 - u$  и т. д., а также и средние их относительные значения  $\Delta_u$  и т. д. можно считать малыми величинами и пренебрегать их старшими степенями и произведениями. Кроме того, допустим, что скорости в различных точках сечения 2 параллельны между собой и имеют общее направление, одинаковое с направлением скорости на бесконечности за решеткой. Отсюда сразу следует, что

$$\Delta_u = \Delta_v = \Delta_V \quad (3.2)$$

Сопоставляя аналогичные средние относительные отклонения в сечении 2', получим величины

$$\Delta_u' = \frac{1}{t'} \int_{y_0}^{y_0+t'} \frac{u_2' - u'}{u_2'} dy', \dots \quad (t' = t \cos \beta_{2\infty}) \quad (3.3)$$

В дальнейшем будем предполагать, что при достаточном удалении плоскостей 2 и 2' от осевой плоскости решетки все величины (3.3) и т. д. равны соответственно величинам (3.1), т. е.

$$\Delta_u' = \Delta_u, \quad \Delta_p' = \Delta_p, \dots \quad (3.4)$$

В оправдание этого дополнительного предположения можно указать, что оно является следствием допущения о слабой изменчивости газодинамических элементов вблизи плоскости 2 и за нею вниз по потоку.

Замечая, что по основному свойству следа  $\Delta_p' = 0$ , получим важное для дальнейшего равенство

$$\Delta_p = 0 \quad (3.5)$$

Пользуясь малостью введенных величин  $\Delta_u$ ,  $\Delta_p$  и т. д., легко показать, что газодинамические величины в промежуточной плоскости 2 связаны с соответствующими значениями этих величин в плоскости  $2_\infty$  соотношениями, аналогичными случаю несжимаемого газа.

Для этого рассмотрим отрезок трубки тока между сечениями 2 и  $2_\infty$ , причем за поперечный размер трубки в направлении, параллельном оси решетки, примем длину, равную шагу  $t$ .

Тогда, применяя теорему о сохранении массы, получим

$$\int_{y_0}^{y_0+t} \rho u dy = \int_{y_0}^{y_0+t} [\rho_2 - (\rho_2 - \rho)] [u_2 - (u_2 - u)] dy = \rho_{2\infty} u_{2\infty} t$$

Раскрывая скобки и откидывая произведение  $(\rho_2 - \rho)(u_2 - u)$  как малую высшего порядка, получим

$$\int_{y_0}^{y_0+t} [\rho_2 u_2 - u_2 (\rho_2 - \rho) - \rho_2 (u_2 - u)] dy = \rho_{2\infty} u_{2\infty} t$$

Отсюда, пользуясь обозначениями (3.1), имеем

$$\rho_2 u_2 (1 - \Delta_p - \Delta_u) = \rho_{2\infty} u_{2\infty}$$

или, с той же степенью точности,

$$\rho_2 u_2 = \rho_{2\infty} u_{2\infty} (1 + \Delta_p + \Delta_u) \quad (3.6)$$



Теорема импульсов в проекции на ось  $x$ , примененная к тому же отрезку трубки тока, дает

$$\int_{y_0}^{y_0+t} p dy + \int_{y_0}^{y_0+t} \rho u^2 dy - p_{2\infty} t - \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 t = 0$$

Представим полученное равенство в виде

$$\int_{y_0}^{y_0+t} [p_2 - (p_2 - p)] dy + \int_{y_0}^{y_0+t} [\rho_2 - (\rho_2 - \rho)] [u_2 - (u_2 - u)] dy = p_{2\infty} t + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 t$$

Используя малость разностей  $p_2 - p$ ,  $\rho_2 - \rho$ ,  $u_2 - u$ , получим

$$p_2 (1 - \Delta_p) + \rho_2 u_2^2 (1 - \Delta_\rho - 2\Delta_u) = p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 \quad (3.7)$$

С помощью формулы (3.5) и (3.6) получим с тем же приближением

$$p_2 + \rho_{2\infty} u_{2\infty} u_2 (1 - \Delta_u) = p_{2\infty} + \rho_{2\infty} u_{2\infty}^2 \quad (3.8)$$

Применим теорему импульсов в проекции на ось  $y$ . Имеем

$$\int_{y_0}^{y_0+t} \rho u v dy = \rho_{2\infty} u_{2\infty} v_{2\infty} t$$

или

$$\frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} [\rho_2 - (\rho_2 - \rho)] [u_2 - (u_2 - u)] [v_2 - (v_2 - v)] dy = \rho_{2\infty} u_{2\infty} v_{2\infty}$$

Отбрасывание малых высших порядков приводит к равенству

$$\rho_2 u_2 v_2 (1 - \Delta_\rho - \Delta_u - \Delta_v) = \rho_{2\infty} u_{2\infty} v_{2\infty}$$

или согласно (3.6)

$$v_2 (1 - \Delta_v) = v_{2\infty}, \quad v_2 = v_{2\infty} (1 + \Delta_v) \quad (3.9)$$

Пользуясь допущением о параллельности векторов скорости в сечении 2 и  $2_\infty$ , а также равенством (3.2), получим

$$u_2 = u_{2\infty} (1 + \Delta_u), \quad V_2 = V_{2\infty} (1 + \Delta_V) = V_{2\infty} (1 + \Delta_u) \quad (3.10)$$

После этого равенство (3.8) дает

$$p_2 = p_{2\infty} \quad (3.11)$$

На основании (3.10) из равенства (3.6) следует также

$$\rho_2 = \rho_{2\infty} (1 + \Delta_\rho) \quad (3.12)$$

Наконец, из уравнения Клапейрона будем иметь

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_2 - (p_2 - p)}{\rho_2 - (\rho_2 - \rho)} = RT = R [T_2 - (T_2 - T)]$$

или, используя малость разностей,

$$\frac{p_2}{\rho_2} \left( 1 - \frac{p_2 - p}{p_2} + \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2} \right) = RT_2 \left( 1 - \frac{T_2 - T}{T_2} \right)$$

Отсюда интегрированием получим  $\Delta_p - \Delta_s = \Delta_T$ , или в силу (3.5)

$$\Delta_p = -\Delta_T \quad (3.13)$$

С другой стороны, пользуясь той же формулой Клапейрона в плоскостях 2 и 2<sub>∞</sub>, найдем по (3.11)

$$R(T_{2\infty} - T_2) = \frac{p_{2\infty}}{\rho_{2\infty}} - \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_{2\infty}}{\rho_{2\infty}} \frac{\rho_2 - \rho_{2\infty}}{\rho_2} = \frac{p_{2\infty}}{\rho_{2\infty}} \Delta_p$$

или по (3.13)

$$T_{2\infty} - T_2 = T_{2\infty} \Delta_p = -T_{2\infty} \Delta_T$$

т. е. окончательно

$$T_2 = T_{2\infty} (1 + \Delta_T) \quad (3.14)$$

**§ 4. Условные толщины следа и их связь с величинами  $\Delta$  и  $\Delta'$ .** Выражение профильного сопротивления через условные толщины следа. Имея в виду в дальнейшем использовать уравнение импульсов в следу за профилем решетки, содержащее условные толщины следа: толщину вытеснения  $\delta_2^*$  и толщину потери импульса  $\delta_2^{**}$  определяемые [3] как интегралы по сечению 2':

$$\delta_2^* = \int_{y_0'}^{y_0'+t'} \left(1 - \frac{\rho V}{\rho_2 V_2}\right) dy', \quad \delta_2^{**} = \int_{y_0'}^{y_0'+t'} \frac{\rho V'}{\rho_2 V_2} \left(1 - \frac{V}{V_2}\right) dy' \quad (4.1)$$

связем эти толщины с величинами  $\Delta$ ; имеем

$$\delta_2^* = \int_{y_0'}^{y_0'+t'} \left\{1 - \frac{[\rho_2 - (\rho_2 - \rho)][V_2 - (V_2 - V)]}{\rho_2 V_2}\right\} dy' = \quad (4.2)$$

$$= \int_{y_0'}^{y_0'+t'} \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2} dy' + \int_{y_0'}^{y_0'+t'} \frac{V_2 - V}{V_2} dy' = t' (\Delta_p' + \Delta_u') = (\Delta_p + \Delta_u) t \cos \beta_{2\infty}$$

$$\delta_2^{**} = \int_{y_0'}^{y_0'+t'} \frac{[\rho_2 - (\rho_2 - \rho)][V_2 - (V_2 - V)]}{\rho_2 V_2} \frac{V_2 - V}{V_2} dy' = t' \Delta_V' = t \Delta_u \cos \beta_{2\infty} \quad (4.3)$$

Перейдем к определению профильного сопротивления, а, следовательно, прежде всего к определению величины  $p'$ . Формула (2.7) выражает  $p'$  как малую разность двух больших величин и поэтому не пригодна ни для экспериментального, ни для приближенного теоретического определения  $p'$ . Чтобы освободиться от этого недостатка, перепишем формулу (2.7) в виде

$$p' = p_{1\infty} - p_{2\infty} - \frac{1}{4} (\rho_{1\infty} + \rho_{2\infty}) (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \quad (4.4)$$

и рассмотрим поток между сечением  $I_\infty$  и границами пограничных слоев, смыкающихся в плоскости 2. Во всей этой области поток является безвихревым, так что теорема Бернулли может применяться в чистом своем виде без дополнительного члена, учитывающего потери. Будем иметь аналогично (2.4)

$$p_{1\infty} - p_2 = \frac{1}{4} (\rho_{1\infty} + \rho_2) (V_2^2 - V_{1\infty}^2) \quad (4.5)$$



Вспоминая, что по (3.11)  $\rho_1 = \rho_{2\infty}$ , и сравнивая при этом (4.5) и (4.4), получим

$$p' = \frac{1}{4} (\rho_{1\infty} + \rho_2) (V_2^2 - V_{1\infty}^2) - \frac{1}{4} (\rho_{1\infty} + \rho_{2\infty}) (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2)$$

Заменяем здесь  $V_2$  и  $\rho_2$  их выражениями через  $V_{2\infty}$  и  $\rho_{2\infty}$  согласно равенствам (3.10) и (3.12), тогда будем иметь

$$\begin{aligned} p' &= \frac{1}{4} (\rho_{1\infty} + \rho_{2\infty} + \rho_{2\infty} \Delta_\rho) [V_{2\infty}^2 (1 + 2\Delta_V) - V_{1\infty}^2] - \\ &\quad - \frac{1}{4} (\rho_{1\infty} + \rho_{2\infty}) (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\rho_{1\infty} + \rho_{2\infty}) V_{2\infty}^2 \Delta_u + \frac{1}{4} \rho_{2\infty} (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \Delta_\rho \end{aligned}$$

или по формулам (4.2) и (4.3)

$$p' = \rho_m V_{2\infty}^2 \frac{\delta_2^{**}}{t \cos \beta_{2\infty}} + \frac{1}{4} \rho_{2\infty} (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \frac{\delta_2^* - \delta_2^{**}}{t \cos \beta_{2\infty}} \quad (4.6)$$

Введем в рассмотрение величину

$$H_2 = \frac{\delta_2^*}{\delta_2^{**}} = \frac{\Delta_u + \Delta_\rho}{\Delta_u} = 1 + \frac{\Delta_\rho}{\Delta_u} \quad (4.7)$$

в случае движения несжимаемого газа равную единице, тогда получим следующую простую формулу

$$p' = \left[ \rho_m V_{2\infty}^2 + \frac{1}{4} (H_2 - 1) \rho_{2\infty} (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \right] \frac{\delta_2^{**}}{t \cos \beta_{2\infty}} \quad (4.8)$$

Отсюда сразу следует и формула профильного сопротивления

$$R' = p't = \left[ \rho_m V_{2\infty}^2 + \frac{1}{4} (H_2 - 1) \rho_{2\infty} (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \right] \frac{\delta_2^{**}}{\cos \beta_{2\infty}} \quad (4.9)$$

Из этой формулы как частные случаи вытекают формулы профильного сопротивления для решетки обтекаемой несжимаемой вязкой жидкостью и для изолированного профиля в общем случае.

В случае решетки в несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ )

$$\rho_m = \rho, \quad \Delta_\rho = 0, \quad H_2 = 1$$

и формулы (4.8) или (4.9) переходят в формулы

$$p' = \frac{\rho V_{2\infty}^2 \delta_{2\infty}^{**}}{t \cos \beta_{2\infty}}, \quad R' = \frac{\rho V_{2\infty}^2 \delta_{2\infty}^{**}}{\cos \beta_{2\infty}}, \quad (4.10)$$

идентичные формулам (2.12) ранее цитированной работы [1].

В случае изолированного профиля, обтекаемого вязким сжимаемым газом, будем иметь

$$\rho_{1\infty} = \rho_{2\infty} = \rho_m = \rho_\infty, \quad V_{1\infty} = V_{2\infty} = V_\infty, \quad \beta_{2\infty} = 0$$

Кроме того, плоскость 2 уходит на бесконечность, так что

$$R' = \rho_\infty V_\infty^2 \delta_\infty^{**} \quad (4.11)$$

известная формула теории сопротивления изолированного профиля.

Равенства (4.8) и (4.9) выражают потери и профильные сопротивления решетки через известные элементы на бесконечности перед и за решеткой, а также и через элементы  $H_2$  и  $\delta_2^{**}$ , отнесенные к плоскости 2, положение которой остается неизвестным, поскольку до сих пор не существует надежной теории турбулентного следа.

Имея в виду в дальнейшем дать такую формулу профильного сопротивления решетки, по которой, используя теорию пограничного слоя на профиле, можно было бы сопротивление решетки действительно рассчитать, найдем зависимость только что указанных величин  $H_2$  и  $\delta_2^{**}$  от элементов пограничного слоя на задней кромке профиля решетки.

**§ 5. Установление связи между элементами следа в сечении 2 и элементами пограничного слоя в сечении на задней кромке профиля.** В настоящем параграфе дается обобщение известного приема установления связи между элементами пограничного слоя на задней кромке профиля и в следе за ним на бесконечности, предложенного для случая изолированного профиля в несжимаемой жидкости Сквайром и Юнгом [4].

Обобщение здесь заключается прежде всего в том, что в случае решетки сечение на задней кромке связывается не с бесконечно удаленной вниз по потоку плоскостью, а с плоскостью 2 смыкания пограничных слоев или, вернее, плоскостью 2', наклоненной к ней под углом  $\beta_{2\infty}$ . Кроме того, обобщения требует, конечно, переход к сжимаемому газу.

Уравнение импульсов для следа за телом может быть легко выведено из общих уравнений плоского пограничного слоя в сжимаемом газе

$$\rho V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} + \rho V_n \frac{\partial V_s}{\partial n} = -\frac{dp}{ds} + \frac{\partial \tau}{\partial n}, \quad \frac{\partial(\rho V_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho V_n)}{\partial n} = 0 \quad (5.1)$$

где для продольной (координата  $s$ ) и поперечной (координата  $n$ ) проекций скоростей приняты символы  $V_s$  и  $V_n$  в отличие от проекций  $u$  и  $v$  скоростей на связанные с решеткой оси  $Ox$  и  $Oy$ ,  $\rho$  — местная плотность,  $\tau$  — напряжение трения,  $p$  — давление на внешней границе слоя.

Перепиывая согласно второму из равенств (5.1) и общему уравнению Бернулли систему (5.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho V_s V_s) + \frac{\partial}{\partial n}(\rho V_s V_n) = \bar{\rho} \bar{V}_s \frac{d\bar{V}_s}{ds} + \frac{\partial \tau}{\partial n}, \quad \frac{\partial(\rho V_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho V_n)}{\partial n} = 0 \quad (5.2)$$

где через  $\bar{\rho}$  и  $\bar{V}_s$  обозначены плотность и продольная скорость на внешней границе пограничного слоя, умножим обе части второго уравнения на  $\bar{V}_s$  и перепишем его тождественно так:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\bar{\rho} \bar{V}_s V_s) + \frac{\partial}{\partial n}(\bar{\rho} \bar{V}_s V_n) - \rho V_s \frac{d\bar{V}_s}{ds} = 0$$

После этого вычтем почленно из полученного только что уравнения первое уравнение (5.2) и проинтегрируем таким образом составленное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s}[\rho V_s (\bar{V}_s - V_s)] + \frac{\partial}{\partial n}[\rho V_n (\bar{V}_s - V_s)] + (\bar{\rho} \bar{V}_s - \rho V_s) \frac{d\bar{V}_s}{ds} = -\frac{\partial \tau}{\partial n}$$



по нормальному сечению следа, которое будем считать бесконечным в обычном условном смысле теории асимптотического пограничного слоя или конечным, как это принято в теории слоя конечной толщины. И в том и другом случае будем иметь

$$\frac{d}{ds} \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \rho V_s (\bar{V}_s - V_s) dn + \frac{d\bar{V}_s}{ds} \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} (\bar{\rho} \bar{V}_s - \rho V_s) dn = 0$$

так как все подстановки обращаются в нули. Таким образом, получим

$$\frac{d}{ds} \left[ \bar{\rho} \bar{V}_s^2 \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{\rho V_s}{\bar{\rho} \bar{V}_s} \left(1 - \frac{V_s}{\bar{V}_s}\right) dn \right] + \bar{\rho} \bar{V}_s \frac{d\bar{V}_s}{ds} \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \left(1 - \frac{\rho V_s}{\bar{\rho} \bar{V}_s}\right) dn = 0$$

Или, раскрывая скобки и вводя обозначения [4]

$$\delta^* = \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \left(1 - \frac{\rho V_s}{\bar{\rho} \bar{V}_s}\right) dn, \quad \delta^{**} = \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{\rho V_s}{\bar{\rho} \bar{V}_s} \left(1 - \frac{V_s}{\bar{V}_s}\right) dn \quad (5.3)$$

окончательно найдем искомое уравнение импульсов

$$\frac{d\delta^{**}}{ds} + \left( \frac{2}{\bar{V}} \frac{d\bar{V}}{ds} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{ds} \right) \delta^{**} + \frac{1}{\bar{V}} \frac{d\bar{V}}{ds} \delta^* = 0 \quad (5.4)$$

Заметим, что в такой форме уравнение импульсов для сжимаемого газа отличается от соответствующего уравнения для несжимаемого газа лишь членом  $\bar{\rho}^{-1} d\bar{\rho}/ds$  (и, конечно, самим определением величин  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$ ). Если посмотреть на уравнение импульсов для несжимаемого газа в случае осесимметричного движения, то можно сказать, что член  $\bar{\rho}^{-1} d\bar{\rho}/ds$ , выражающий влияние переменности плотности газа, эквивалентен члену, учитывающему роль поперечной кривизны.

Наряду с уравнением импульсов рассмотрим тепловое уравнение, которое может быть легко составлено методом, аналогичным предыдущему, из известного теплового уравнения пограничного слоя. Имеем

$$\left( \rho V_s \frac{\partial}{\partial s} + \rho V_n \frac{\partial}{\partial n} \right) \left( i + \frac{V_s^2}{2} \right) = \frac{\partial q}{\partial n} \quad (5.5)$$

где ( $\sigma = \mu c_p / \lambda$  есть число Прандтля)

$$i = J c_p T, \quad q = \mu \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{i}{\sigma} + \frac{V_s^2}{2} \right)$$

Здесь указано выражение для  $q$  в случае ламинарного пограничного слоя; уравнение (5.5) справедливо и для турбулентного слоя, в этом случае  $q$  будет выражаться иначе; для нас это сейчас не существенно.

Введем в рассмотрение так называемую температуру адиабатического торможения  $T^*$ , положив

$$T^* = T + \frac{V_s^2}{2Jc_p} \quad (5.6)$$

Тогда, используя еще уравнение неразрывности, можно составить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho V_s T^*) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho V_n T^*) = \frac{1}{Jc_p} \frac{\partial q}{\partial n}, \quad \frac{\partial}{\partial s} (\rho V_s \bar{T}^*) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho V_n \bar{T}^*) = 0 \quad (5.7)$$

Во втором уравнении системы  $\bar{T}^*$  — температура торможения на внешней границе слоя — как постоянная величина (внешний поток изэнтропичен) внесена под знак производных в уравнении неразрывности.

Вычитая из одного уравнения (5.7) другое и интегрируя по поперечному сечению следа, последовательно найдем

$$\frac{d}{ds} \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \rho V_s (\bar{T}^* - T^*) dn = 0, \quad \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \rho V_s (\bar{T}^* - T^*) dn = \text{const} \quad (5.8)$$

Введем в рассмотрение условную толщину следа

$$\theta = \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{\rho V_s}{\rho V_s} \left(1 - \frac{T^*}{\bar{T}^*}\right) dn \quad (5.9)$$

которую можно было бы назвать толщиной потери энергии; тогда уравнение (5.8) может быть еще переписано так:

$$\bar{\rho} \bar{V} \bar{T}^* \theta = \text{const} \quad (5.10)$$

Возвратимся к уравнению (5.4). Разделив обе его части на  $\delta^{**}$ , проинтегрируем вдоль следа от сечения  $k$  на задней кромке профиля решетки до плоскости  $2'$ , определенной раньше. Тогда будем иметь

$$\ln \left( \frac{\delta_2^{**}}{\delta_k^{**}} \right) = \ln \left( \frac{\rho_k V_k^2}{\rho_2 V_2^2} \right) - \int_{(k)}^{(2')} \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \frac{d \ln V_s}{ds} ds \quad (5.11)$$

Вспомня обозначение (4.7) для отношения условных толщин следа

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (5.12)$$

заметим, что уравнение (5.11) интегрируется до конца, если заменить величину  $H$  каким-нибудь средним ее значением, например, положить

$$H = H_{\text{ср}} = 1/2 (H_2 + H_k) \quad (5.13)$$

При таком упрощении сразу получим

$$\ln \left( \frac{\delta_2^{**}}{\delta_k^{**}} \right) = \ln \left( \frac{\rho_k V_k^2}{\rho_2 V_2^2} \right) - \frac{1}{2} (H_2 + H_k) \ln \frac{V_2}{V_k}$$

или окончательно

$$\frac{\delta_2^{**}}{\delta_k^{**}} = \frac{\rho_k}{\rho_2} \left( \frac{V_k}{V_2} \right)^{2 + 1/2 (H_2 + H_k)} \quad (5.14)$$

Полученное уравнение связывает  $\delta_2^{**}$  и  $\delta_k^{**}$ , но эта связь не явно содержит еще и  $\delta_2^*$ , так как в показателе степени справа стоит величина  $H_2$ , равная отношению  $\delta_2^* / \delta_2^{**}$ . Вспомня формулы (4.8) и (4.9), выведенные в предыдущем параграфе, видим, что уравнение (5.14) служит одним из уравнений для выражения двух неизвестных  $\delta_2^{**}$  и  $H_2$ , входящих в формулы потерь в решетке и ее сопротивления, через элементы пограничного слоя на задней кромке профиля.

Второе уравнение получим, воспользовавшись равенством (5.10), которое, очевидно, можно переписать так:

$$\rho_2 V_2 T_2^* \theta_2 = \rho_k V_k T_k^* \theta_k$$



или, замечая, что в силу изэнтропичности движения вне пограничного слоя  $T_2^* = T_k^*$ , еще так:

$$\rho_2 V_2 \theta_2 = \rho_k V_k \theta_k \quad (5.15)$$

В этом равенстве как будто появилась новая неизвестная величина  $\theta_2$ , но на самом деле в силу малой неоднородности полей газодинамических элементов в плоскости 2 или 2' величина  $\theta_2$  выражается через предыдущие неизвестные. Используя малую неоднородность и формулы связи между элементами в плоскостях 2 и 2 $_{\infty}$ , выведенные в § 3, преобразуем сначала равенство (5.14), а затем и (5.15). Имеем по (5.14)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2^{**}}{\delta_k^{**}} &= \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty} (1 + \Delta_p)} \left[ \frac{V_k}{v_{2\infty} (1 + \Delta_u)} \right]^{2 + 1/2 (H_2 + H_k)} = \\ &= \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{2 + 1/2 (H_2 + H_k)} (1 - \Delta_p) \left\{ 1 - \left[ 2 + \frac{1}{2} (H_2 + H_k) \right] \Delta_u \right\} = \\ &= \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{2 + 1/2 (H_2 + H_k)} \left\{ 1 - \Delta_p - \left[ 2 + \frac{1}{2} (H_2 + H_k) \right] \Delta_u \right\} \quad (5.16) \end{aligned}$$

Имея в виду в дальнейшем все сводить к неизвестным  $\delta_2^{**}$  и  $H_2$ , применим формулы (4.2) и (4.3), тогда получим

$$\frac{\delta_2^{**}}{\delta_k^{**}} = \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{2 + 1/2 H_k + 1/2 H_2} \left[ 1 - (H_2 - 1) \frac{\delta_2^{**}}{l'} - \left( 2 + \frac{H_k}{2} + \frac{H_2}{2} \right) \frac{\delta_2^{**}}{l'} \right] \quad (5.17)$$

или

$$\delta_2^{**} = \delta_k^{**} \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{2 + 1/2 H_k + 1/2 H_2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{2} H_k + \frac{3}{2} H_2 \right) \frac{\delta_2^{**}}{l'} \right]$$

В первом приближении можно пренебречь вычитаемым в квадратной скобке справа по сравнению с единицей и принять

$$\delta_2^{**} = \delta_k^{**} \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{2 + 1/2 H_k + 1/2 H_2} \quad (5.18)$$

Аналогичным преобразованиям подвергнем второе основное уравнение (5.15). Заметим что с выбранной степенью приближения

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{\rho V_s}{\rho_2 V_2} \left( 1 - \frac{T^*}{T_2^*} \right) dn = \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{\rho V_s (T_2^* - T^*)}{\rho_2 V_2 T_2^*} dn = \\ &= \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{\rho_2 V_2 (T_2^* - T^*)}{\rho_2 V_2 T_2^*} dn = \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{T_2^* - T^*}{T_2^*} dn \end{aligned}$$

Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{(T_2 - T) dn}{T_2 + v_2^2 / 2Jc_p} + \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{V_2^2 / 2Jc_p - V_s^2 / 2Jc_p}{T_2 + v_2^2 / 2Jc_p} dn = \\ &= \frac{1}{1 + V_2^2 / 2Jc_p T_2} \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{T_2 - T}{T_2} dn + \\ &+ \int_{-\infty, \delta}^{+\infty, \delta} \frac{V_2^2 / 2Jc_p - [V_2^2 - 2V_2(V_2 - V)] / 2Jc_p}{T_2 + v_2^2 / 2Jc_p} dn = \frac{1}{1 + V_2^2 / 2Jc_p T_2} \Delta_T l' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{V_2^2/2Jc_p}{T_2^2 + V_2^2/2Jc_p} \Delta_u t' &= \left( \frac{T_{2\infty}}{T_{2\infty}^*} \Delta_T + \frac{V_{2\infty}^2}{Jc_p T_{2\infty}^*} \right) \Delta_u t' = \\
 &= \left( \frac{V_{2\infty}^2}{Jc_p T_{2\infty}^*} \Delta_u - \frac{T_{2\infty}}{T_{2\infty}^*} \Delta_p \right) t'
 \end{aligned}$$

или по (4.2) и (4.3)

$$\theta_2 = \left[ \frac{V_{2\infty}^2}{Jc_p T_{2\infty}^*} - (H_2 - 1) \frac{T_{2\infty}}{T_{2\infty}^*} \right] \delta_2^{**} \quad (5.19)$$

Заметим, что величина  $\theta_2/t'$ , пропорциональная по (5.19)  $\delta_2^{**}/t'$ , есть малая величина первого порядка, так что с принятым порядком приближения можно преобразовать (5.15) так:

$$\rho_{2\infty} V_{2\infty} \left[ \frac{V_{2\infty}^2}{Jc_p T_{2\infty}^*} - (H_2 - 1) \frac{T_{2\infty}}{T_{2\infty}^*} \right] \delta_2^{**} = \rho_k V_k \theta_k$$

или

$$\rho_{2\infty} V_{2\infty} \left[ \frac{V_{2\infty}^2}{Jc_p} - (H_2 - 1) T_{2\infty} \right] \delta_2^{**} = \rho_k V_k T_{2\infty}^* \theta_k \quad (5.20)$$

Совокупность уравнений (5.18) и (5.20) и представляет собой искомую систему уравнений для определения двух неизвестных величин  $\delta_2^{**}$  и  $H_2$  в функции от параметров пограничного слоя и внешнего потока вблизи задней кромки профиля и плотности, скорости и температуры на бесконечности позади решетки.

Для решения этой системы заметим, что неизвестные легко разделяются, если поделить уравнения (5.18) и (5.20) одно на другое. Имеем

$$\left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{1/2 H_2} \frac{V_{2\infty}^2 / Jc_p - (H_2 - 1) T_{2\infty}}{T_{2\infty}^*} = \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{1 + 1/2 H_2}$$

или, введя число Маха  $M_{2\infty}$  на бесконечности за решеткой, имеем

$$\begin{aligned}
 M_{2\infty} &= \frac{V_{2\infty}}{a_{2\infty}} = \frac{V_{2\infty}}{\sqrt{kRT_{2\infty}}} = \frac{V_{2\infty}}{\sqrt{(k-1)Jc_p T_{2\infty}}} \\
 \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{1/2 H_2} &\frac{(k-1)M_{2\infty}^2 - (H_2 - 1)}{1/2(k-1)M_{2\infty}^2 + 1} = \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{1 + 1/2 H_2} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Это трансцендентное уравнение относительно  $H_2$  может быть разрешено одним из приближенных методов в каждом конкретном случае. После этого согласно (5.20) найдем

$$\delta_2^{**} = \frac{1 + 1/2(k-1)M_{2\infty}^2}{1 + (k-1)M_{2\infty}^2 - H_2} \frac{\rho_k V_k}{\rho_{2\infty} V_{2\infty}} \theta_k \quad (5.22)$$

Таким образом, величины  $\delta_2^{**}$  и  $H_2$ , относящиеся к неизвестно где расположенному сечению следа (2), исключаются и выражаются через измеримые или вычисляемые по любому методу теории пограничного слоя величины  $\delta_k^{**}$  и  $\theta_k$ , а также скорости, плотности и температуры на внешней границе пограничного слоя вблизи задней кромки профиля решетки и на бесконечности за решеткой. После этого уже нетрудно найти  $p'$  и  $R'$  по формулам (4.8) и (4.9).



§ 6. Некоторые приближенные формулы для вычисления потерь и сопротивлений в решетке. При тех сравнительно малых докритических числах Маха, которые мы рассматриваем, неизотермичность потока в следу за профилем решетки может иметь место главным образом за счет нагревания или охлаждения поверхности профиля, а не за счет внутренних преобразований кинетической энергии в тепловую.

Чтобы подчеркнуть этот факт, обратимся к формуле (5.21). Введем для краткости следующие обозначения:

$$\frac{k-1}{2} M_{2\infty}^2 = m, \quad \frac{H_2-1}{2} = \varepsilon, \quad \frac{3+H_k}{2} = \mu \quad (6.1)$$

Тогда трансцендентное относительно  $\varepsilon$  уравнение (5.21) примет вид

$$\frac{m-\varepsilon}{1+m} = \frac{1}{2} \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{\mu+\varepsilon} \quad (6.2)$$

Разложим теперь неизвестную величину  $\varepsilon$  в ряд по степеням малого параметра  $m$  (заметим, что для воздуха величина  $m$  при  $M_{2\infty} < 0.7$  не превосходит 0.1):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 m + \varepsilon_2 m^2 + \dots \quad (6.3)$$

Тогда подставляя это разложение в равенство (6.2), получим

$$[-\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_1)m - \dots] (1 - m - \dots) = \frac{1}{2} \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{\mu+\varepsilon_0} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{\varepsilon_1 m + \dots} \quad (6.4)$$

или

$$-\varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1)m - \dots = \frac{1}{2} \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{\mu+\varepsilon_0} \left[ 1 + \varepsilon_1 \ln \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right) m + \dots \right]$$

Приравнявая коэффициенты, получим уравнение

$$-\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{\mu+\varepsilon_0} \quad (6.5)$$

для определения  $\varepsilon_0$ . Используя теперь оговоренную ранее малую теплоотдачу с поверхности профиля в решетке, при  $M_{2\infty} = 0$  будем считать величину  $\varepsilon_0$  малой. Тогда с точностью до малых второго порядка получим

$$-\varepsilon_0 = A_k \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{\varepsilon_0} = A_k \left[ 1 + \varepsilon_0 \ln \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right] \quad (6.6)$$

где введено обозначение

$$A_k = \frac{1}{2} \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{1/2(3+H_k)} \quad (6.7)$$

Из уравнения (6.6) находим

$$\varepsilon_0 = - \frac{A_k}{1 + A_k \ln(V_{2\infty}/V_k)} \quad (6.8)$$

Заметим, что отношение  $V_{2\infty}/V_k$  обычно мало отличается от единицы, следовательно, натуральный логарифм этого отношения мал, что позволяет без большой ошибки положить  $\varepsilon_0 = -A_k$ .

После этого, приравнивая в (6.4) коэффициенты при  $m$  в первой степени, найдем с той же степенью точности  $\varepsilon_1 = 1 + \varepsilon_0 = 1 - A_k$ .

Таким образом, получим приближенную формулу

$$\varepsilon = -A_k + (1 + A_k)m \approx m - A_k \quad (6.9)$$

Обратимся теперь к уравнению (5.22), которое в новых обозначениях имеет вид

$$\delta_2^{**} = \frac{1+m}{2(m-\varepsilon)} \frac{\rho_k V_k}{\rho_{2\infty} V_{2\infty}} \theta_k \quad (6.10)$$

Согласно (6.11) и (6.7) последовательно имеем

$$\delta_2^{**} = \frac{\rho_k V_k}{\rho_{2\infty} V_{2\infty}} \frac{\theta_k}{2A_k} = \delta_k^{**} \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{1/2(5+H_k)} \quad (6.11)$$

Если принять, как это делается [5], на задней кромке  $H_k = 1.4$ , то равенства (6.11) и (6.7) примут вид

$$\delta_2^{**} = \delta_k^{**} \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{3.2}, \quad A_k = \frac{1}{2} \frac{\theta_k}{\delta_k^{**}} \left( \frac{V_{2\infty}}{V_k} \right)^{2.2} \quad (6.12)$$

После этого, обращаясь к равенству (4.8), легко получим приближенную формулу для потерь:

$$p' = \left[ \rho_m V_{2\infty}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \rho_{2\infty} (V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2) \right] \frac{\delta_2^{**}}{t \cos \beta_{2\infty}} = \quad (6.13)$$

$$= \rho_m V_{2\infty}^2 \frac{\rho_k}{\rho_{2\infty}} \left( \frac{V_k}{V_{2\infty}} \right)^{3.2} \frac{\delta_k^{**}}{t \cos \beta_{2\infty}} \left[ 1 + \frac{1}{2} (m - A_k) \frac{\rho_{2\infty}}{\rho_m} \frac{V_{2\infty}^2 - V_{1\infty}^2}{V_{2\infty}^2} \right]$$

а следовательно, и соответствующую приближенную формулу для сопротивления, отличающуюся от правой части предыдущей формулы лишь множителем  $t$ .

Дальнейшие возможные упрощения равенства (6.13) связаны с выбором приемов для расчета характеристик пограничного слоя на поверхности профиля в решетке и для учета влияния сжимаемости на внешний поток.

Поступило в редакцию  
29 I 1949

Институт механики АН СССР  
Ленинградский политехнический институт

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Сопротивление решетки профилей обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью. ПММ, 1947, Т. XI, Вып. 4.
2. Лойцянский Л. Г. Обобщение формулы Жуковского на случай профиля в решетке. Заметка в этом выпуске, стр. 209.
3. Лойцянский Л. Г. Обратное влияние пограничного слоя на распределение давления на поверхности тела, обтекаемого реальной жидкостью. ПММ, 1947, Т. XI, Вып. 2.
4. Сквайр и Юнг. Расчет профильного сопротивления крыла. Сборник статей „К вопросу о максимальной скорости самолета“. М. Оборонгиз, 1941, Стр. 100—126.