

МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ КОЛЬЦЕВОМ ДИСКЕ ОТ ДВУХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Д. В. Вайнберг

(Киев)

1. При решении некоторых задач, связанных с распределением напряжений в плоских дисках, состоящих из концентрических областей, возник вопрос о местных возмущениях силового поля в окрестности действия сосредоточенных сил.

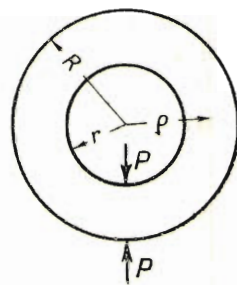
Рассмотрим плоский кольцевой диск (внешний радиус R , внутренний r), сжатый двумя сосредоточенными силами (фиг. 1).

Решение плоской задачи теории упругости для изотропной среды приводится, как известно, к нахождению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = \rho e^{i\theta}$ по известным условиям на границе области. Напомним основные зависимости. Напряжения σ_r , σ_θ , τ , отнесенные к полярным координатам, выражаются через упомянутые функции следующим образом:

$$\sigma_r - i\tau = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - e^{2i\theta} [z\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (1.1)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})] \quad (1.2)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\theta} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Будем предполагать, что к наружному и к внутреннему контурам кольца приложены напряжения, нормальная и касательная составляющие которых могут быть представлены в виде рядов

$$\sigma_r - i\tau = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ikh\theta} \quad \text{при } |z| = R, \quad \sigma_r - i\tau = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ikh\theta} \quad \text{при } |z| = r \quad (1.4)$$

Коэффициенты A_k и B_k определяются характером заданной нагрузки.

2. Искомые голоморфные внутри кольца $r < \rho < R$ функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ представим рядами Лорана:

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_k z^k \quad (2.1)$$

Имея в виду двухсвязный характер рассматриваемой области, мы опустили в правой части (2.1) члены, содержащие $\log z$.

Рассматриваемую краевую задачу можно сформулировать так:
 ищем образом:

$$\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - e^{2i\theta} [z\Phi'(z) + \Psi(z)] = \begin{cases} \sum A_k e^{ikh\theta} & \text{при } |z| = R \\ \sum B_k e^{ikh\theta} & \text{при } |z| = r \end{cases} \quad (2.2)$$

Пользуясь (2.1), перепишем (2.2) в таком виде:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} [(1-k)a_k R^k + \bar{a}_{-k} R^{-k} - a'_{k-2} R^{k-2}] e^{ikh\theta} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ikh\theta} \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} [(1-k)a_k r^k + \bar{a}_{-k} r^{-k} - a'_{k-2} r^{k-2}] e^{ikh\theta} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ikh\theta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Формулы для радиальных u и касательных v перемещений будут

$$2G(u + iv) = e^{-i\theta} [\chi\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})] \quad (2.4)$$

где $\chi = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния, G — модуль сдвига и

$$\varphi(z) = \int \Phi(z) dz, \quad \psi = \int \Psi(z) dz \quad (2.5)$$

Пользуясь (2.1), а также (2.5), представим (2.4) в виде

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\chi \frac{\chi}{k+1} a_k \rho^k - \bar{a}_{-k} \rho^{-k} + \frac{1}{k+1} \bar{a}'_{-k-2} \rho^{-k-2} \right] e^{ikh\theta} + \\ &+ [\chi a_{-1} \log r + i\chi a_{-1} \theta - \bar{a}'_{-1} \log r + i\bar{a}'_{-1} \theta + \chi\alpha - \bar{\alpha}'] e^{i\theta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где α и $\bar{\alpha}'$ — некоторые постоянные.

Определим коэффициенты рядов a_k , a'_k . Приравнявая в (2.3) свободные члены в правой и левой частях, получим систему уравнений

$$a_0 + \bar{a}_0 - a'_{-2} R^{-2} = A_0, \quad a_0 + \bar{a}_0 - a'_{-2} r^{-2} = B_0 \quad (2.7)$$

Можно положить $a_0 = \bar{a}_0$, т. е. считать a_0 вещественной величиной, так как член вида Ci (при C вещественном) в выражении $\Phi(z)$ не оказывает влияния на напряженное состояние. Из (2.7) получим

$$a_0 = \frac{A_0 \xi^{-2} - B_0}{2(\xi^{-2} - 1)}, \quad a'_{-2} = \frac{A_0 - B_0}{\xi^{-2} - 1} \quad \left(\xi = \frac{r}{R} \right) \quad (2.8)$$

Приравнявая в (2.3) коэффициенты при членах, содержащих $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$, получим

$$\bar{a}_{-1} - a'_{-1} = A_1 R, \quad \bar{a}_{-1} - a'_{-1} = B_1 r \quad (2.9)$$

$$2\bar{a}_{-1} R^{-1} + a_1 R - \bar{a}'_{-3} R^{-3} = \bar{A}_{-1}, \quad 2\bar{a}_{-1} r^{-1} + a_1 r - \bar{a}'_{-3} r^{-3} = \bar{B}_{-1} \quad (2.10)$$

Из первых уравнений (2.9) системы вытекает

$$A_1 R - B_1 r = 0 \quad (2.11)$$

Нетрудно показать, что эта зависимость означает равенство нулю главного вектора приложенных сил. Присоединим к системе (2.9), (2.10) недостающее уравнение, требуя однозначность перемещений точек многосвязной области. Согласно (2.6) для этого нужно положить

$$\chi \bar{a}_{-1} + a'_{-1} = 0 \quad (2.12)$$

Из первого уравнения (2.9) и (2.12) найдем

$$\frac{1}{R} \bar{a}_{-1} = \frac{A_1}{1 + \chi}, \quad \frac{1}{R} a'_{-1} = -\frac{\chi A_1}{1 + \chi} \quad (2.13)$$

Далее из (2.10) на основании (2.13) получим

$$\frac{1}{R^3} \bar{a}'_{-3} = \frac{1}{\xi^{-4}-1} \left[\bar{A}_{-1} + \bar{B}_{-1} \xi^{-1} + \frac{2}{1+\chi} (B_1 \xi^{-1} - A_1) \right] \quad (2.14)$$

$$Ra_1 = \frac{1}{\xi^{-4}-1} \left[\xi^{-4} \bar{A}_{-1} - \xi^{-1} \bar{B}_{-1} + \frac{2}{1+\chi} (B_1 \xi^{-1} - A_1 \xi^{-4}) \right]$$

Для остальных значений $k \geq 2$ из (2.3) имеем системы уравнений

$$\begin{aligned} (1-k)a_k R^k + \bar{a}_{-k} R^{-k} - a'_{k-2} R^{k-2} &= A_k \\ (1+k)\bar{a}_{-k} R^{-k} + a_k R^k - a'_{-k-2} R^{-k-2} &= \bar{A}_{-k} \\ (1-k)a_k r^k + \bar{a}_{-k} r^{-k} - a'_{k-2} r^{k-2} &= B_k \\ (1+k)\bar{a}_{-k} r^{-k} + a_k r^k - a'_{-k-2} r^{-k-2} &= \bar{B}_{-k} \end{aligned} \quad (2.15)$$

В результате решения системы (2.15) имеем

$$a_k R^k = \frac{(A_k - B_k \xi^{-k+2})(1+k)(1-\xi^2) - (\bar{A}_k - \bar{B}_{-k} \xi^{k+2})(1-\xi^{-2k+2})}{\xi^2[(\xi^{-k} - \xi^k) - k(\xi^{-1} - \xi)]L(\xi, k)}$$

$$\bar{a}_{-k} R^{-k} = \frac{(1-k)(1-\xi^2)(\bar{A}_{-k} - \bar{B}_{-k} \xi^{k+2}) - (A_k - B_k \xi^{k+2})(1-\xi^{-2k+2})}{\xi^2[(\xi^{-k} - \xi^k) - k(\xi^{-1} - \xi)]L(\xi, k)}$$

$$a'_{k-2} R^{k-2} = (1-k)R^k a_k + \bar{a}_{-k} R^{-k} - A_k \quad (2.16)$$

$$a'_{-k-2} R^{-k-2} = (1+k)R^{-k} \bar{a}_{-k} + a_k R^k - \bar{A}_{-k}$$

где

$$L(\xi, k) = \xi^{-k} - \xi^k + k(\xi^{-1} - \xi) \quad (2.17)$$

Если к границам области приложены нагрузки, имеющие только нормальные составляющие, то в разложении в ряд имеет место зависимость

$$A_k = \bar{A}_{-k}, \quad B_k = \bar{B}_{-k} \quad (2.18)$$

При касательных нагрузках имеет место

$$A_k = -\bar{A}_{-k}, \quad B_k = -\bar{B}_{-k} \quad (2.19)$$

3. Для решения задачи о действии двух сосредоточенных сил P (фиг. 1) заменим эти силы радиальной нагрузкой, равномерно распределенной на небольших участках 2β дуги и имеющей интенсивность $P/2R\beta$ для наружного контура и $P/2r\beta$ для внутренней окружности.

Нагрузку на внешнем контуре R

$$\sigma_r - i\tau = \begin{cases} P/2R\beta & \text{при } -\beta \leq \theta \leq \beta \\ 0 & \text{при } \beta \leq \theta \leq 2\pi - \beta \end{cases} \quad (3.1)$$

разложим в ряд Фурье $\sum A_k e^{ik\theta}$. Определим коэффициенты ряда

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{P}{R\beta} e^{ik\theta} d\theta = \frac{P}{2\pi R\beta} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{ik\theta} d\theta = \frac{P}{2\pi R} \frac{\sin k\beta}{k\beta} \quad (3.2)$$

Принимая во внимание, что в случае действия на контур напряжений, имеющих только нормальную составляющую, $A_{-k} = A_k$, представим эту нагрузку рядом

$$\frac{P}{2\pi R} \sum_{0,1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin k\beta}{k\beta} e^{ik\theta} \quad (3.3)$$

Аналогично найдем коэффициенты B_k ряда, представляющего нагрузку на внутреннем контуре.

Если устремить β к нулю, то в пределе получим коэффициенты разложения сосредоточенных сил в тригонометрический ряд

$$A_k = \frac{P}{2\pi R}, \quad B_k = \frac{P}{2\pi r} \quad (3.4)$$

Чтобы получить формулы для напряжений в рассматриваемом случае, следует обратиться к формулам (1.1) — (1.3) и (2.1).

Величины коэффициентов a_k и a_k' определяются согласно (2.8), (2.13), (2.14) и (2.16), причем коэффициенты A_k и B_k должны быть заменены их значениями из (3.4) с учетом зависимостей (2.18).

Разделяя действительные и мнимые части и полагая $\rho/R = \eta$, имеем для суммы нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_\theta + \sigma_r = & \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{1}{2(1+\xi)} + \frac{\cos \theta}{1+\kappa} \left[\frac{\kappa-1}{1+\xi^2} \eta + \frac{1}{\eta} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{L(\xi, k)} [(\xi^{-k} - \xi^{-1}) \eta^k + (\xi^{-1} - \xi^k) \eta^{-k}] \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

для разности нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r = & \frac{P}{\pi R} \left\{ -\frac{\xi}{1+\xi} \frac{1}{\eta^2} + \frac{\cos \theta}{(1+\kappa)(1+\xi^2)} \left[(\kappa-1) \left(\eta - \frac{\xi^2}{\eta^3} \right) - (\kappa+1) \frac{1+\xi^2}{\eta} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} \frac{k \cos k\theta}{L(\xi, k)} [(\xi^{-k} - \xi^{-1}) \eta^k - (\xi^{-1} - \xi^k) \eta^k - (\xi^{-k} - \xi) \eta^{k-2} + \right. \\ & \left. + (\xi - \xi^k) \eta^{-k-2}] \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

для касательных напряжений

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{P}{2\pi R} \left\{ \frac{(\kappa-1) \sin \theta}{(\kappa+1)(1+\xi^2)} \left[\eta - \frac{1+\xi^2}{\eta} + \frac{\xi^2}{\eta^3} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} \frac{k \sin k\theta}{L(\xi, k)} [(\xi^{-k} - \xi^{-1}) \eta^k + (\xi^{-1} - \xi^k) \eta^{-k} - (\xi^{-k} - \xi) \eta^{k-2} - \right. \\ & \left. - (\xi - \xi^k) \eta^{-k-2}] \right\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Полученные формулы для напряжений в таком виде не пригодны для вычислений. Действительно, анализируя бесконечные суммы, входящие в выражения (3.5) — (3.7), нетрудно убедиться, что эти ряды обладают весьма слабой сходимостью. Более того, в окрестности точек $(\theta = 0, \eta = 1)$ и $(\theta = 0, \eta = \xi)$ эти ряды, вообще говоря, расходятся.

Попытаемся устранить затруднения, возникающие в решении благодаря наличию полюсов в местах приложения сосредоточенных сил. Для этого выделим в бесконечных суммах, входящих в выражения (3.5) — (3.7), главные члены, соответствующие этим особенностям.

Имея в виду, что $\xi < 1$, и приняв во внимание вид знаменателя (2.17), входящего в члены ряда, можно прийти к заключению, что в числителе, под знаком суммы, желательно освободиться от членов вида ξ^{-k} .

Начнем с формулы (3.5) Присоединим к первой части этого выражения два ряда, которые суммируются в замкнутой форме:

$$-\frac{2P}{\pi R} \sum_{k=0,1,2,\dots}^{\infty} \eta^k \cos k\theta = -\frac{2P}{\pi R} \frac{1 - \eta \cos \theta}{1 - 2\eta \cos \theta + \eta^2} \quad (3.8)$$

$$\frac{2P}{\pi R} \sum_{k=0,1,2,\dots}^{\infty} \xi^{k-1} \eta^k \cos k\theta = -\frac{2P}{\pi R} \frac{\xi - \eta \cos \theta}{\xi^2 - 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2} \quad (3.9)$$

Объединив ряды (3.8) с бесконечной суммой, стоящей в правой части (3.5), мы не только добьемся сходимости выражения для суммы нормальных напряжений, но и выделим из бесконечного ряда его особенности в замкнутой форме. Приводим окончательную формулу:

$$\sigma_\theta + \sigma_r = -\frac{2P}{\pi R} \left(\frac{1 + 2\xi}{2(1 + \xi)} + \frac{\cos \theta}{1 + \alpha} \left[\frac{\alpha}{\eta} + \frac{2 + \xi^2(1 + \alpha)}{1 + \xi^2} \eta \right] + \frac{\eta \cos \theta - 1}{1 - 2\eta \cos \theta + \eta^2} + \frac{\xi - \eta \cos \theta}{\xi^2 - 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2} \right) \quad (3.10)$$

$$- \sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{L(\xi, k)} \{ [\xi^k - \xi^{-1} - k(\xi^{-1} - \xi)] \eta^k + [\xi^k - \xi - k(\xi^{-1} - \xi)] \xi^{k-1} \eta^k \}$$

Аналогичную трансформацию произведем с формулой (3.6) для разности нормальных напряжений. Воспользуемся суммируемыми рядами

$$\begin{aligned} \frac{P}{\pi R} \left[\sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} k(\eta^{k-2} - \eta^k) \cos k\theta - \eta \cos \theta \right] &= \frac{2P}{\pi R} \frac{(1 - \eta \cos \theta)(\cos 2\theta - 2\eta \cos \theta + \eta^2)}{(1 - 2\eta \cos \theta + \eta^2)^2} \\ - \frac{P}{\pi R} \left[\sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} k(\xi^{k+1} \eta^{-k-2} - \xi^{k-1} \eta^{-k}) \cos k\theta - \frac{2}{\eta} \cos \theta \left(1 - \frac{\xi^2}{2\eta^2} \right) \right] &= \\ = -\frac{2P}{\pi R} \frac{(\xi - \eta \cos \theta)(\xi^2 \cos 2\theta + 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2)}{(\xi^2 - 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2)^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Присоединим к правой части (3.6) ряды, стоящие в левых частях (3.11) и их правые части с обратными знаками. Получим

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r &= \frac{P}{\pi R} \left(-\frac{\xi}{1 + \xi} \frac{1}{\eta^2} + \cos \theta \left[\frac{1}{\eta} - 2\eta + \left(\eta - \frac{\xi^2}{\eta^3} \right) \frac{2\alpha + \xi^2(1 + \alpha)}{(1 + \alpha)(1 + \xi^2)} \right] - \right. \\ &- \frac{2(1 - \eta \cos \theta)(\cos 2\theta - 2\eta \cos \theta + \eta^2)}{(1 - 2\eta \cos \theta + \eta^2)^2} + \frac{2(\xi - \eta \cos \theta)(\xi^2 \cos 2\theta - 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2)}{(\xi^2 - 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2)^2} + \\ &+ \sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} \frac{k \cos k\theta}{L(\xi, k)} \{ [\xi^k - \xi^{-1} - k(\xi^{-1} - \xi)] [\eta^k + \xi^{k+1} \eta^{-k-2}] - \\ &\left. - [\xi^k - \xi - k(\xi^{-1} - \xi)] [\xi^{k-1} \eta^{-k} + \eta^{k-2}] \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

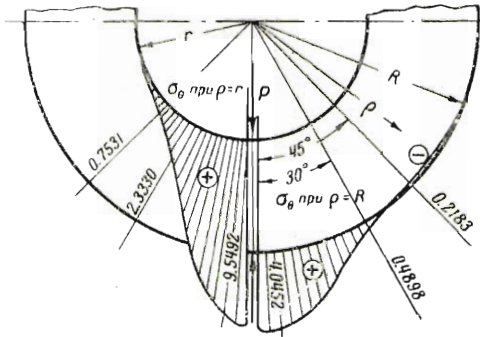
Аналогично преобразуем формулу (3.7), пользуясь рядами

$$\begin{aligned} -\frac{P}{2\pi R} \left[\sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} k(\eta^{k-2} - \eta^k) \sin k\theta - \eta \sin \theta \right] &= \frac{2P}{\pi R} \frac{\sin \theta (1 - \eta \cos \theta)(\eta - \cos \theta)}{(1 - 2\eta \cos \theta + \eta^2)^2} \\ \frac{P}{2\pi R} \left[\sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} k(\xi^{k+1} \eta^{-k-2} - \xi^{k-1} \eta^{-k}) \sin k\theta + \frac{\xi^2}{\eta^3} \sin \theta \right] &= \\ = \frac{2P}{\pi R} \frac{\xi \sin \theta (\xi - \eta \cos \theta)(\eta - \xi \cos \theta)}{(\xi^2 - 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2)^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выражение для касательных напряжений примет вид

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{P}{2\pi R} \left(\left[\frac{2\chi + \xi^2(1+\chi)}{(1+\chi)(1+\xi^2)} \left(\eta + \frac{\xi^2}{\eta^3} \right) - \frac{\chi-1}{\chi+1} \frac{1}{\eta} + 2\eta \right] \sin \theta + \right. \\ & + \frac{4 \sin \theta (1 - \eta \cos \theta) (\eta - \cos \theta)}{(1 - 2\eta \cos \theta + \eta^2)^2} - \frac{4\xi \sin \theta (\xi - \eta \cos \theta) (\eta - \xi \cos \theta)}{(\xi^2 - 2\xi\eta \cos \theta + \eta^2)^2} + \\ & + \sum_{k=2,3,\dots}^{\infty} \frac{k \sin k\theta}{L(\xi, k)} \{ [\xi^k - \xi^{-1} - k(\xi^{-1} - \xi)] [\eta^k - \xi^{k+1} \eta^{-k-2}] + \\ & \left. + [\xi^k - \xi - k(\xi^{-1} - \xi)] [\xi^{k-1} \eta^{-k} - \eta^{k-2}] \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Составленные формулы (3.10), (3.12) и (3.14) позволяют исследовать напряженное состояние кольцевого плоского диска при действии двух сжимающих сил P .



Фиг. 2

В заключение обратим внимание на особенности полученных решений. Выражения для напряжений имеют два полюса ($\theta = 0$, $\eta = \rho/R = 1$) и ($\theta = 0$, $\eta = \xi = r/R$), совпадающие с точками приложения сил.

Если в выражении (3.10) и (3.12) для напряжений преобразовать члены, отражающие выделенные особенности, к новым началам полярных координат, совпадающим соответственно с точками приложения сил, то можно убедиться, что эти члены выражают так называемое «простое радиальное» распределение напряжений в полюсах на границе.

В табл. 1 приведены значения коэффициентов α_θ и α_r в выражениях

$$\sigma_\theta = \alpha_\theta \frac{P}{\pi R}, \quad \sigma_r = \alpha_r \frac{P}{\pi R} \quad (3.15)$$

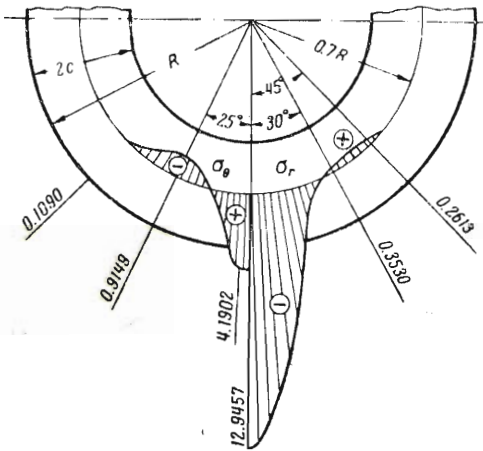
для трех окружностей при разных значениях θ .

Таблица 1

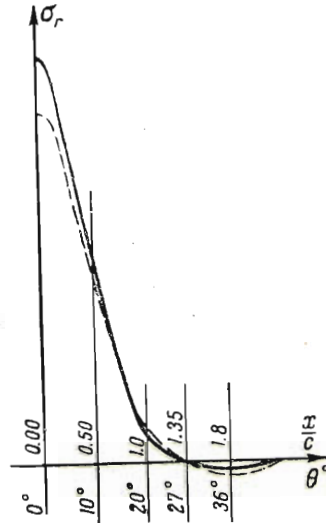
θ°	$\eta = 0.5$	$\eta = 0.7$		$\eta = 1$
	$\alpha_\theta (\alpha_r = 0)$	α_r	α_θ	$\alpha_\theta (\alpha_r = 0)$
0	—	—	—	—
2	11.5492	-12.9458	4.1902	5.7152
5	9.5490	-10.1651	2.1710	4.0452
10	8.2763	-6.4278	0.6137	3.5119
15	6.6092	-3.0137	-0.4557	2.5862
20	4.8995	-0.8495	-0.8953	1.7098
25	3.5069	-0.0031	-0.9149	0.9193
30	2.3330	+0.3530	-0.6600	0.4998
45	0.7531	+0.2613	-0.1091	-0.2183
90	0.1895	—	-0.0349	-0.1871

На фиг. 2 и 3 показаны эпюры нормальных напряжений на трех окружностях при $\xi = 0.5$

На фиг. 4 построена половина эпюры напряжений σ_r на выпрямленной оси кольцевого диска и для сравнения рядом нанесена пунктиром кривая σ_r для бесконечной полосы, также сжатой двумя силами. Ширина $2h$ полосы принята та же, что и кольца. Обратим внимание на особо резкое возмущение силового поля на внутреннем контуре кольца, что объясняется влиянием кривизны.



Фиг. 3



Фиг. 4

4. Известный интерес представляет переход к задаче о бесконечной полосе (фиг. 5), решение которой было дано в разное время Файлоном, Бельзецким, Тимпе, Месмером, Зеевальдом, Баем, Маргером и др.

Сделаем предельный переход в формулах (3.5), (3.6) и (3.7).

Введем **прямоугольную** систему координат (фиг. 5). Задача заключается, таким образом, в том, чтобы, устремив кривизну кольца к нулю, совершить переход к новым осям и преобразовать напряжения σ_r к σ_y и σ_θ к σ_x . Воспользуемся очевидными зависимостями

$$\rho = R - (h + y) = \frac{1}{2}(R + r) - y = r + (h - y)$$

$$\eta = \frac{\rho}{R} = 1 - \frac{h + y}{R}, \quad \xi = \frac{r}{R} = 1 - \frac{2h}{R}, \quad \rho_0 = \frac{R + r}{2}, \quad \theta = \frac{x}{\rho_0} \quad (4.1)$$

Кроме того, введем следующий параметр:

$$\frac{hk}{\rho_0} = u, \quad \frac{h}{\rho_0} = du \quad \text{при } \rho_0 \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

Тогда

$$k\theta = \frac{kx}{\rho_0} = \frac{xu}{h} \quad \text{при } \rho_0 \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

Обратимся к выражению (2.17) для знаменателя $L(\xi, k)$, входящего в равенства (3.5) и (3.7). Рассмотрим отдельные его члены. Для второго члена имеем

$$\xi^k = \left(1 - \frac{2h}{R}\right)^k = \left[\left(1 - \frac{2h}{R}\right)^{-R/2h}\right]^{-2hk/R} \rightarrow e^{-2kh/R}$$

Совершенно аналогично найдем что $e^{-k} \rightarrow e^{2kh/R}$. Следовательно, согласно (4.2) имеем

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} (\xi^{-k} - \xi^k) = 2 \operatorname{sh} 2u$$

Далее

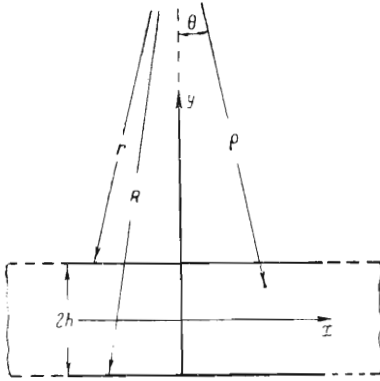
$$\xi^{-1} - \xi = \frac{R^2 - r^2}{Rr} = \frac{4\rho_0 h}{Rr}$$

Так как $\lim(Rr) = \rho_0^2$, то

$$\lim k(\xi^{-1} - \xi) = 4u$$

Окончательно

$$\lim L(\xi, k) = 2(\operatorname{sh} 2u + 2u)$$



Фиг. 5

Переходим к числителю формул (3.5) — (3.7). На основании (4.3)

$$\cos k\theta \rightarrow \cos \frac{xu}{b} \quad \text{при } \rho_0 \rightarrow \infty$$

Далее

$$\xi^{-k} \eta^k = \left(\frac{\rho}{R}\right)^k = \left(1 + \frac{h-y}{r}\right)^k = \left[\left(1 + \frac{h-y}{r}\right)^{hr/(h-y)}\right]^{k(h-y)/r} \rightarrow e^{k(h-y)/r}$$

Теперь нетрудно показать, что

$$\xi^{-k} \eta^k - \xi^k \eta^{-k} \rightarrow 2 \operatorname{sh} \frac{k(h-y)}{r} \quad \text{при } \rho_0 \rightarrow \infty$$

Аналогичные преобразования следует произвести над остальными членами, входящими в выражения (3.5), (3.6) и (3.7). Опуская выкладки, приводим окончательные результаты;

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{4P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \operatorname{ch} \frac{uy}{h} \cos \frac{xu}{h} du$$

$$\sigma_x - \sigma_y = -\frac{4P}{\pi h} \left\{ \frac{u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \operatorname{ch} \frac{uy}{h} \cos \frac{ux}{h} du - \frac{y}{h} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \operatorname{sh} \frac{uy}{h} \cos \frac{ux}{h} du \right.$$

$$\left. \tau_{xy} = \frac{2P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \operatorname{sh} \frac{uy}{h} \sin \frac{ux}{h} du - \frac{2Py}{\pi h^2} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \operatorname{ch} \frac{uy}{h} \sin \frac{ux}{h} du \right.$$

Полученные формулы в точности совпадают с известным решением для бесконечной полосы.

Поступила в редакцию

21 IV 1947