

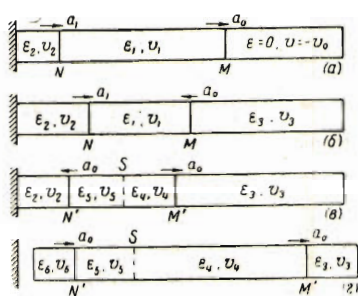
ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ УДАРЕ СТЕРЖНЯ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ

В. С. Ленский

(Москва)

§ 1. Рассмотрим задачу об ударе однородного цилиндрического стержня длины l , движущегося со скоростью v_0 в направлении своей оси, о неподвижную абсолютно жесткую преграду, плоскость которой перпендикулярна оси стержня. Будем отсчитывать время от момента начала соударения, а за положительное направление скорости примем направление от преграды к стержню (вправо на фиг. 1).

Предположим далее, что зависимость между напряжением и деформацией материала стержня при растяжении и сжатии описывается схемой Прандтля с линейным упрочнением, причем E — модуль Юнга, а E_1 — модуль упрочнения материала. Соответственно этому обозначим через $a_0 = \sqrt{E/\rho}$ скорость распространения продольной упругой волны, через $a_1 = \sqrt{E_1/\rho}$ скорость пластической волны, где ρ — плотность (постоянная) материала стержня.



Фиг. 1

Пусть скорость v_0 настолько велика, что при соударении в стержне возникают пластические деформации. Тогда от места соударения вправо будут распространяться упругая и пластическая ударные волны (фиг. 1). Состояние материальных частиц стержня правее фронта M упругой волны характеризуется деформацией $\epsilon = 0$ и скоростью $v = -v_0$, а левее его — деформацией $\epsilon_1 = -\epsilon_s$ и скоростью v_1 . Здесь ϵ_s — абсолютное значение предела упругих деформаций при сжатии. Величину скорости v_1 можно определить, пользуясь уравнением количества движения на фронте волны, которое при пренебрежении поперечным расширением и скоростью частиц по сравнению со скоростью волны имеет вид

$$\rho c (v_2 - v_1) = \sigma_1 - \sigma_2$$

где c — скорость распространения волны, а σ — напряжение. Применительно к фронту M это уравнение принимает вид

$$\rho a_0 (v_1 - v) = E (\epsilon - \epsilon_1)$$

После подстановки значений ϵ , v и ϵ_1 находим

$$\epsilon_1 = -\epsilon_s, \quad v_1 = a_0 \epsilon_s - v_0 \quad (1.1)$$

Применяя аналогичное уравнение к фронту N и учитывая, что $v_2 = 0$ вследствие неподвижности и жесткости преграды, получаем

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{a_1} (a_0 \varepsilon_s - v_0) - \varepsilon_s, \quad v_2 = 0 \quad (1.2)$$

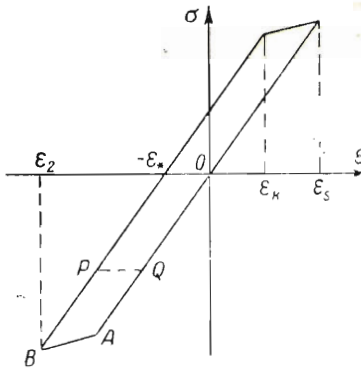
Из условия $\varepsilon_2 < -\varepsilon_s$ имеем оценку скорости v_0 , необходимой для возникновения пластической деформации:

$$v_0 > a_0 \varepsilon_s \quad (1.3)$$

Для отраженной от правого конца стержня волны M находим (фиг. 16)

$$\varepsilon_3 = 0, \quad v_3 = 2(a_0 \varepsilon_s - v_0) + v_0 \quad (1.4)$$

Так как отражение от правого конца увеличило (в положительном на-



Фиг. 2

правлении) скорость частиц и уменьшило деформацию сжатия, то частицы левее места встречи отраженной упругой волны с пластической получают разгрузку. Обратное предположение привело бы к противоречию [1]. Эти частицы после разгрузки характеризуются точкой P на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (фиг. 2). Частицы правее места встречи не могут мгновенно переходить из недеформированного состояния O в состояние P . Предположение такого перехода привело бы нас к противоречию с уравнением энергии. Эти частицы могут остаться или на участке диаграммы OA , или между точками A и B . Место встречи фронтов M и N образует тем самым неподвижную границу, разделяющую части стержня, обладающие разными механическими характеристиками (так как частицы левее его имеют новый предел упругости), — возникает *стационарный фронт сильного разрыва S* (разрыв по деформациям). Неподвижность этого фронта приводит к равенству скоростей частиц и напряжений правее и левее его. При этом вправо от стационарного фронта могут распространяться как упругие, так и пластические волны.

Предположим вначале, что вправо распространяется лишь упругая волна, так что частицы правее S характеризуются точкой Q на участке OA (фиг. 2), имеющей одинаковую с P ординату. Тогда для величин $\varepsilon_4, v_4, \varepsilon_5, v_5$ (фиг. 16) получим четыре алгебраических уравнения: два уравнения количества движения на фронтах M' и N' и равенства $v_4 = v_5, \sigma_4 = \sigma_5$. При этом для σ_4 и σ_5 имеем выражения

$$\sigma_4 = E\varepsilon_4, \quad \sigma_5 = E\varepsilon_5 - (E - E_1)(\varepsilon_s + \varepsilon_2)$$

Из этой системы уравнений находим

$$\varepsilon_4 = \frac{a_0 + a_1}{2a_0^2} (a_0 \varepsilon_s - v_0), \quad v_4 = \frac{3a_0 - a_1}{2a_0} (a_0 \varepsilon_s - v_0) + v_0 \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{2v_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{2a_0^2 a_1} (a_0 \varepsilon_s - v_0), \quad v_5 = v_4 \quad (1.6)$$

Из системы неравенств

$$-\varepsilon_s < \varepsilon_4 < \varepsilon_s, \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_5 < \varepsilon_k$$

где ε_k — новый предел упругих деформаций при растяжении (фиг. 2), получаем оценку для скорости v_0 , при которой вправо пойдет лишь упругая волна

$$v_0 < \left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 \varepsilon_s \quad (1.7)$$

Заметим, что правая часть этого неравенства всегда больше $2a_0 \varepsilon_s$.

Нетрудно подсчитать, что $v_5 = v_4 > 0$. Поэтому при встрече фронта N' с неподвижной преградой возможен конец соударения. В самом деле, при этом предположении находим (фиг. 1a)

$$\varepsilon_6 = -\varepsilon_* = \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1} (a_0 \varepsilon_s - v_0), \quad v_6 = 2a_0 \varepsilon_s - v_0 \quad (1.8)$$

причем $v_6 > 0$, если

$$v_0 < 2a_0 \varepsilon_s \quad (1.9)$$

Здесь $-\varepsilon_*$ — остаточная деформация.

Итак, если $a_0 \varepsilon_s < v_0 < 2a_0 \varepsilon_s$, то соударение заканчивается, как и при упругом ударе, через время $T = 2l/a_0$, причем стержень отскакивает, вибрируя, и в нем появляется зона постоянных остаточных деформаций. Длина этой зоны, определяемая расстоянием стационарного фронта S от левого конца, равна

$$\chi_1 = \frac{2a_1}{a_0 + a_1} l$$

Под ε_s , a_0 и a_1 надо всюду понимать их динамические значения.

§ 2. Пусть теперь

$$2a_0 \varepsilon_s < v_0 < \left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 \varepsilon_s \quad (2.1)$$

В этом случае величина скорости v_5 оказывается недостаточной для уничтожения давления между стержнем и преградой и при отражении фронта N' от левого конца стержня соударение не прекращается. Вместо положения, изображенного на фиг. 1a, создается положение, представленное на фиг. 3a. Значения для $\varepsilon_1, v_1, \dots, \varepsilon_5, v_5$ остаются прежними. Вычисляя аналогично предыдущему, получим (фиг. 3)

$$\varepsilon_6 = \frac{a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{a_0^2 a_1} (a_0 \varepsilon_s - v_0) + \varepsilon_s > \varepsilon_2, \quad v_6 = 0 \quad (2.2)$$

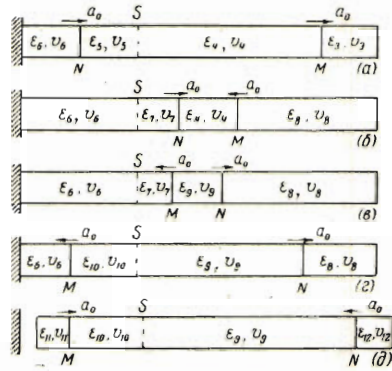
$$\varepsilon_7 = \frac{1}{a_0} (a_0 \varepsilon_s - v_0) + \varepsilon_s > -\varepsilon_s, \quad v_7 = 0$$

$$\varepsilon_8 = 0, \quad v_8 = \frac{a_0 - a_1}{a_0} (a_0 \varepsilon_s - v_0) + v_0 > 0$$

$$\varepsilon_9 = \frac{a_0 - a_1}{2a_0^2} (a_0 \varepsilon_s - v_0) + \varepsilon_s > -\varepsilon_s, \quad v_9 = -\frac{a_0 + a_1}{2a_0} (a_0 \varepsilon_s - v_0) > 0$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{2a_0^2 + a_0 a_1 - 3a_1^2}{2a_0^2 a_1} (a_0 \varepsilon_s - v_0) + \varepsilon_s > \varepsilon_2, \quad v_{10} = -\frac{a_0 + a_1}{2a_0} (a_0 \varepsilon_s - v_0) > 0$$

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_* = \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1} (a_0 \varepsilon_s - v_0), \quad v_{11} = \frac{a_0 - a_1}{a_0} (a_0 \varepsilon_s - v_0) + v_0$$



Фиг. 3

Таким образом, в этом диапазоне скоростей соударение заканчивается после прихода в левое сечение фронта M' , отразившегося от правого конца, т. е. через время

$$T = \frac{4l}{a_0 + a_1} \quad (2.3)$$

При этом сохраняется одна зона постоянных остаточных деформаций той же длины, что и в первом случае, но сами остаточные деформации больше.

§ 3. Рассмотрим случай, когда вправо от S распространяется пластическая волна. Тогда вместо положения рис. 1а получим положение, изображенное на фиг. 4а. Значения $\epsilon_1, v_1, \epsilon_2, v_2, \epsilon_3, v_3$ остаются прежними; $\epsilon_4 = -\epsilon_s$, так как эта упругая волна вызвана распространением пластической волны. Применяя снова уравнение количества

движения на подвижных фронтах и условия на стационарном фронте S , найдем

$$\epsilon_4 = -\epsilon_s \quad v_4 = 3a_0\epsilon_s - v_0$$

$$\epsilon_5 = \frac{3a_0^2 - a_1^2}{a_1(a_0 + a_1)} \epsilon_s - \frac{v_0}{a_1}$$

$$v_5 = \frac{2a_0a_1}{a_0 + a_1} \epsilon_s$$

$$\epsilon_6 = \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_1(a_0 + a_1)} \epsilon_s - \frac{v_0}{a_1}$$

$$v_6 = v_5$$

Из условий $\epsilon_2 < \epsilon_5 < -\epsilon_s$, $\epsilon_2 < \epsilon_6 < \epsilon_k$ получим оценку v_0

$$v_0 > \left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0\epsilon_s \quad (3.2)$$

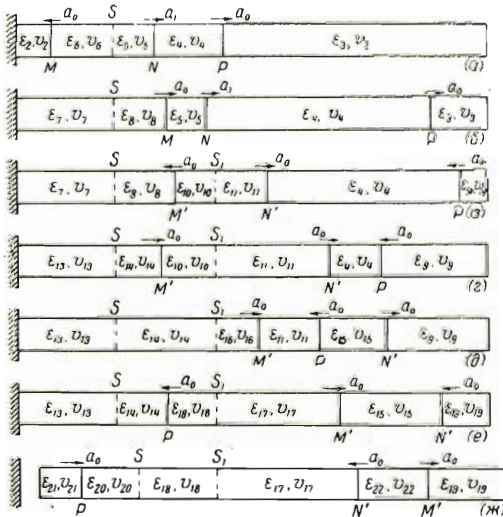
которая точно сопрягается с

оценкой (1.7). Заметим, что правая часть (3.2) всегда меньше $3a_0\epsilon_s$.

Прекращение соударения при отражении волны M от левого конца оказывается невозможным. Если $a_0/a_1 > 4.24$, что имеет место для большинства реальных материалов, то фронт M после отражения от левого конца догонит фронт пластической волны N раньше, чем отраженный от правого конца фронт P встретит N .

Но при встрече фронтов M и N снова возникает стационарный фронт сильного разрыва S_1 . Влево от S_1 будет распространяться фронт волны разгрузки M' . Предположим, что вправо от S_1 распространяется фронт упругой волны N' (фиг. 4в).

Если $a_0/a_1 > 6.46$, что также имеет место для большинства реальных материалов, то фронт M' после отражения от левого конца (при котором соударение не заканчивается) достигнет S_1 раньше, чем его достигнет фронт P , отраженный от правого конца (фиг. 4д).



Фиг. 4

Последовательные вычисления по ранее установленным правилам дают (фиг. 4)¹

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_7 &= \frac{4a_1}{a_0 + a_1} \varepsilon_s + \varepsilon_2, & v_7 &= 0 \\
 \varepsilon_8 &= \frac{3a_0^2 + a_1^2}{a_1(a_0 + a_1)} \varepsilon_s - \frac{v_0}{a_1}, & v_8 &= 0 \\
 \varepsilon_9 &= 0, & v_9 &= 4a_0\varepsilon_s - v_0 \\
 \varepsilon_{10} &= \frac{2a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{2a_0^2a_1} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{2a_0^2}{a_1(a_0 + a_1)} \varepsilon_s \\
 & & v_{10} &= \frac{a_0 - a_1}{2a_0} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} a_0\varepsilon_s \\
 \varepsilon_{11} &= \frac{a_0 + a_1}{2a_0^2} (a\varepsilon_s - v_0) + \frac{2a_1}{a_0 + a_1} \varepsilon_s, & v_{11} &= v_{10} \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{2a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{2a_0^2a_1} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{2a_1}{a_0 + a_1} \varepsilon_s, & v_{12} &= v_{10} \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{a_0^2a_1} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \varepsilon_s, & v_{13} &= 0 \quad (*) \\
 \varepsilon_{14} &= \frac{a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{a_0^2a_1} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{2a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{a_1(a_0 + a_1)} \varepsilon_s, & v_{14} &= 0 \\
 \varepsilon_{15} &= \frac{a_0 + a_1}{2a_0^2} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{a_0 + 3a_1}{a_0 + a_1} \varepsilon_s \\
 & & v_{15} &= \frac{a_0 - a_1}{2a_0} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{2a_0^2}{a_0 + a_1} \varepsilon_s \\
 \varepsilon_{16} &= \frac{1}{a_0} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \varepsilon_s, & v_{16} &= 0 \\
 \varepsilon_{17} &= \frac{1}{a_0} (a_0\varepsilon_s - v_0) + 2\varepsilon_s, & v_{17} &= a_0\varepsilon_s \\
 \varepsilon_{18} &= \frac{a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{a_0^2a_1} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{2a_0}{a_1} \varepsilon_s, & v_{18} &= v_{17} = a_0\varepsilon_s \\
 \varepsilon_{19} &= 0, & v_{19} &= -\frac{a_1}{a_0} (a_0\varepsilon_s - v_0) + \frac{a_0(a_0 - 3a_1)}{a_0 + a_1} \varepsilon_s \\
 \varepsilon_{20} &= \frac{a_0^2 + a_0a_1 - a_1^2}{a_0^2a_1} (a_0\varepsilon_s - v_0) + 2\varepsilon_s, & v_{20} &= a_{18} = v_{0}\varepsilon_s \\
 \varepsilon_{21} &= -\varepsilon_* = \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2a_1} (a_0\varepsilon_s - v_0), & v_{21} &= 4a_0\varepsilon_s - v_0
 \end{aligned}$$

Оказывается, что $\varepsilon_{10} > \varepsilon_s$ при условии (3.2), а из условия $\varepsilon_{11} > -\varepsilon_s$ (т. е. вправо от S_1 распространяется лишь упругая волна) получаем новую оценку для скорости v_0 :

$$v_0 < \left[1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1} + \frac{4a_0a_1}{(a_0 + a_1)^2} \right] a_0\varepsilon_s \quad (3.4)$$

причем правая часть больше $3a_0\varepsilon_s$. Условие $\varepsilon_{18} > -\varepsilon_s$ приводит нас к новому ограничению для v_0 :

$$v_0 < 3a_0\varepsilon_s \quad (3.5)$$

¹ На фиг. 4 ряд промежуточных положений опущен. Состояние (*) относится к области между S и преградой при движении в ней фронта M' .

Это же условие обеспечивает выполнение неравенств $\epsilon_{14} > \epsilon_5$, $\epsilon_{17} > \epsilon_{16}$, $\epsilon_{18} > \epsilon_5$, $\epsilon_{20} > \epsilon_2$, т. е. дальнейшее разгружение частиц стержня при прохождении фронта P , и невозникновение в дальнейшем пластических деформаций. При соблюдении условия (3.5) отражение фронта P от левого конца стержня приводит к концу соударения, так что $v_{21} > 0$.

Стержень отделяется от преграды, вибрируя, причем новых пластических волн не возникает. Время соударения оказывается тем же, что и в случае § 2. Таким образом, при

$$\frac{a_0}{a_1} > 6.46, \quad \left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 \epsilon_s < v_0 < 3a_0 \epsilon_s$$

соударение заканчивается через время $T = 4l / (a_0 + a_1)$, причем в стержне оказываются две зоны постоянных остаточных деформаций, оканчивающихся от левого конца стержня на расстояниях соответственно

$$\chi_1 = \frac{2a_1}{a_0 + a_1} l, \quad \chi_2 = \frac{2a_1}{a_0 - a_1} l$$

Абсолютное значение остаточных деформаций в этих зонах соответственно будет

$$\epsilon_* = -\frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1} (a_0 \epsilon_s - v_0), \quad \epsilon_{**}' = \epsilon_{**} - 2 \left(\frac{a_0}{a_1} - 1 \right) \epsilon_s$$

Увеличивая скорость v_0 , можно рассчитать случаи трех, четырех и т. д. зон постоянных остаточных деформаций.

Можно заметить, что время соударения меняется через интервалы изменения скорости v_0 , кратные $a_0 \epsilon_s$, в то время как число зон постоянных остаточных деформаций меняется внутри этих интервалов.

§ 4. Явление возникновения зон постоянных остаточных деформаций было экспериментально обнаружено Уайтом и Гриффизом^[2]. В этих опытах по концу стержня достаточно большой длины производился удар постоянной интенсивности в течение заданного промежутка времени, после чего удар прекращался (т. е. разгрузка распространялась от места соударения). В такой постановке задача изучена Х. А. Рахматулиным и Г. С. Шапиро^[1], давшими простую и ясную теорию явления.

Эксперименты по удару стержня о неподвижную жесткую преграду описаны Тейлором^[3]. Опыты производились при больших скоростях v_0 (порядка скорости выстрела), так что пренебрегать поперечной скоростью частиц, а также продольной их скоростью по сравнению со скоростью распространения волн нельзя. Образцы в результате удара теряли цилиндрическую форму, сохраняя ее лишь вблизи свободного конца. Однако и в этом случае переход от цилиндрической части к части с остаточными деформациями носит характер явно выраженной ступени.

Поступила в редакцию
29 I 1949

Московский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Шапиро Г. С. ПММ. 1948. т. XII. Вып. 4.
2. White M. P. and Le van Griffis. Journ of Appl. Mech. 1947, №4. Vol. XIV.
3. Taylor G. J. Journ. Inst. of Civil Eng. 1946. № 8.