Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОГО ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА

В. К. Прокопов
(Ленинград)

Целью работы является построение решений, свободных от каких бы то ни было кинематических гипотез, позволяющих с нужной степенью точности решить осесимметричную задачу теории упругости для толстостенного цилиндра конечных размеров (толстая оболочка). Для симметрично нагруженной сферической оболочки такие решения были получены А. И. Лурье [1]. Задача об осесимметричной деформации бесконечно длинного цилиндра в литературе уже рассматривалась [2], [3]. Результаты работы позволяют оценить пределы применимости гипотезы Кирхгофа-Лява к случаю толстостенных цилиндрических оболочек.

§ 1. Пусть имеется полый изотропный цилиндр, ограниченный коаксиальными круговыми цилиндрическими поверхностями радиусов a и b и плоскостями $z=c$ и $z=-c$; ось z совпадает с осью боковых поверхностей, а начало координат с центром тяжести цилиндра.

Введем безразмерные координаты $\rho = r/R$ и $\zeta = z/R$. За характеристический линейный размер примем средний радиус цилиндра $^1/_2(a+b)$, тогда интервалы изменения ρ и ζ будут

$$1-\lambda \leqslant \rho \leqslant 1+\lambda, \qquad -\varepsilon \leqslant \zeta \leqslant \varepsilon \qquad \left(\lambda = \frac{a-b}{a+b}\right)$$

где λ — половина относительной толщины стенки цилиндра, а $\varepsilon = c/R$.

В случае осесимметричной деформации напряжения и перемещения можно выразить[4] через одну бигармоническую функцию напряжений ψ:

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\nu\triangle\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\right), & \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\nu\triangle\psi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) \\
\sigma_\zeta &= \frac{\partial}{\partial\zeta}\left((2-\nu)\triangle\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\right), & \tau_{\rho\zeta} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\left((1-\nu)\triangle\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\right) \\
u_\rho &= -\frac{(1+\nu)R}{E}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\zeta}, & u_\zeta &= \frac{(1+\nu)R}{E}\left(2(1-\nu)\triangle\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\right)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Выбираем функцию ψ в форме

$$\psi = \{AI_0(\gamma\rho) + B\rho I_1(\gamma\rho) - CK_0(\gamma\rho) - D\rho K_1(\gamma\rho)\}\sin\gamma\zeta \tag{1.2}$$

где I_0, I_1, — функции Бесселя мнимого аргумента, K_0, K_1, — функции Макдональда, а γ — произвольный параметр. Этому выбору функции ψ соответствует некоторое напряженное состояние, симметричное относительно координаты ζ. Потребуем, чтобы это напряженное состояние соответствовало отсутствию внешних сил на боковых цилиндрических поверхностях, т. е. положим

$$(\sigma_\rho)_{\rho=1+\lambda} = 0, \qquad (\tau_{\zeta\rho})_{\rho=1+\lambda} = 0, \qquad (\sigma_\rho)_{\rho=1-\lambda} = 0, \qquad (\tau_{\rho\zeta})_{\rho=1-\lambda} = 0 \tag{1.3}$$

Тогда, подставив (1.2) в (1.1), а затем в (1.3), получим систему линейных однородных уравнений относительно постоянных A, B, C, D; для того чтобы последние не были равны нулю тождественно, определитель $\Delta(\gamma)$ системы, равный (1.4)

$$\gamma^2 \begin{vmatrix} I_0(\alpha) - \dfrac{I_1(\alpha)}{\alpha} & (1-2\nu)\ I_0(\alpha) + \alpha I_1(\alpha) & -K_0(\alpha) - \dfrac{K_1(\alpha)}{\alpha} & (1-2\nu)\ K_0(\alpha) - \alpha K_1(\alpha) \\ I_1(\alpha) & 2(1-\nu)\ I_1(\alpha) + \alpha I_0(\alpha) & K_1(\alpha) & -2(1-\nu)\ K_1(\alpha) + \alpha K_0(\alpha) \\ I_0(\beta) - \dfrac{I_1(\beta)}{\beta} & (1-2\nu)\ I_0(\beta) + \beta I_1(\beta) & -K_0(\beta) - \dfrac{K_1(\beta)}{\beta} & (1-2\nu)\ K_0(\beta) - \beta K_1(\beta) \\ I_1(\beta) & 2(1-\nu)\ I_1(\beta) + \beta I_0(\beta) & K_1(\beta) & -2(1-\nu)\ K_1(\beta) + \beta K_0(\beta) \end{vmatrix}$$

должен обращаться в нуль. Для краткости в (1.4) введены обозначения $\alpha = \gamma(1+\lambda)$, $\beta = \gamma(1-\lambda)$.

Раскрывая этот определитель, получим трансцендентное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv \frac{1}{1-\lambda^2}\{[\alpha^2 + 2(1-\nu)]\beta^2 L_{10}^2(\alpha,\beta) + \alpha^2[\beta^2 + 2(1-\nu)]\, L_{01}^2(\alpha,\beta) -$$
$$- \alpha^2\beta^2 L_{00}^2(\alpha,\beta) - [\alpha^2 + 2(1-\nu)]\,[\beta^2 + 2(1-\nu)]\, L_{11}^2(\alpha,\beta) -$$
$$- \alpha^2 - \beta^2 - 4(1-\nu)\} = 0 \tag{1.5}$$

где

$$L_{ij}(\alpha,\beta) = I_i(\alpha)\, K_j(\beta) - (-1)^{i+j} I_j(\beta)\, K_i(\alpha) \tag{1.5a}$$

Уравнение (1.5) определяет множество параметров γ_s (вообще говоря, комплексных), удовлетворяющих условиям (1.3), а соответствующие им постоянные A_s, B_s, C_s, D_s пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки или столбца основного определителя. Выбирая элементы первой строки, получим (1.6)

$$A_s = \Delta_1'(\gamma_s)\frac{M_s}{\gamma_s}, \quad B_s = -\Delta_2'(\gamma_s)\, M_s, \quad C_s = \Delta_3'(\gamma_s)\frac{M_s}{\gamma_s}, \quad D_s = -\Delta_4'(\gamma_s)\, M_s$$

где $\Delta_j'(\gamma_s)$ — миноры элементов первой строки определителя (1.4):

$$\Delta_1'(\gamma) = \left[\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}\right] K_1(\beta)\left\{2(1-\nu)\, L_{11}(\alpha,\beta) + \alpha L_{01}(\alpha,\beta)\right\} +$$
$$+ 2(1-\nu)\frac{\alpha}{\beta} K_0(\alpha) - \beta K_0(\beta)\left\{2(1-\nu)\, L_{10}(\alpha,\beta) +\right.$$
$$\left. + \alpha L_{00}(\alpha,\beta)\right\} - \left[\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}\right] K_1(\alpha) \tag{1.7}$$

$$\Delta_2'(\gamma) = \left[\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}\right] K_1(\beta)\, L_{11}(\alpha,\beta) - \beta K_0(\beta)\, L_{10}(\alpha,\beta) + \frac{\alpha}{\beta} K_0(\alpha)$$

$$\Delta_3'(\gamma) = -\left[\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}\right] I_1(\beta)\left\{2(1-\nu)\, L_{11}(\alpha,\beta) + \alpha L_{01}(\alpha,\beta)\right\} +$$
$$+ 2(1-\nu)\frac{\alpha}{\beta} I_0(\alpha) - \beta I_0(\beta)\left\{2(1-\nu)\, L_{10}(\alpha,\beta) + \alpha L_{00}(\alpha,\beta)\right\} +$$
$$+ \left[\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}\right] I_1(\alpha)$$

$$\Delta_4'(\gamma) = \left[\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}\right] I_1(\beta)\, L_{11}(\alpha,\beta) + \beta I_0(\beta)\, L_{10}(\alpha,\beta) - \frac{\alpha}{\beta} I_0(\alpha)$$

значок s для краткости опущен.

При заданном соотношении радиусов a и b определяются корни γ_s трансцендентного уравнения (1.5), после чего по формулам (1.6), (1.7) находятся постоянные A_s, B_s, C_s, D_s и соответствующая функция напряжений (1.2); заменяя в (1.2) $\sin\gamma_s\zeta$ на $-\cos\gamma_s\zeta$, а в (1.6) M_s на N_s, получим выражение для функции напряжения, которой соответствует некоторое напряженное состояние, кососимметричное относительно координаты ζ и не дающее напряжений на боковых поверхностях цилиндра. Объединяя симметричное и кососимметричное относительно ζ решения и суммируя по всем s, получим наиболее общее выражение для функции напряжений

$$\psi = \sum_s \left\{\frac{\Delta_1'(\gamma_s)}{\gamma_s} I_0(\gamma_s\rho) - \Delta_2'(\gamma_s)\rho I_1(\gamma_s\rho) - \frac{\Delta_3'(\gamma_s)}{\gamma_s} K_0(\gamma_s\rho) + \right.$$
$$\left. + \Delta_4'(\gamma_s)\rho K_1(\gamma_s\rho)\right\}(M_s\sin\gamma_s\zeta - N_s\cos\gamma_s\zeta) \tag{1.8}$$

Подстановка (1.8) в (1.1) дает соответствующие этому напряженному состоянию значения напряжений и перемещений (1.9)

$$\sigma_\rho = \sum \gamma_s^2 \left\{[(1-2\nu)\Delta_2'(\gamma_s) - \Delta_1'(\gamma_s)] I_0(\gamma_s\rho) + \Delta_1'(\gamma_s)\frac{I_1(\gamma_s\rho)}{\gamma_s\rho} + \right.$$
$$+ \Delta_2'(\gamma_s)\gamma_s\rho I_1(\gamma_s\rho) + [(1-2\nu)\Delta_4'(\gamma_s) + \Delta_3'(\gamma_s)] K_0(\gamma_s\rho) +$$
$$\left. + \Delta_3'(\gamma_s)\frac{K_1(\gamma_s\rho)}{\gamma_s\rho} - \Delta_4'(\gamma_s)\gamma_s\rho K_1(\gamma_s\rho)\right\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$\sigma_\vartheta = \sum \gamma_s^2 \left\{(1-2\nu)\Delta_2'(\gamma_s) I_0(\gamma_s\rho) - \Delta_1'(\gamma_s)\frac{I_1(\gamma_s\rho)}{\gamma_s\rho} + \right.$$
$$\left. + (1-2\nu)\Delta_4'(\gamma_s) K_0(\gamma_s\rho) - \Delta_3'(\gamma_s)\frac{K_1(\gamma_s\rho)}{\gamma_s\rho}\right\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$\sigma_\zeta = \sum \gamma_s^2 \left\{\Delta_1'(\gamma_s) - 2(2-\nu)\Delta_2'(\gamma_s)] I_0(\gamma_s\rho) - \Delta_2'(\gamma_s)\gamma_s\rho I_1(\gamma_s\rho) - \right.$$
$$- [\Delta_3'(\gamma_s) + 2(2-\nu)\Delta_4'(\gamma_s)] K_0(\gamma_s\rho) +$$
$$\left. + \Delta_4'(\gamma_s)\gamma_s\rho K_1(\gamma_s\rho)\right\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$\tau_{\rho\zeta} = \sum \gamma_s^2 \left\{[\Delta_1'(\gamma_s) - 2(1-\nu)\Delta_2'(\gamma_s)] I_1(\gamma_s\rho) - \Delta_2'(\gamma_s)\gamma_s\rho I_0(\gamma_s\rho) + \right.$$
$$+ [\Delta_3'(\gamma_s) + 2(1-\nu)\Delta_4'(\gamma_s)] K_1(\gamma_s\rho) -$$
$$\left. - \Delta_4'(\gamma_s)\gamma_s\rho K_0(\gamma_s\rho)\right\}(M_s\sin\gamma_s\zeta - N_s\cos\gamma_s\zeta)$$

$$u_\rho = -\frac{(1+\nu)R}{E}\sum \gamma_s \left\{\Delta_1'(\gamma_s) I_1(\gamma_s\rho) - \Delta_2'(\gamma_s)\gamma_s\rho I_0(\gamma_s\rho) + \right.$$
$$\left. + \Delta_3'(\gamma_s) K_1(\gamma_s\rho) - \Delta_4'(\gamma_s)\gamma_s\rho K_0(\gamma_s\rho)\right\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$u_\zeta = \frac{(1+\nu)R}{E}\sum \gamma_s \left\{[\Delta_1'(\gamma_s) - 4(1-\nu)\Delta_2'(\gamma_s)] I_0(\gamma_s\rho) - \right.$$
$$- \Delta_2'(\gamma_s)\gamma_s\rho I_1(\gamma_s\rho) - [\Delta_3'(\gamma_s) + 4(1-\nu)\Delta_4'(\gamma_s)] K_0(\gamma_s\rho) -$$
$$\left. - \Delta_4'(\gamma_s)\gamma_s\rho K_1(\gamma_s\rho)\right\}(M_s\sin\gamma_s\zeta - N_s\cos\gamma_s\zeta)$$

Эти решения позволяют учесть влияние торцов (краевой эффект) в весьма толстостенных цилиндрах. Поскольку они соответствуют однородным граничным условиям (1.3) для боковых поверхностей цилиндра, их можно было бы назвать однородными. Такие однородные решения для сферической оболочки и для плиты были получены А. И. Лурье [1,5].

При выполнении краевых условий на торце цилиндра в смысле принципа Сен-Венана нужно удовлетворить только одному условию для продольной силы, чего возможно достигнуть, очевидно, решениями обычных типов (в полиномах или в рядах Фурье). Решения, даваемые формулами (1.9), не дают продольной силы (что легко может быть проверено непосредственной подстановкой) и поэтому при выполнении краевых условий по Сен-Венану бесполезны. Добавляя же эти решения, которые не изменят уже выполненных условий на боковых поверхностях, мы сможем учесть влияние края более точно, чем в смысле принципа Сен-Венана. Оставляя нужное количество первых членов в рядах (1.9), можно потребовать совпадения получаемых на торцах напряжений σ_ζ и $\tau_{\rho\zeta}$ (или перемещений u_ρ и u_ζ) с заданными в определенных точках радиуса; можно также приближать эпюры получаемых нормальных и касательных напряжений к заданным, требуя выполнения конечного числа интегральных соотношений (моменты различных порядков).

§ 2. При пользовании решениями (1.9) приходится находить значения функций Бесселя от комплексного переменного (так как γ_s — комплексные числа), что неудобно. Для не очень толстых цилиндров, когда λ является малой величиной, естественно искать приближенные решения в виде рядов по степеням малого параметра λ, обрывая эти ряды на определенной степени λ. Трансцендентное уравнение (1.5) перейдет при этом в алгебраическое, а перемещения и напряжения будут выражаться уже не рядами, а суммами конечного числа членов, равного числу корней этого уравнения. Положим

$$\rho = 1 + \lambda\xi \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

Структура формул (1.9) такова, что, имея в виду в дальнейшем пренебречь величинами порядка λ^2 по сравнению с единицей, первоначально приходится учитывать величины порядка до λ^4 включительно. Разлагая $I_0(\gamma_s\rho)$, $I_1(\gamma_s\rho), \ldots$ и т. д. в строку Тейлора, исключаем производные, заменяя их функциями $I_0(\gamma_s)$, $I_1(\gamma_s)$, $K_0(\gamma_s)$, $K_1(\gamma_s)$.

Пользуясь полученными разложениями и соотношением

$$I_0(\gamma) K_1(\gamma) + I_1(\gamma) K_0(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \tag{2.1}$$

находим (2.2)

$$L_{00} = 2\lambda + \frac{2}{3}\lambda^3(2\gamma^2 + 1) + \cdots, \qquad L_{11} = 2\lambda + \frac{2}{3}\lambda^3(2\gamma^2 + 3) + \cdots$$

$$L_{01} = \frac{1}{\gamma}\left\{1 + \lambda + \lambda^2(2\gamma^2 + 1) + \frac{\lambda^3}{3}(2\gamma^2 + 3) + \frac{\lambda^4}{3}(2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 3) + \cdots\right\}$$

$$L_{10} = \frac{1}{\gamma}\left\{1 - \lambda + \lambda^2(2\gamma^2 + 1) - \frac{\lambda^3}{3}(2\gamma^2 + 3) + \frac{\lambda^4}{3}(2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 3) + \cdots\right\}$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и пренебрегая λ^2 по сравнению с единицей, получим для γ_s биквадратное уравнение

$$\gamma^4 + 4(1-\nu^2)\gamma^2 + \frac{3(1-\nu^2)}{\lambda^2} = 0 \qquad (2.3)$$

Если

$$\lambda < \sqrt{\frac{3}{4(1-\nu^2)}}$$

что имеет место в рассматриваемом случае, то все корни уравнения (2.3) — комплексные. Полагая $\gamma_s = \pm p \pm if$ $(s = 1, 2, 3, 4)$, получим

$$p = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{2}{3}\omega^2\lambda\right), \quad f = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{2}{3}\omega^2\lambda\right) \quad \left(\omega = \sqrt[4]{\frac{3}{4}(1-\nu^2)}\right) \qquad (2.4)$$

Приближенные формулы для напряжений и перемещений имеют вид

$$u_\rho = \frac{R}{E}\sum_s \{u_1 + \gamma_s^2\lambda u_2^*\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$u_\zeta = -\frac{R}{E}\sum_s \left(\frac{1}{\gamma_s}w_1^* + \gamma_s\lambda w_2^*\right)(M_s\sin\gamma_s\zeta - N_s\cos\gamma_s\zeta)$$

$$\sigma_\rho = \sum_s \{r_1 + \gamma_s^2\lambda r_2^*\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$\sigma_\theta = \sum_s \{\theta_1 + \gamma_s^2\lambda\theta_2^*\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$\sigma_\zeta = \sum_s \{z_1 + \gamma_s^2\lambda z_2^*\}(M_s\cos\gamma_s\zeta + N_s\sin\gamma_s\zeta)$$

$$\tau_{\rho\zeta} = \sum_s \frac{t^*}{\gamma_s}(M_s\sin\gamma_s\zeta - N_s\cos\gamma_s\zeta) \qquad (2.5)$$

Здесь для краткости введены обозначения

$$u_1 = 2 + \lambda[2(1-\nu) - 2\nu\xi], \qquad r_1 = -\lambda\xi(1-\xi^2)$$

$$u_2^* = \frac{\lambda}{3(1-\nu)}[(8-5\nu) - 3\nu\xi^2], \qquad r_2^* = -\frac{\lambda\nu}{1-\nu^2}(1-\xi^2)$$

$$w_1^* = 2\nu + \lambda[2\nu(1-\nu) + (1+\nu)(2-5\nu)\xi + (1+\nu)(2-\nu)\xi^3]$$

$$w_2^* = -2\xi + \lambda\left[\frac{2+7\nu}{3} - 2(1-\nu)\xi + \nu\xi^2\right]$$

$$\theta_1 = 2 + \lambda[2(1+\nu) - (2+5\nu)\xi - \nu\xi^3]$$

$$\theta_2^* = \frac{2\nu}{1-\nu^2}\xi + \frac{\lambda}{3(1-\nu^2)}[(8-7\nu)(1+\nu) + 6\nu(1-\nu)\xi - 3\nu(1+\nu)\xi^2]$$

$$z_1 = -\lambda(2\xi + 2\xi^3), \qquad z_2^* = \frac{2}{1-\nu^2}\xi - \frac{\lambda}{3(1-\nu^2)}[(2-\nu) - 6(1-\nu)\xi + 3\nu\xi^2]$$

$$t^* = \{3 + \lambda[3(1-\nu) - (1+\nu)\xi]\}(1-\xi^2) \qquad (2.6)$$

Решения (2.5) являются однородными, ибо при $\xi = \pm 1$ (на боковых поверхностях) $\sigma_\rho = 0$ и $\tau_{\rho\zeta} = 0$.

Так как $\gamma_3 = -\gamma_1$, а $\gamma_4 = -\gamma_2$, то члены сумм (2.5), соответствующие индексам $s = 3,4$, не дают ничего нового и их можно объединить с членами, имеющими индексы $s = 1,2$. Суммирование в (2.5) проводится поэтому по корням уравнения (2.3), имеющим положительные вещественные части. Положим в (2.5)

$$2M_1 = A + iB,\ 2N_1 = C - iD,\ 2M_2 = A - iB,\ 2N_2 = C + iD$$

и перейдем к вещественным выражениям для перемещений и напряжений. Получим

$$u_\rho = \frac{R}{E}\{(Au_1 - Bu_2)\cos p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Bu_1 + Au_2)\sin p\zeta \operatorname{sh} f\zeta + (Cu_1 + Du_2)\sin p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Du_1 - Cu_2)\cos p\zeta \operatorname{sh} f\zeta\}$$

$$u_\zeta = -\frac{R}{E}\sqrt{\lambda}\{(Aw_1 + Bw_2)\sin p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Aw_2 - Bw_1)\cos p\zeta \operatorname{sh} f\zeta + (Dw_2 - Cw_1)\cos p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Dw_1 + Cw_2)\sin p\zeta \operatorname{sh} f\zeta\}$$

$$\sigma_\rho = (Ar_1 - Br_2)\cos p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Br_1 + Ar_2)\sin p\zeta \operatorname{sh} f\zeta + (Cr_1 + Dr_2)\sin p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Dr_1 - Cr_2)\cos p\zeta \operatorname{sh} f\zeta$$

$$\sigma_\theta = (A\theta_1 - B\theta_2)\cos p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (B\theta_1 + A\theta_2)\sin p\zeta \operatorname{sh} f\zeta + (C\theta_1 + D\theta_2)\sin p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (D\theta_1 - C\theta_2)\cos p\zeta \operatorname{sh} f\zeta$$

$$\sigma_\zeta = (Az_1 - Bz_2)\cos p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Bz_1 + Az_2)\sin p\zeta \operatorname{sh} f\zeta + (Cz_1 + Dz_2)\sin p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Dz_1 - Cz_2)\cos p\zeta \operatorname{sh} f\zeta$$

$$\tau_{\rho\zeta} = \sqrt{\lambda}\{(At_1 + Bt_2)\sin p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (At_2 - Bt_1)\cos p\zeta \operatorname{sh} f\zeta + (Dt_2 - Ct_1)\cos p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + (Dt_1 + Ct_2)\sin p\zeta \operatorname{sh} f\zeta\} \tag{2.7}$$

причем, здесь

$$u_2 = 2\omega^2 u_2^*,\quad \theta_2 = 2\omega^2\theta_2^*,\quad z_2 = 2\omega^2 z_2^*,\quad r_2 = 2\omega^2 r_2^*$$

$$w_1 = \omega\left(1 - \frac{2}{3}\omega^2\lambda\right)\left(\frac{w_1^*}{2\omega^2} + w_2^*,\right) \qquad t_1 = \frac{1}{2\omega}\left(1 - \frac{2}{3}\omega^2\lambda\right)t^* \tag{2.8}$$

$$w_2 = \omega\left(1 + \frac{2}{3}\omega^2\lambda\right)\left(\frac{w_1^*}{2\omega^2} - w_2^*\right). \qquad t_2 = \frac{1}{2\omega}\left(1 + \frac{2}{3}\omega^2\lambda\right)t^*$$

Для длинного цилиндра однородные решения можно взять в форме, отличной от (2.7), как это делается в теории цилиндрической оболочки, заменив гиперболические функции экспоненциальными.

Постоянные A, B, C, D позволяют учесть влияние торцов в том же духе, как это делается в теории оболочек, т. е. ставить условия для усилий и моментов или перемещений средней поверхности. При этом в случае длинного цилиндра эффект каждого края может быть учтен отдельно, так как взаимное их влияние друг на друга ничтожно. Цилиндр практически является длинным при выполнении неравенства

$$2\varepsilon > \frac{\pi}{\omega}\sqrt{\lambda} \tag{2.9}$$

Отметим, что последовательный учет величин порядка λ^2 (и выше) привел бы к алгебраическому уравнению более высокого порядка, чем уравнение (2.3), что в результате дало бы возможность при учете краевого эффекта удовлетворить условиям для бимоментов и т. д.

§ 3. В качестве примера рассмотрим равновесие толстостенного цилиндра, снабженного двумя недеформируемыми днищами, жестко скрепленными с ним; нагрузка — внутреннее давление q; осевое перемещение допускается.

Решение задачи теории упругости для полого коаксиального цилиндра, удовлетворяющее условиям на боковых поверхностях

$$(\sigma_\rho{}^\circ)_{\rho=1+\lambda}=0,\quad (\sigma_\rho{}^\circ)_{\rho=1-\lambda}=-q,\quad (\tau_{\rho\zeta}{}^\circ)_{\rho=1+\lambda}=0,\quad (\tau_{\rho\zeta}{}^\circ)_{\rho=1-\lambda}=0$$

(задача Ляме) в наших обозначениях дается формулами

$$u_\rho{}^\circ=\frac{(1+\nu)(1-\lambda^2)^2 Rq}{4\lambda E\rho}+C_1\rho,\qquad u_\zeta{}^\circ=C_0+C_2\zeta$$

$$\sigma_\rho{}^\circ=\frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda}\left[1-\frac{(1+\lambda)^2}{\rho^2}\right]q,\qquad \sigma_\vartheta{}^\circ=\frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda}\left[1+\frac{(1+\lambda)^2}{\rho^2}\right]q$$

$$\sigma_\zeta{}^\circ=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)R}\left[2\nu C_1+(1-\nu)C_2\right],\qquad \tau_{\rho\zeta}{}^\circ=0 \tag{3.1}$$

причем постоянные C_1 и C_2 связаны соотношением

$$C_1+\nu C_2=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(1-\lambda)^2 Rq}{4E\lambda} \tag{3.2}$$

Суммарная продольная сила, действующая на каждый край цилиндра, равна

$$S=2\pi R^2\int\limits_{1-\lambda}^{1+\lambda}\sigma_\zeta{}^\circ\,\rho\,d\rho \tag{3.3}$$

Эта сила вызвана давлением на днища цилиндра, поэтому

$$S=\pi(1-\lambda)^2R^2q \tag{3.4}$$

Из (3.1), (3.3) и (3.4) получаем

$$2\nu C_1+(1-\nu)C_2=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(1-\lambda)^2Rq}{4E\lambda} \tag{3.5}$$

Решая (3.5) совместно с (3.2), находим постоянные C_1 и C_2. Имеем

$$C_1=C_2=\frac{(1-2\nu)(1-\lambda)^2 Rq}{4E\lambda} \tag{3.6}$$

Для простоты предполагаем неравенство (2.9) выполненным, т. е. цилиндр достаточно длинным. Тогда, добавляя к решениям (3.1) решения однородные, не нарушающие уже выполненной части граничных условий (именно, условий на боковых поверхностях), получаем возможность удовлетворить краевым условиям на торцах цилиндра:

$$\left(u_\rho\right)_{\substack{\xi=0\\ \zeta=0}}=0,\quad \left(u_\rho\right)_{\substack{\xi=0\\ \zeta=2\varepsilon}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\zeta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \zeta=0}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\zeta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \zeta=2\varepsilon}}=0 \tag{3.7}$$

Удовлетворяя этим условиям, получаем систему уравнений, определяющую постоянные:

$$Au_1(0) - Bu_2(0) = -K, \qquad Cu_1(0) - Du_2(0) = -K$$

$$Au_2(0) + Bu_1(0) = \frac{f}{p}K, \qquad Cu_2(0) + Du_1(0) = \frac{f}{p}K \tag{3.8}$$

где

$$u_1(0) = 2[1 + \lambda(1-\nu)], \qquad u_2(0) = \frac{(8-5\nu)(1+\nu)}{2\omega^2}\lambda$$

$$K = \frac{(1-\lambda)^2[(1+\nu)(1+\lambda)^2 + (1-2\nu)]}{4\lambda} q \tag{3.8a}$$

Решение системы (3.8), если пренебречь величинами порядка λ^2 по сравнению с единицей, имеет следующий вид.

$$A = C = -\frac{K}{2}\left\{1 - \lambda\left[\frac{(8-5\nu)(1+\nu)}{4\omega^2} + (1-\nu)\right]\right\}$$

$$B = D = \frac{K}{2}\left\{1 + \lambda\left[\frac{3(4-3\nu)(1+\nu)}{4\omega^2} - (1-\nu)\right]\right\} \tag{3.9}$$

Пусть центр тяжести цилиндра остается неподвижным, тогда постоянная C_0 в (3.1) определится из условия $(u_\zeta)_{\zeta=\varepsilon} = 0$. Находим

$$C_0 = -\frac{(1-2\nu)(1-\lambda)^2 R}{4E\lambda} q\varepsilon \tag{3.10}$$

Введем переменную $x = \omega\zeta/\sqrt{\lambda}$. Вследствие малости λ имеем

$$p\zeta = x - \Delta x, \qquad f\zeta = x + \Delta x \qquad \left(\Delta x = \frac{2}{3}\omega^2\lambda x\right)$$

Очевидно, что

$$e^{-f\zeta}\cos p\zeta = \vartheta(x)\vartheta(\Delta x) + \eta(x)\eta(\Delta x),$$

$$e^{-f\zeta}\sin p\zeta = \eta(x)\vartheta(\Delta x) - \vartheta(x)\eta(\Delta x)$$

где

$$\vartheta(x) = e^{-x}\cos x, \qquad \eta(x) = e^{-x}\sin x$$

Вследствие малости Δx имеем

$$e^{-f\zeta}\cos p\zeta = \vartheta(x) - \frac{2}{3}\omega^2\lambda x\psi(x) \tag{3.11}$$

$$e^{-f\zeta}\sin p\zeta = \eta(x) - \frac{2}{3}\omega^2\lambda x\varphi(x)$$

где

$$\psi(x) = \vartheta(x) - \eta(x), \qquad \varphi(x) = \vartheta(x) + \eta(x)$$

Для функций $\vartheta(x)$, $\eta(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ в монографии [2] имеются таблицы (стр. 60—61).

В случае длинного цилиндра вдали от краев напряжения не меняются от сечения к сечению и определяются формулами (3.1). На краю (например, при $\zeta = 0$) к ним прибавляются еще напряжения

$$\sigma_\rho' = Ar_1 - Br_2, \qquad \sigma_\zeta' = Az_1 - Bz_2$$

$$\sigma_\vartheta' = A\theta_1 - B\theta_2, \qquad \tau_{\rho\xi}' = \sqrt{\lambda}\,(Bt_1 - At_2) \tag{3.12}$$

где r_1, $r_2, \ldots$ и т. д. определяются по формулам (2.6), (2.8), а постоянные A, B находятся по формулам (3.9).

Максимальными напряжениями в расматриваемом примере являются растягивающие напряжения σ_ζ на внутренних волокнах цилиндра в заделанном сечении. Приводим значения этих максимальных напряжений, отнесенных к величине внутреннего давления q.

$\lambda =$	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$\sigma_\zeta =$	103.3	21.84	11.66	8.27	6.57	5.56
$\sigma_\zeta^* =$	102.5	20.50	10.25	6.83	5.12	4.10
$\delta =$	0.77	6.14	12.1	17.4	22.1	26.3

Здесь во второй строке указаны численные значения максимальных напряжений σ_ζ в задаче о цилиндре с жестко заделанными в недеформируемых днищах краями, нагруженном равномерным внутренним давлением, вычисленные по формулам (3.1), (3,12), в зависимости от параметра λ, характеризующего толщину стенки цилрндра. Для сравнения в третьей строке приведены результаты вычислений тех же напряжений (обозначены σ_ζ^*), проделанных согласно обычной теории цилиндрической оболочки, базирующейся на гипотезах Кирхгоффа-Лява. В последней строке даны величины соответствующих погрешностей δ в процентах.

Очевидно, что при $\lambda < 0.05$ обычная теория дает достаточно точные результаты.

§ 4. Если толщина стенки цилиндра $2h = 2\lambda R$ весьма мала по сравнению с его средним радиусом R, то $\lambda \ll 1$, p и f практически равны и для γ_s получается известная из теории оболочек формула

$$\gamma_s = \pm(1 \pm i)\sqrt{\frac{R}{h}}\sqrt[4]{\frac{3}{4}(1 - \nu^2)} \tag{4.1}$$

Рассмотрим перемещения срединной поверхности

$$u_0 = (u_\rho)_{\xi=0}, \qquad w_0 = (u_\zeta)_{\xi=0} \tag{4.2}$$

и усилия и моменты S_1, S_2, Q, G_1, G_2 на единицу длины, вводимые обычно в теории осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки:

$$S_1 = h\int_{-1}^{1} \sigma_\zeta(1 + \lambda\xi)\,d\xi, \qquad S_2 = h\int_{-1}^{1} \sigma_\vartheta d\xi$$

$$Q = h\int_{-1}^{1} \tau_{\rho\zeta}(1 + \lambda\xi)\,d\xi$$

$$G_1 = h^2\int_{-1}^{1} \sigma_\zeta(1 + \lambda\xi)\,\xi\,d\xi, \qquad G_2 = h^2\int_{-1}^{1} \sigma_\vartheta\xi\,d\xi \tag{4.3}$$

Подставляя (2.7) в (4.2) и (4.3) и пренебрегая величинами порядка λ по сравнению с единицей, но учитывая величины порядка $\sqrt{\lambda}$, получим

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{2R}{E}\{A\cos x\,\mathrm{ch}\,x + B\sin x\,\mathrm{sh}\,x + C\sin x\,\mathrm{ch}\,x + D\cos x\,\mathrm{sh}\,x\}\\
w_0 &= \frac{\nu\sqrt{\lambda}R}{\omega E}\{(C-D)\cos x\,\mathrm{ch}\,x - (C+D)\sin x\,\mathrm{sh}\,x -\\
&\qquad - (A+B)\sin x\,\mathrm{ch}\,x + (B-A)\cos x\,\mathrm{sh}\,x\}\\
S_1 &= 0\\
S_2 &= 4\lambda R\{A\cos x\,\mathrm{ch}\,x + B\sin x\,\mathrm{sh}\,x + C\sin x\,\mathrm{ch}\,x + D\cos x\,\mathrm{sh}\,x\}\\
Q &= \frac{2R\lambda^{3/2}}{\omega}\{(D-C)\cos x\,\mathrm{ch}\,x + (C+D)\sin x\,\mathrm{sh}\,x +\\
&\qquad + (A+B)\sin x\,\mathrm{ch}\,x + (A-B)\cos x\,\mathrm{sh}\,x\}\\
G_1 &= \frac{8R^2\omega^2\lambda^2}{3(1-\nu^2)}\{A\sin x\,\mathrm{sh}\,x - B\cos x\,\mathrm{ch}\,x + D\sin x\,\mathrm{ch}\,x - C\cos x\,\mathrm{sh}\,x\}\\
G_2 &= \frac{8\nu R^2\omega^2\lambda^2}{3(1-\nu^2)}\{A\sin x\,\mathrm{sh}\,x - B\cos x\,\mathrm{ch}\,x + D\sin x\,\mathrm{ch}\,x - C\cos x\,\mathrm{sh}\,x\}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где $x = \omega\zeta/\sqrt{\lambda}$, как и ранее.

Найденные таким способом величины тождественно удовлетворяют уравнениям теории тонких оболочек (при отсутствии нагрузки)

$$
\frac{dw_0}{d\zeta} = -\nu u_0, \qquad S_2 = 2E\lambda u_0
$$

$$
Q = -\frac{D}{R^3}\frac{d^3u_0}{d\zeta^3}, \quad G_1 = -\frac{D}{R^2}\frac{d^2u_0}{d\zeta^2}, \quad G_2 = \nu G_1
$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость оболочки.

Формулы (4.4), полученные из точных уравнений теории упругости и являющиеся первым приближением для тонкостенных цилиндров, полностью совпадают с теми, которые получаются, если следовать гипотезам Киргофа-Лява.

В следующем приближении (2.7) эти гипотезы не оправдываются, и поэтому попытки построения теории толстой цилиндрической оболочки, основывающиеся на таких гипотезах, несостоятельны.

Поступила в редакцию
5 VII 1948

Ленинградский политехнический
институт имени М. И. Калинина

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ. 1943. VII. № 6. Стр. 393—404.
2. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939. Стр. 546, 551.
3. Шапиро Г. С. О сжатии бесконечного полого кругового цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности. ПММ. 1943. VII. № 5.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР. 1935. Стр. 288.
5. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ. 1942. VI. № 2—3. Стр. 151—168.