Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ОТВЕРСТИЙ

В. В. Соколовский

(Москва)

Метод нахождения напряжений в пластических зонах в окрестности отверстий был предложен С. А. Христиановичем для плоского деформированного состояния и автором — для плоского напряженного состояния. Этот метод приводит к краевым задачам для некоторых систем уравнений гиперболического типа, численное решение которых может быть найдено [1].

Настоящая работа посвящена другому приему определения напряжений вокруг отверстий как при плоском деформированном, так и при плоском напряженном состояниях, который основан на применении тригонометрических рядов.

§ 1. Плоское деформированное состояние. Пластическое плоское деформированное состояние описывается компонентами напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}, так как компоненты $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Рассмотрим задачу о распределении напряжений в пластических зонах вокруг отверстия, ограниченного выпуклым гладким контуром, вдоль которого задано равномерно распределенное нормальное давление.

Выведем основные уравнения рассматриваемой задачи.

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

и условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \tag{1.2}$$

причем $k = \sigma_s / \sqrt{3}$ или $k = \sigma_s / 2$, а σ_s — предел текучести при простом растяжении, составляют основную систему уравнений пластического плоского деформированного состояния.

Условие (1.2) удовлетворяется, если ввести новые переменные φ и ω, связанные с компонентами напряжения следующим образом:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = k(\Lambda + 2\omega \pm \cos 2\varphi), \qquad \tau_{xy} = k \sin 2\varphi \tag{1.3}$$

где Λ — произвольная, но наперед выбранная постоянная безразмерная величина, φ — угол между наибольшим (в алгебраическом смысле) главным нормальным напряжением и осью x.

Подставляя выражения (1.3) в уравнения (1.1), получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - \sin 2\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos 2\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} + \cos 2\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

Произведем замену переменных, принимая за аргументы φ и ω, а за искомые функции x и y. Формулами преобразования будут

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial\omega}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial\omega} \tag{1.5}$$

где через Δ обозначен определитель преобразования:

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial\omega}\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\omega}$$

Подставим выражения (1.5) в уравнения (1.4) и введем вместо x, y новые переменные X, Y:

$$\begin{aligned} X &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \qquad & Y &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ x &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \qquad & y &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi \end{aligned} \tag{1.6}$$

Получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial X}{\partial\omega} + \frac{\partial Y}{\partial\varphi} - X = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial\omega} + \frac{\partial X}{\partial\varphi} + Y = 0 \tag{1.7}$$

Будем искать частное решение этих уравнений в виде

$$X = X_n(\omega)\cos(n\varphi + \gamma_n), \qquad Y = Y_n(\omega)\sin(n\varphi + \gamma_n)$$

где γ_n — постоянные величины, а n — целые числа.

Величины X_n и Y_n должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{dX_n}{d\omega} - X_n + nY_n = 0, \qquad \frac{dY_n}{d\omega} + Y_n - nX_n = 0$$

решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} &X_0(\omega) = A_0 e^{+\omega}, \qquad & &Y_0(\omega) = B_0 e^{-\omega} \qquad & &(n = 0) \\ &X_1(\omega) = C_1\omega + A_1, \qquad & &Y_1(\omega) = C_1\omega + B_1 \qquad & &(n = 1) \\ &X_n(\omega) = C_n\cos(m\omega + \alpha_n) \qquad & &Y_n(\omega) = C_n\sin(m\omega + \beta_n) \qquad & &(n \geqslant 2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

причем постоянные A_1, B_1 и α_n, β_n связаны равенствами

$$A_1 - B_1 = C_1, \qquad \beta_n - \alpha_n = \arcsin\frac{1}{n}, \qquad m = \sqrt{n^2 - 1} \tag{1.9}$$

под $\arcsin$ подразумевается его главное значение.

Решения уравнений (1.7), являющиеся периодическими функциями от φ с периодом 2π, могут быть построены следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= A_0 e^{+\omega} + (C_1\omega + A_1)\cos(\varphi + \gamma_1) + \sum_{n=2}^{\infty} C_n\cos(m\omega + \alpha_n)\cos(n\varphi + \gamma_n) \\ Y &= B_0 e^{-\omega} + (C_1\omega + B_1)\sin(\varphi + \gamma_1) + \sum_{n=2}^{\infty} C_n\sin(m\omega + \beta_n)\sin(n\varphi + \gamma_n) \end{aligned} \tag{1.10}$$

где постоянные A_0, B_0, A_1, B_1, C_n, α_n, β_n, γ_n связаны равенствами (1.9).

Выведем контурные условия рассматриваемой задачи. Пусть уравнения гладкого выпуклого контура отверстия даны в виде $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, где α — угол между осью x и касательной t к контуру (фиг. 1); вдоль этого контура задано равномерно распределенное нормальное давление $\sigma_n = -kp$, $\tau_{tn} = 0$, причем $p > 0$.

Вспомним известные формулы преобразования компонентов напряжения при переходе от координат xy к системе tn:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t\\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha \pm \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{tn} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

Эти формулы могут быть в силу формул (1. 3) преобразованы к виду

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t\\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = k[\Lambda + 2\omega \pm \cos 2(\varphi - \alpha)], \qquad \tau_{tn} = k\sin 2(\varphi - \alpha)$$

Решая эти уравнения при $\tau_{tn} = 0$, $\sigma_n = -kp$, найдем

$$\varphi = \alpha + (\varkappa - 1)\frac{\pi}{4} + n\pi, \qquad 2\omega = \varkappa - (\Lambda + p), \qquad \sigma_t = k(2\varkappa - p)$$

где n — произвольное целое число, $\varkappa = \pm 1$.

Контурные значения φ, ω и σ_t при $n = 0$, $\varkappa = +1$, $\Lambda = \varkappa - p$ будут

$$\varphi = \alpha, \qquad \omega = 0, \qquad \sigma_t = k(2 - p)$$

а контурные значения X, Y находятся по формулам (1.6). Имеем

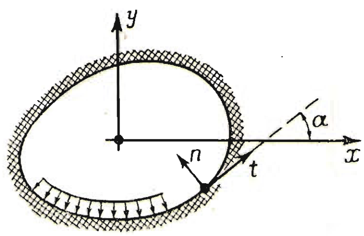
$$X = X(\alpha) = -x(\alpha)\sin\alpha + y(\alpha)\cos\alpha, \qquad Y = Y(\alpha) = x(\alpha)\cos\alpha + y(\alpha)\sin\alpha$$

Так как

$$dx / d\alpha = r\cos\alpha, \quad dy / d\alpha = r\sin\alpha$$

где r — радиус кривизны контура, то

$$Y(\alpha) = -X'(\alpha)$$



Фиг. 1

Предположим что функция $X(\alpha)$ может быть представлена рядом Фурье:

$$X(\alpha) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(n\alpha + c_n)$$

Тогда функция $Y(\alpha)$ найдется из равенства $Y(\alpha) = -X'(\alpha)$. Имеем

$$X(\alpha) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n\cos(n\alpha + c_n), \qquad Y(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} nX_n \sin(n\alpha + c_n) \qquad (1.11)$$

Решение задачи о распределении напряжений дается формулами

$$X = X_0 \exp\omega - \sum_{n=1}^{\infty} nX_n \sin(m\omega - \varepsilon_n)\cos(n\varphi + c_n)$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} nX_n \cos m\omega \sin(n\varphi + c_n) \qquad (1.12)$$

где X_0, X_n, c_n имеют те же значения, как и в формулах (1.11), причем

$$\varepsilon_n = \arcsin\frac{1}{n}, \qquad m = \sqrt{n^2 - 1}$$

Действительно, X и Y суть периодические функции с периодом 2π, а вдоль контура $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, т. е. при $\omega = 0$, $\varphi = \alpha$ правые части (1.11) и (1.12) совпадают.

Если оси x и y являются осями симметрии контура $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, то функция $X(\alpha)$ будет четной, т. е. $X(-\alpha) = X(\alpha)$; при этом в формулах (1.11) и (1.12) все постоянные $c_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим овальный контур

$$x = +[a + b(\cos 2\alpha + 2)]\sin\alpha, \quad y = -[a + b(\cos 2\alpha - 2)]\cos\alpha \tag{1.13}$$

весьма близкий к эллипсу с полуосями $a + b$ и $a - b$. Вдоль контура

$$X(\alpha) = -a + b\cos 2\alpha, \quad Y(\alpha) = 2b\sin 2\alpha$$

Решение задачи дается формулами (1.14)

$$-X = a\exp\omega + 2b\sin\left(\sqrt{3}\,\omega - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi, \qquad Y = 2b\cos(\sqrt{3}\,\omega)\sin 2\varphi$$

Заметим, что функции (1.10) удовлетворяют уравнениям (1.7) при любом значении n. Отсюда легко получить различные частные решения уравнений пластичности.

Примером может служить частное решение, соответствующее $n = 1$:

$$X = (C_1\omega + A_1)\sin\varphi, \qquad Y = -(C_1\omega + A_1 - C_1)\cos\varphi$$

взятое при $\gamma_1 = -\pi/2$.

Это решение на основании (1.3) и (1.6) после введения обозначений

$$A = \frac{2}{C_1} \qquad B = \Lambda + 1 - \frac{2A_1}{C_1}$$

приводит к известным формулам А. Надаи

$$\sigma_x = k(B - Ax + \varkappa 2\sqrt{1 - A^2y^2}), \qquad \sigma_y = k(B - Ax), \qquad \tau_{xy} = kAy$$

где A и B — постоянные интегрирования, $\varkappa = \pm 1$.

§ 2. Плоское напряженное состояние. Пластическое плоское напряженное состояние описывается компонентами напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}, так как компоненты $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Рассмотрим пластическое состояние, вызываемое растягивающими напряжениями на бесконечности, пластинки с отверстием, ограниченным произвольным гладким выпуклым контуром, когда вдоль этого контура приложено равномерное нормальное давление. Исследование напряженного состояния проведем на основе теории пластичности Сен-Венана.

Выведем основные уравнения поставленной задачи.

Уравнения равновесия (1.1) и условие пластичности Сен-Венана, полученное в работах [1, 2],

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \qquad \text{при} \quad \sigma_x\sigma_y \leqslant \tau_{xy}^2 \tag{2.1}$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (2\sigma_s - |\sigma_x + \sigma_y|)^2 \qquad \text{при} \quad \sigma_x\sigma_y \geqslant \tau_{xy}^2 \tag{2.2}$$

составляют систему уравнений плоского напряженного состояния.

Система уравнений (1.1) и (2.1) совпадает с уравнениями пластического плоского деформированного состояния (1.1) и (1.2) при $k = \sigma_s/2$, изученными в § 1; система уравнений (1.1) и (2.2) рассмотрена ниже.

Условие (2. 2) тождественно удовлетворяется, если ввести новые переменные φ и χ, связанные с компонентами напряжения соотношениями

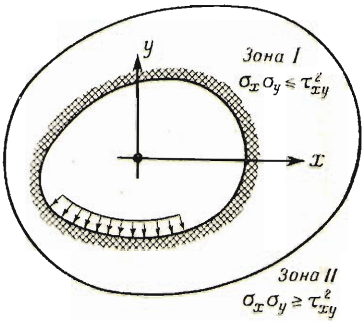
$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \sigma_s [\varkappa (1 - \chi) \pm \chi \cos 2\varphi], \qquad \tau_{xy} = \sigma_s \chi \sin 2\varphi \tag{2.3}$$

$$(\varkappa = \operatorname{sign} \sigma_x = \operatorname{sign} \sigma_y)$$

где φ — угол между наибольшим главным нормальным напряжением и осью x. Подставляя эти выражения в уравнение (1. 1), получим[1]

$$\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (\varkappa + \cos 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

$$\sin 2\varphi \frac{\partial \chi}{\partial x} - (\varkappa + \cos 2\varphi) \frac{\partial \chi}{\partial y} + \varkappa 2\chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$



Фиг. 2

Произведем замену переменных, принимая за аргументы φ и ω, а за искомые функции x, y. Подставим выражения (1. 5) в уравнения (2. 4) и введем вместо x, y переменные X, Y, согласно (1. 6). Получим

$$\frac{\partial Y}{\partial \chi} = 0, \qquad \chi \frac{\partial X}{\partial \chi} + X - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{при} \quad \varkappa = +1$$

$$\frac{\partial X}{\partial \chi} = 0, \qquad \chi \frac{\partial Y}{\partial \chi} + Y + \frac{\partial X}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{при} \quad \varkappa = -1$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$X = \frac{\Phi(\varphi)}{\chi} + Y'(\varphi), \qquad Y = Y(\varphi) \qquad \text{при} \quad \varkappa = +1 \tag{2.5}$$

$$Y = \frac{\Psi(\varphi)}{\chi} - X'(\varphi), \qquad X = X(\varphi) \qquad \text{при} \quad \varkappa = -1 \tag{2.6}$$

Выведем контурные условия поставленной задачи.

Пусть уравнения гладкого выпуклого контура отверстия попрежнему даны в виде $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, где α — угол между осью x и касательной t к контуру (фиг. 2); вдоль контура приложено равномерное нормальное давление $\sigma_n = -kp$, $\tau_{tn} = 0$, причем $p > 0$.

При пластическом напряженном состоянии пластинки будут иметь место две зоны: в некоторой зоне I вблизи отверстия $\sigma_x \sigma_y \leqslant \tau_{xy}^2$ и напряженное состояние описывается уравнениями (1. 1) и (2. 1); во внешней зоне II вдали от отверстия $\sigma_x \sigma_y \geqslant \tau_{xy}^2$ и напряженное состояние определяется уравнениями (1. 1) и (2. 2).

На границе этих зон все компоненты напряжения непрерывны. Приравнивая компоненты σ_x, σ_y и τ_{xy}, определенные формулами (1. 3), в которых $k = \sigma_s / 2$, и формулами (2.3), найдем

$$2\omega = \varkappa - \Lambda, \qquad 2\chi = 1, \qquad \varphi_{II} = \varphi_I + n\pi$$

где n — произвольное целое число.

---

[1] Интегралы этих уравнения были получены автором ранее [1].

Значения ω, χ на границе между зонами I и II при $n=0$, будут

$$2\omega = p, \qquad 2\chi = 1$$

Решение задачи о распределении напряжений в зоне I, где $\sigma_x\sigma_y \leqslant \tau_{xy}^2$, определяется формулами (1.3) и (1.12) при $k=\sigma_s/2$, причем вдоль границы зоны I и II

$$X = X_0 \exp\frac{p}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} nX_n \sin\left(\frac{mp}{2} - \varepsilon_n\right)\cos(n\varphi + c_n)$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} nX_n \cos\frac{mp}{2}\sin(n\varphi + c_n) \tag{2.7}$$

Уравнение границы на плоскости xy в параметрической форме получится, если подставить выражения (2.7) в формулы (1.6).

Решение задачи о распределении напряжений в зоне II, где $\sigma_x\sigma_y \geqslant \tau_{xy}^2$, дается (2.3) и (2.5), причем произвольные функции $Y(\varphi)$ и $\Phi(\varphi)$ находятся из сравнения X и Y в формулах (2.7) и (2.5) при $2\chi = 1$. Имеем

$$X = \frac{X_0}{2\chi}\exp\frac{p}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} nX_n \left\{n\cos\frac{mp}{2} - \frac{m}{2\chi}\cos\left(\frac{mp}{2} - \varepsilon_n\right)\right\}\cos(n\varphi + c_n)$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} nX_n \cos\frac{mp}{2}\sin(n\varphi + c_n) \tag{2.8}$$

Если оси x и y являются осями симметрии контура $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, то все постоянные $c_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим овальный контур (1.13). Решение задачи о распределении напряжений в зоне I, где $\sigma_x\sigma_y \leqslant \tau_{xy}^2$, определяется формулами (1.3) и (1.14) при $k = \sigma_s/2$, причем вдоль границы зоны I и зоны II будет

$$-X = a\exp\frac{p}{2} + 2b\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,p}{2\chi} - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi, \qquad Y = 2b\cos\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\sin 2\varphi \tag{2.9}$$

Уравнение границы на плоскости xy получится в результате подстановки выражений (2.9) в формулы (1.6).

Решение задачи о распределении напряжений в зоне II, где $\sigma_x\sigma_y \geqslant \tau_{xy}^2$, имеет вид

$$-X = \frac{a}{2\chi}\exp\frac{p}{2} + 2b\left[\frac{\sqrt{3}}{2\chi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,p}{2\chi} - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right]\cos 2\varphi$$

$$Y = 2b\cos\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\sin 2\varphi \tag{2.10}$$

В заключение отметим, что изложенный прием определения напряжений, основанный на применении тригонометрических рядов, можно применить также при решении других плоских задач теории пластичности.

Поступила в редакцию
18 I 1949

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности Изд. АН СССР. 1946.

2. Соколовский В. В. Пластическое равновесие при плоском напряженном состоянии по Сен-Венану. ПММ. 1946. т. X, вып. 2.