Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Н. Марков

(Горький)

В работе исследуется динамическая устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек под действием пульсирующих сил.

Вопросу динамической устойчивости были посвящены работы Н. М. Беляева [1], Б. А. Боднера [2], В. Н. Челомея [3].

При исследовании используется приближенная теория Лява [4]; при этом принимается, что с достаточной для практики точностью изменения кривизны выражаются только через смещение w. Правильность последнего допущения подтверждается тем, что из полученных формул для критических сил как частный случай получаются известные формулы Мизеса, Тимошенко [5] и др.

1. Основные уравнения для цилиндрической оболочки. Будем пользоваться криволинейными координатами x и s соответственно вдоль образующей и вдоль направляющей цилиндра.

Пусть u, v, w — компоненты смещения вдоль образующей, по направляющей и по нормали к поверхности, R — радиус кривизны, $2h$ — толщина, l — длина оболочки, ρ — плотность, G — модуль сдвига.

В дальнейшем будем все величины вдоль координатных линий x обозначать индексом 1, вдоль координатных линий s индексом 2. Таким образом, например, E_1, E_2 и σ_1, σ_2 будут модули Юнга и коэффициенты Пуассона соответственно по образующей и по направляющей.

Определим следующие дифференциальные операторы:

$$\nabla_0^2 = E_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + E_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad E_0 = 2G(1-\sigma_1\sigma_2) + E_2\sigma_1$$

$$\nabla_1^4 = E_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + E_4 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2} + E_2 \frac{\partial^4}{\partial s^4}, \qquad E_4 = \frac{E_1 E_2}{G} - E_1\sigma_2 - E_2\sigma_1 \tag{1.1}$$

$$\nabla_2^4 = E_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + E_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2} + E_2 \frac{\partial^4}{\partial s^4}, \qquad E_3 = 4G(1-\sigma_1\sigma_2) + E_1\sigma_2 + E_2\sigma_1$$

Рассмотрим поперечные колебания тонких оболочек, подверженных с торцов действию распределенных по направляющей срединной поверхности осевых периодических сил $P = P(t)$ и действию периодической равномерно распределенной по внешней (или внутренней) поверхности поперечной нагрузки $q = q(t)$. Ограничиваясь малыми колебаниями, уравнения поперечных колебаний оболочки получим в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial S_2}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} - \frac{N_2}{R} = 0$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} + \frac{T_2}{R} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

$$N_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial s}, \qquad N_2 = \frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial H_1}{\partial x}$$

Для усилий и моментов (учитывая, что упругие свойства оболочки вдоль направляющей и вдоль образующей различны) имеем (1.3)

$$T_1 = \frac{2E_1h}{1-\sigma_1\sigma_2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right)\right], \quad T_2 = \frac{2E_2h}{1-\sigma_1\sigma_2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right) + \sigma_2\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$S_1 = \frac{E_1h}{1+\sigma_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\right), \qquad S_2 = -\frac{E_2h}{1+\sigma_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$G_1 = -\frac{2E_1h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_1\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right), \qquad G_2 = -\frac{2E_2h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \sigma_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$H_1 = \frac{2E_1h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)}(1-\sigma_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial s}, \qquad H_2 = -\frac{2E_2h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)}(1-\sigma_2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial s}$$

Подставляя (1.3) в уравнения колебания (1.2) и исключая в первых трех уравнениях N_1 и N_2, с помощью последних двух получим три уравнения поперечных колебаний в смещения u, v, w.

Дифференцируя первое уравнение два раза по x, затем два раза по s, а второе уравнение один раз по x и один раз по s можно исключить v и выразить u через w. Дифференцируя второе уравнение два раза по x затем два раза по s, а первое уравнение один раз по x и один раз по s, можно исключить u и выразить v через w. Подстановка u и v третье уравнение дает для прогиба w уравнение восьмого порядка

$$\nabla_1^4\left\{R\left[\nabla_2^4 w - \frac{3(1-\sigma_1\sigma_2)}{2h^3}\left(q - P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]\right\} + E_2\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial s}\nabla_0^2 w\right]\right\} + \frac{1}{R}\frac{3E_1E_2}{h^2}(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (1.4)$$

Для кругового цилиндра $R = a = \mathrm{const}$ это уравнение примет вид

$$\nabla_1^4\left[\nabla_2^4 w - \frac{3(1-\sigma_1\sigma_2)}{2h^3}\left(q - P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right] + \frac{E_2}{a^2}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left[\frac{\partial}{\partial s}\nabla_0^2 w\right]\right\} + \frac{1}{a^2}\frac{3E_1E_2}{h^2}(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (1.5)$$

2. Устойчивость цилиндрической круговой оболочки, под действием продольной распределенной нагрузки ($P = P_0 + P_1\cos\omega t$).

Преположим, что торцовые сечения оболочки закреплены так, что при выпучивании ее концы сохраняют круговое очертание и изгибающие моменты по концам обращаются в нуль.

Уравнение поперечных колебаний в этом случае будет

$$\nabla_1^4\nabla_2^4 w + \frac{3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)a^2}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} + E_2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\nabla_0^2 w\right\} +$$
$$+ \frac{3}{2}(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{a^2}{h^3}P\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\nabla_1^4 w + \frac{3\rho a^4(1-\sigma_1\sigma_2)}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_1^4 w = 0 \quad (2.1)$$

где $\xi = x/a$, $s = a\varphi$. Граничные условия будут удовлетворены, если решение искомого уравнения искать в виде

$$w = \sum_m^\infty\sum_n^\infty \sin\frac{m\pi a}{l}\xi\sin n\varphi\, T_{mn}(t) \quad (2.2)$$

где T_{mn} — некоторая функция времени.

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1) и полагая $m\pi a / l = \alpha_m$, имеем

$$\sum_m^\infty \sum_n^\infty \Big\{ \Big[(E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4)\Big(E_1\alpha_m^4 + E_3\alpha_m^2 n^2 + $$

$$+ E_2 n^4 - \frac{3}{2}(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{a^2}{h^3}\alpha_m^2 P\Big) + 3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)\Big(\frac{a}{h}\Big)^2\alpha_m^4 -$$

$$- E_2 n^2\Big(n^2 - \Big(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\Big)\alpha_m^2\Big)(E_2 n^2 + E_0\alpha_m^2)\Big] T_{mn}(t) +$$

$$+ \frac{3\rho a^4(1-\sigma_1\sigma_2)}{h^2}(E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4)\frac{d^2T_{mn}}{dt^2}\Big\} \sin\alpha_m\xi \sin n\varphi = 0 \qquad (2.3)$$

Требуя, чтобы последнее уравнение удовлетворялось при любых ξ и φ, для определения функций T_{mn} получим уравнения Матье

$$\frac{d^2T_{mn}}{d\tau^2} + \frac{4\omega_{mn}^2}{\omega^2}(1 - \varepsilon\cos 2\tau)T_{mn} = 0 \qquad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (2.4)$$

Здесь введены обозначения

$$\omega_{mn}^2 = \frac{h^2}{3\rho a^4(1-\sigma_1\sigma_2)}\Big\{E_1\alpha_m^4 + E_3\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4 -$$

$$- \frac{3}{2}\frac{a^2}{h^3}(1-\sigma_1\sigma_2)\alpha_m^2 P_0 + 3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{a^2}{h^2}\frac{\alpha_m^4}{E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4} -$$

$$- E_2 n^2\Big[n^2 - \Big(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\Big)\alpha_m^2\Big]\frac{E_2 n^2 + E_0\alpha_m^2}{E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4} \qquad (2.5)$$

$$\tau = \frac{\omega t}{2}, \qquad \varepsilon_m = \frac{P_1}{P_{mn} - P_0} \qquad (2.6)$$

где ω_{mn} есть средняя собственная частота, P_{mn} — критическая сила:

$$P_{mn} = \frac{2}{3a(1-\sigma_1\sigma_2)\alpha_m^2}\Big(\frac{h}{a}\Big)^3\Big\{E_1\alpha_{mn}^4 + E_3\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4 +$$

$$+ 3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)\Big(\frac{a}{h}\Big)^2\frac{\alpha_m^4}{E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4} - \qquad (2.7)$$

$$- E_2 n^2\Big[n^2 - \Big(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\Big)\alpha_m^2\Big]\frac{E_2 n^2 + E_0\alpha_m^2}{E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2 n^2 + E_2 n^4}\Big\}$$

Таким образом, вопрос об устойчивости оболочки сводится к исследованию решения уравнения (2.4). Границы критических частот, при которых колебания будут неустойчивы, определяются формулами [2]:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{1 \pm \varepsilon/2 + 7\varepsilon^2/32 \pm 55\varepsilon^3/512}} \qquad \text{(первая область)} \qquad (2.8)$$

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 - \varepsilon^2/3}}, \qquad \omega_{\text{кр}} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 + 5\varepsilon^2/3}} \qquad \text{(вторая область)} \qquad (2.9)$$

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{9 + 81\varepsilon^2/64 \pm 9\varepsilon^3/8}} \qquad \text{(третья область)} \qquad (2.10)$$

В случае изотропной оболочки из (2.5) имеем

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{2\rho a h}\Big\{\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)a^3}\Big[(n^2+\alpha_m^2)^2 - (n^2+\alpha_m^2) + \qquad (2.11)$$

$$+ \frac{\alpha_m^4 - \sigma n^2\alpha_m^2}{n^2+\alpha_m^2}\Big] + \frac{2Eh}{a}\frac{\alpha_m^4}{(n^2+\alpha_m^2)^2} - \frac{P_0\alpha_m^2}{a}\Big\} \qquad (2.12)$$

$$P_{mn} = 2Eh\frac{\alpha_m^2}{(n^2+\alpha_m^2)^2} + \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)a^2}\Big[\frac{(n^2+\alpha_m^2)^2}{\alpha_m^2} - \frac{n^2+\alpha_m^2}{\alpha_m^2} + \frac{\alpha_m^2 - \sigma n^2}{n^2+\alpha_m^2}\Big]$$

Если l мало, то приходим к формуле Тимошенко [5]

$$P_{\text{кр}} = 2Eh \frac{\alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + n^2)^2} + \frac{2Eh^3}{3a^2(1-\sigma^2)} \frac{(n^2+\alpha_m^2)^2}{\alpha_m^2} \tag{2.13}$$

Если деформация симметрична относительно оси, то из (2.11) имеем

$$\omega_m^2 = \frac{1}{2\rho h a}\left(\frac{2Eh^3}{3a^3(1-\sigma^2)} \alpha_m^4 + \frac{2Eh}{a} - \frac{\alpha_m^2}{a} P_0 \right)$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{2Eh}{m^2\pi^2}\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \frac{m^2\pi^2}{l^2}$$

последняя формула совпадает с формулой Лоренца-Тимошенко.

3. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки под действием распределенной внешней периодической нагрузки ($q = q_0 + q_1 \cos \omega t$).

Будем рассматривать только малые отклонения от круговой формы. Для этого случая уравнение (1.5) примет вид

$$\nabla_1^4 \nabla_2^4 w + \frac{3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)a^2}{h^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} +$$

$$+ E_2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \nabla_0^2 w \right\} +$$

$$+ \left[q a^3 \nabla_1^4 \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + 2\rho h a^4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_1^4 w \right] \frac{3(1-\sigma_1\sigma_2)}{2h^3} = 0 \tag{3.1}$$

Условия на торцовых сечениях предполагаем такими же, как в предыдущем случае. Выбирая начало координат по середине длины оболочки, этим условиям можно удовлетворить, полагая решение в виде

$$w = \sum \sin n\varphi \cos \frac{\pi a}{l} \xi \, T_n(t) \tag{3.2}$$

Вставляя это выражение в уравнение (3.2), найдем

$$\omega_{mn}^2 = \frac{h^2}{3\rho a^4 (1-\sigma_1\sigma_2)} \Big\{ E_1\alpha^4 + E_3\alpha^2 n^2 + E_2 n^4 + \tag{3.3}$$

$$+ 3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{\alpha^4}{E_1\alpha^4 + E_4\alpha^2 n^2 + E_2 n^4} -$$

$$- E_2 n^2 \left[n^2 - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\right)\alpha^2 \right] \frac{E_2 n^2 + E_0 \alpha^2}{E_1\alpha^4 + E_4\alpha^2 n^2 + E_2 n^4} - \frac{3(1-\sigma_1\sigma_2)}{2h^3} q_0 a^3 (n^2 - 1) \Big\}$$

$$q_{mn} = \frac{2h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)(n^2-1)a^3} \Big\{ E_1\alpha^4 + E_3\alpha^2 n^2 + E_2 n^4 +$$

$$+ 3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{\alpha^4}{E_1\alpha^4 + E_4\alpha^2 n^2 + E_2 n^4} -$$

$$- E_2 n^2 \left[n^2 - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\right)\alpha^2 \right] \frac{E_2 n^2 + E_0 \alpha^2}{E_1\alpha^4 + E_4\alpha^2 n^2 + E_2 n^4} \Big\} \tag{3.4}$$

В случае изотропной оболочки имеем

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{2\rho h a} \Big\{ \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)a^3} \Big[(n^2+\alpha^2)^2 + (n^2+\alpha^2) +$$

$$+ \frac{\alpha^4 - \sigma n^2 \alpha^2}{n^2 + \alpha^2} \Big] + \frac{2Eh}{a} \frac{\alpha^4}{(n^2+\alpha^2)^2} - q_0 (n^2 - 1) \Big\} \tag{3.5}$$

$$q_{\text{кр}} = \frac{2E}{(n^2-1)[1+(nl/\pi a)]^2} \frac{h}{a} + \frac{2E}{3(1-\sigma^2)} \left[n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \sigma}{1 + (nl/\pi a)^2} \right] \left(\frac{h}{a}\right)^3 \tag{3.6}$$

Последняя формула дана Мизесом. Задача при одновременном действии продольных и поперечных периодических сил решается аналогично.

4. Короткие круговые оболочки. Для коротких оболочек, как показано Х. М. Муштари [6], уравнение поперечных колебаний упрощается и может быть взято в виде

$$\nabla_1^4 \nabla_2^4 w + 3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{3}{2}(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{a^2}{h^3} P \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \nabla_1^4 w +$$
$$+ \frac{3(1-\sigma_1\sigma_2)}{2h^3}\left[qa^3\nabla_1^4\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + 2\rho h a^4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_1^4 w\right] = 0 \qquad (4.1)$$

Рассмотрим часть цилиндрической оболочки, ограниченную двумя образующими и двумя параллельными кругами, опертую по контуру и нагруженную продольными периодическими силами $P = P_0 + P_1 \cos \omega t$.

Решение (4.1) ищем в виде

$$w = \sum_m^\infty \sum_n^\infty \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \varphi \, T_{mn}(t)$$

Граничные условия будут удовлетворены. Вычисления дают

$$\omega_{mn}^2 = \frac{h^2}{3\rho a^4(1-\sigma_1\sigma_2)}\left[E_1\alpha_m^4 + E_3\alpha_m^2\beta_n^2 + E_2\beta_n^2 - \right.$$
$$\left. - {}^3/_2(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{a^2}{h^3}\alpha_m^2 P_0 + \frac{3E_1E_2(1-\sigma_1\sigma_2)a^2\alpha_m^4}{h^2(E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2\beta_n^2 + E_2\beta_n^4)}\right]$$

$$P_{mn} = \frac{2E_1E_2h\alpha_m^2}{E_1\alpha_m^4 + E_4\alpha_m^2\beta_n^2 + E_2\beta_n^4} + \frac{2h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)a^2\alpha_m^2}(E_1\alpha_m^4 + E_3\alpha_m^2\beta_n^2 + E_2\beta_n^4)$$

Здесь $\alpha_m = m\pi a / l$, $\beta_n = n\pi / \varphi_0$, где φ_0 — центральный угол.

5. Устойчивость цилиндрических оболочек произвольного очертания. Рассмотрим поперечные колебания цилиндрической оболочки произвольного очертания, свободно опертой по концам под действием продольной нагрузки $P = P_0 + P_1 \cos \omega t$. Уравнение (1.4) принимает вид

$$\nabla_1^4(R\nabla_2^4 w) + E_2\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial s}(\nabla_0^2 w)\right]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{R}\frac{3E_1E_2}{h^2}(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{3(1-\sigma_1\sigma_2)}{2h^3} P \frac{\partial}{\partial x^2}[\nabla_1^4(Rw)] + \qquad (5.1)$$
$$+ \frac{3\rho(1-\sigma_1\sigma_2)}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\nabla_1^4(Rw)] = 0$$

Решение уравнения (5.1) ищем в виде

$$w(x, s, t) = w_0(xs)\, T(t) \qquad (5.2)$$

где

$$w_0 = \sin \mu_m x \sum_n^\infty a_{mn} \cos n\nu s \quad \left(\mu = \frac{m\pi}{l}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (5.3)$$

причем $\nu = 2\pi / s_0$, где s_0 — длина торцового опертого края.

Подставляя (5.2) в уравнение (5.1) и имея в виду, что при любом m имеет место равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\nabla_1^4(Rw)] = -\mu_m^2[\nabla_1^4(Rw)]$$

уравнение (5.1) можно разделить относительно переменных. Имеем

$$\nabla_1^4 (R \nabla_2^4 w_0) + E_2 \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} (\nabla_0^2 w_0) \right\} + \\ + \frac{1}{R} \frac{3E_1E_2}{h^2} (1 - \sigma_1\sigma_2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \lambda^2 \nabla_1^4 (R w_0) = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{h^2}{3\rho (1 - \sigma_1\sigma_2)} \left(\lambda^2 - \mu_m^2 \frac{3(1 - \sigma_1\sigma_2)}{2h^3} P \right) T = 0 \tag{5.5}$$

где λ^2 — произвольная постоянная. Если сечение имеет ось симметрии, то R и $1/R$ можно представить в виде рядов Фурье:

$$R = \frac{\alpha_0}{2} + \sum \alpha_n \cos n\nu s, \qquad \frac{1}{R} = \frac{\beta_0}{2} + \sum \beta_n \cos n\nu s \tag{5.6}$$

Подставляя значения w_0, R и $1/R$ в уравнение (5.4) и сравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях тригонометрических функций, получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$c_{k0}^m a_{0m} + c_{k1}^m a_{1m} + c_{k2}^m a_{2m} + \cdots + c_{kn}^m a_{km} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{5.7}$$

Коэффициенты c_{nk}^m в этой системе определяются формулами

$$c_{nn}^m = [E_1\mu_m^4 + E_4\mu_m^2 n^2\nu^2 + E_2 n^4\nu^4] [E_1\mu_m^4 + E_3\mu_m^2 n^2\nu^2 + \\ + E_2 n^4\nu^4 - \lambda^2] \frac{\alpha_0 + \alpha_{2n}}{2} + \left\{ E_2 n^2\nu^2 [E_2 n^2\nu^2 + E_0\mu_m^2] \left[\left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G} \right) \mu_m^2 - n^2\nu^2 \right] + \\ + \frac{3E_1E_2}{h^2} (1 - \sigma_1\sigma_2) \mu_m^4 \right\} \frac{\beta_0 + \beta_{2n}}{2} \tag{5.8}$$

$$c_{nk}^m = [E_1\mu_m^4 + E_4\mu_m^2 n^2\nu^2 + E_2 n^4\nu^4] [E_1\mu_m^4 + E_3\mu_m^2 k^2\nu^2 + \\ + E_2 k^4\nu^4 - \lambda^2] \frac{\alpha_{k+n} + \alpha_{k-n}}{2} + \left\{ E_2 [E_2 k^2\nu^2 + \\ + E_0\mu_m^2] kn\nu^2 \left[\mu_m^2 \left(\sigma_1 - \frac{E_1}{G} \right) - n^2\nu^2 \right] + \mu_m^4 \frac{3E_1E_2}{h^2} (1 - \sigma_1\sigma_2) \right\} \frac{\beta_{k+n} + \beta_{k-n}}{2}$$

Ограничиваясь некоторым числом уравнений в системе (5.7) и исключая из нее коэффициенты a_{mn}, получим уравнение, из которого найдем λ^2, затем из (5.5) определяется T. Здесь возможны три случая.

1. При $P = 0$ из уравнения (5.5) найдем частоту собственных колебаний оболочки.

2. При $P = \text{const}$ из уравнения (5) найдем частоту собственных колебаний оболочки с учетом продольных сил.

3. При $P = P_0 + P_1 \cos \omega t$ уравнение (5.5) приводится к виду (2.4).

Поступила в редакцию
22 XII 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Сб. «Инж. сооружения и строит. механика». Л. 1924.
2. Боднер Б. А. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 1.
3. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. 1939.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. Русск. пер. 1935.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости. 1916. Т. II.
6. Муштари Х. М. ПММ. 1939. Т. II. Вып. 4.
7. Новожилов В. В. Известия АН СССР. ОТН, 1946. № 6.