Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ И ПРОИЗВОЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЯХ

Х. М. Муштари

(Казань)

Основы общей теории изотропных упругих оболочек в пределах обобщенного закона Гука были даны в последние годы [1,2]. Краткому изложению некоторых результатов этой теории посвящаются § 1—2 данной работы; при этом уравнения равновесия и условия совместности приводятся в более упрощенном виде в соответствии с тем, что в рационально построенной теории оболочек, опирающейся на закон Гука, величинами одного порядка с относительными удлинениями следует пренебрегать по сравнению с единицей.

В § 3—6 дается классификация задач линейной и нелинейной теории оболочек. Заметим, что классификация, предложенная В. Ченом [2], построена чисто формально из математических соображений и содержит 12 типов основной задачи теории упругой плиты и 24 типа теории оболочки.

В предлагаемой классификации число типов задач сведено к минимуму, при этом наряду со случаями, рассмотренными Ченом, в которых дифференцирование по гауссовой координате не изменяет порядка величин, характеризующих деформацию, в рассмотрение включается также краевой эффект, не подчиняющийся этому условию; устанавливается область применимости линейной теории вообще и решений типа краевого эффекта в частности [3].

Наконец, в работе рассматриваются некоторые задачи напряженного состояния оболочки средней толщины и некоторые случаи интегрирования уравнений нелинейной теории.

§ 1. Обозначения и основные понятия. Условимся изложение вести в безразмерных величинах. За характерные величины примем длину L меньшего из немалых размеров или радиусов кривизны оболочки и модуль Юнга E. Таким образом, все линейные величины приводятся к безразмерным делением на L, все усилия—делением на E, объемные силы—делением на EL^{-1}. Для обратного перехода к размерным соотношениям формулы необходимо умножить на комбинации вида E^nL^m, дающие требуемую размерность.

Положение точки деформированной оболочки определяем безразмерными координатами x_*^i. Будем обозначать через x_*^α гауссовы координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки на срединную поверхность оболочки S_0^*, причем здесь и в дальнейшем латинские индексы принимают значения 1,2 и 3, греческие индексы—значения 1 и 2.

За положительное направление координаты x_*^3 принимаем направление внешней нормали к деформированной срединной поверхности.

Для квадрата безразмерного линейного элемента оболочки в обычных тензорных обозначениях имеем выражение

$$ds_*^2 = g_{ij}^* dx_*^i dx_*^j$$

Обозначим через $a_{\alpha\beta}^*$ и $b_{\alpha\beta}^*$ коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности. Тогда

$$a_{\alpha\beta}^* = g_{\alpha\beta}^*, \qquad b_{\alpha\beta}^* = -\frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta,3}^*, \qquad \text{при} \quad x_*^3 = 0 \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем запятая перед индексом означает частное дифференцирование по аргументам, стоящим в индексе после запятой, т. е. $g_{\alpha\beta,3} = \partial g_{\alpha\beta} / \partial x^3$.

Кривизна нормального сечения в направлении единичного вектора μ_* равна

$$\frac{1}{R_*} = -\, b_{\alpha\beta}^* \mu_*^\alpha \mu_*^\beta \tag{1.2}$$

Здесь R_* — безразмерная величина радиуса кривизны деформированной срединной поверхности. Она выражается через размерную величину радиуса кривизны ρ_* при помощи равенства $\rho_* = LR_*$.

В общем случае $| b_{\alpha\beta}^* |$ будет меньше 1 или порядка 1, так как $\rho_* \geqslant L$ по определению L.

В частности, при исследовании упругого равновесия цилиндрической трубы круглого сечения за величину L принимаем радиус трубы и $R_* = 1$, если $\mu_*^1 = 0$, а $x_*^1 = \text{const}$ — окружность поперечного сечения срединной поверхности трубы. В этом случае $b_{22}^* = -1$.

Кривизну будем считать положительной, если поверхность выпукла в сторону возрастания x_*^3. Составляющие дискриминантного тензора $c_{\alpha\beta}^*$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} &c_{11}^* = c_{22}^* = 0, && c_{*}{}^{\cdot\,\alpha}_{\gamma} = c_*^{\beta\alpha} a_{\beta\gamma}^*, \\ &c_{12}^* = -\, c_{21}^* = \sqrt{a^*}, && c^*{}_{\cdot\,\gamma}^{\;\alpha} = c_{\beta\gamma}^* a_*^{\alpha\beta}, \end{aligned} \qquad a^* = a_{11}^* a_{22}^* - a_{12}^{*2} \tag{1.3}$$

Если уравнения внутренней и внешней поверхностей, ограничивающих оболочку, соответственно имеют вид

$$x_*^3 = -\, h_-^*, \qquad x_*^3 = +\, h_+^* \tag{1.4}$$

где h_-^* и h_+^* суть положительные функции от x_*^α, то при малых деформациях с принятой точностью $h_+^* = h_-^* = h$, где $2h$ — безразмерная начальная толщина оболочки.

Обозначим через ds_0^* элемент дуги кривой на срединной поверхности, через n_α^* — ковариантные составляющие единичного вектора нормали к нему, касательного к поверхности, через λ_*^α и λ_β^* — контравариантные и ковариантные составляющие произвольного единичного поверхностного вектора λ^*, проведенного в точке этого элемента.

Систему сил, действующих на срез оболочки, образованный нормалями к S_0^* на элементе ds_0^*, заменяем статически эквивалентной системой, приведенной к S_0^*.

Таким образом, находим инварианты, определяющие контравариантные составляющие тензора срезывающих сил N_*^α, тензора мембранных усилий $T_*^{\alpha\beta}$ и тензора изгибающих и крутящих моментов $L_*^{\alpha\beta}$:

срезывающую силу, нормальную к срединной поверхности, $N_*^{\alpha}n_\alpha^* ds_0^*$
составляющую в направлении λ^* мембранного усилия $T_*^{\alpha\beta}n_\alpha^*\lambda_\beta^* ds_0^*$
составляющую в том же направлении изгибающего момента $L_*^{\alpha\beta}n_\alpha^*\lambda_\beta^* ds_0^*$

Пусть dS_0^*— элемент площади S_0^* в точке A_0. Внешние силы, действующие на элемент объема, образованный нормалями к площади dS_0^*, оканчивающимися на поверхностях оболочки, также заменяем статически эквивалентной системой, приложенной в A_0.

Аналогично предыдущему находим инварианты, определяющие контравариантные составляющие тензора внешней силы F_*^i и тензора внешнего момента M_*^{α}:

нормальную составляющую внешней силы $F_*^3 dS_0^*$
составляющую в направлении λ внешней силы $F_*^{\alpha}\lambda_\alpha^* dS_0^*$
составляющую в том же направлении внешнего момента $M_*^{\alpha}\lambda_\alpha^* dS_0^*$

Средняя и гауссова кривизны деформированной поверхности определяются по формулам

$$H^* = -\frac{1}{2} a_*^{\pi\lambda} b_{\pi\lambda}^*, \qquad K^* = \frac{1}{2}\left(a_*^{\pi\gamma} b_{\pi\gamma}^* a_*^{\lambda\delta} b_{\lambda\delta}^* - b_*^{\pi\lambda} b_{\pi\lambda}^*\right) \quad (1.5)$$

Точки поверхности S_0^* до деформации лежали на поверхности S_0, относительно которой положение точек недеформированной оболочки можно определить теми же координатами x_*^i, что и после деформации, однако при этом они не образуют нормальной системы. Поэтому введем нормальную систему координат x^l так, что $x^\alpha = x_*^\alpha$ в точках поверхности S_0 и x^3 измеряется по нормали к S_0. Величины, отнесенные к этим координатам, будем обозначать через $a^{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, H, K, ... Тогда ковариантные составляющие тензоров, характеризующих относительное удлинение и изменение кривизны поверхности S_0, соответственно будут

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta}), \qquad q_{\alpha\beta} = -\mu_{\alpha\beta} + b_{\beta\pi}^* a^{\pi\omega}\varepsilon_{\alpha\omega} = b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta} \quad (1.6)$$

Будем обозначать через X_*^i объемные силы, Z_{*+}^i и Z_{*-}^i— внешние нагрузки, приложенные к поверхностям оболочки (1.4).

Введем также обозначения

$$P_*^i = \frac{Z_{*+}^i}{|n_{*+}^3|} + \frac{Z_{*-}^i}{|n_{*-}^3|}, \qquad Q_*^i = \frac{Z_{*+}^i}{|n_{*+}^3|} - \frac{Z_{*-}^i}{|n_{*-}^3|} \quad (1.7)$$

где n_{*+}^3 и n_{*-}^3— единичные векторы, проведенные в направлении внешней нормали к ограничивающим поверхностям.

Оставляя в стороне тривиальный случай $P_*^i = 0$, будем предполагать далее, что $P_*^i \sim Q_*^i$. Здесь и в дальнейшем символ $\sim$ указывает на то, что абсолютные значения сравниваемых величин одного порядка.

Условимся называть оболочку тонкой, если $h \sim \varepsilon_p$, где ε_p — максимальное относительное удлинение в пределах закона Гука. В этом случае с принятой точностью будем пренебрегать величинами порядка h по сравнению с единицей и решение называть первым приближением.

Оболочку будем считать средней толщины, если $h \sim \sqrt{\varepsilon_p}$. При этом для достижения точности, присущей теории, опирающейся на закон Гука, следует искать решение во втором приближении, пренебрегая лишь квадратами и высшими степенями h по сравнению с единицей.

Пластинку будем называть мембраной, если $h <$ или $\sim \varepsilon_p^2$. Очевидно, что все эти определения в значительной мере являются условными, например, в большинстве случаев уже при $h \leqslant \varepsilon_p^{3/4}$ оболочку практически можно считать тонкой и пренебрегать h, а при $h \leqslant \varepsilon_p$ — пластинку считать мембраной, пренебрегая изгибными напряжениями.

Порядок величин $a_{\alpha\beta}$, $b_{\pi\lambda}$, $q_{\pi\lambda}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}, \ldots$ будем обозначать соответственно через a, b, q, $\varepsilon, \ldots$ Параметры оболочек, граничные условия и внешнюю нагрузку будем считать непрерывными и достаточно плавно изменяющимися в рассматриваемой области.

§ 2. Основные соотношения теории напряженного состояния оболочки и их упрощение. Рассмотрим шесть обычных уравнений статики для оболочки.

$$\nabla_\alpha{}^* N_*{}^\alpha + b_{\alpha\beta}{}^* T_*{}^{\alpha\beta} + F_*{}^3 = 0, \quad \nabla_\beta{}^* T_*{}^{\beta\alpha} - a_*{}^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma}{}^* N_*{}^\gamma + F_*{}^\alpha = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla_\beta{}^* L_*{}^{\beta\alpha} + a_*{}^{\alpha\beta} c_{\beta\gamma}{}^* N_*{}^\gamma + M_*{}^\alpha = 0, \quad c_{\alpha\beta}{}^* T_*{}^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}{}^* L_*{}^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.2}$$

Из уравнений (2.1), пользуясь результатами § 1, можно получить

$$X_*{}^i h < \text{или} \sim F_*{}^i < \text{или} \sim h\varepsilon_p, \qquad P_*{}^i < \text{или} \sim F_*{}^i < \text{или} \sim h\varepsilon_p \tag{2.3}$$

В самом деле, например,

$$T_*{}^{\alpha\beta} < \text{или} \sim \varepsilon_p h, \qquad \nabla_\alpha{}^* N_*{}^\alpha < \text{или} \sim \varepsilon_p h$$

Следовательно, по первому из уравнений (2.1)

$$F_*{}^3 < \text{или} \sim b_{\alpha\beta}{}^* T_*{}^{\alpha\beta} < \text{или} \sim h\varepsilon_p$$

Далее, пренебрегая величинами порядка ε_p по сравнению с единицей, можно положить $a_*{}^{\alpha\beta} \approx a^{\alpha\beta}$, $c_*{}^{\gamma\lambda} \approx c^{\gamma\lambda}$ и символы Кристоффеля вычислять по метрике недеформированной срединной поверхности.

Погрешность, допускаемая при этом упрощении, может оказаться больше указанной лишь в тех исключительных случаях, когда главные члены уравнения взаимно уничтожаются. Тогда происходит так называемая потеря точности и приходится перерешать задачу, исходя из точных уравнений (2.1) и (2.2). Нам удалось обнаружить пока лишь один такой случай, а именно, при определении критического значения продольного сжимающего усилия, приложенного к тонкой цилиндрической трубке бесконечной длины.

Таким образом, ограничиваясь рассмотрением оболочек, для которых $h^2 \leqslant \varepsilon_p$, а также учитывая, что относительное удлинение линейного элемента $x_*^3 = h$ равно $hq \leqslant \varepsilon_p$ и что, кроме того, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_p$, $a \sim c <$ или ~ 1, $b <$ или ~ 1, уравнения (2.1) — (2.2) можно привести к виду (2.4)

$$N_*{}^\gamma = c^{\gamma\cdot}_{\cdot\delta} (\nabla_\pi L_*{}^{\pi\delta} + M_*{}^\delta), \qquad \nabla_\pi T_*{}^{\pi\alpha} - b_{*\gamma}^{\alpha} c^{\gamma\cdot}_{\cdot\delta} (\nabla_\pi L_*{}^{\pi\delta} + M_*{}^\delta) + F_*{}^\alpha = 0$$

$$c^{\delta\cdot}_{\cdot\gamma} \nabla_\delta (\nabla_\lambda L_*{}^{\lambda\gamma} + M_*{}^\gamma) + (b_{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}) T_*{}^{\pi\lambda} + F_*{}^3 = 0 \tag{2.5}$$

Здесь с принятой точностью

$$F_*^3 \approx 2X_*^3 h + P_*^3 + 2Q_*^3 Hh, \qquad F_*^\alpha \approx 2X_*^\alpha h + P_*^\alpha - b_\gamma^\alpha Q_*^\gamma h + 2HQ_*^\alpha h$$

$$M_*^\alpha \approx c_\beta^{\cdot\alpha} \{Q_*^\beta h + 2HP_*^\beta h^2 - b_\gamma^\beta P_*^\gamma h^2 + \frac{2}{3} h^3 X_*^\gamma (2Ha_\gamma^\beta - b_\gamma^\beta)\}$$

$$N_*^\alpha \approx -\frac{2}{3} A^{\pi\alpha\lambda\delta} \nabla_\pi (q_{\lambda\delta} h^3) + Q_*^\alpha h$$

$$T_*^{\alpha\beta} \approx 2A^{\alpha\beta\pi\lambda} \varepsilon_{\pi\lambda} h + \frac{\sigma}{1-\sigma} a^{\alpha\beta} Q_*^3 h + b_{\lambda\delta}\left(\frac{2}{3} a^{\delta\lambda} A^{\alpha\beta\pi\gamma} - \frac{\sigma}{1-\sigma} a^{\pi\gamma} A^{\alpha\beta\delta\lambda} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} a^{\delta\gamma} A^{\alpha\beta\pi\lambda} - a^{\pi\lambda} A^{\alpha\beta\delta\gamma}\right) q_{\pi\gamma} h^3 \qquad (2.6)$$

$$\frac{3}{2} L_*^{\alpha\beta} \approx c^\beta_{\cdot\pi} \{A^{\alpha\pi\lambda\delta} q_{\lambda\delta} + b_{\lambda\delta}\varepsilon_{\rho\gamma}\left(\frac{\sigma}{1-\sigma} a^{\alpha\pi} A^{\lambda\delta\rho\gamma} - 2a^{\rho\delta} A^{\alpha\pi\lambda\gamma} - \right.$$

$$\left. - a^{\pi\delta} A^{\alpha\lambda\rho\gamma} + a^{\lambda\delta} A^{\alpha\pi\rho\gamma}\right)\} h^3$$

$$A^{\alpha\beta\pi\lambda} = \frac{1}{1-\sigma^2} \{\sigma a^{\alpha\beta} a^{\pi\lambda} + (1-\sigma) a^{\alpha\pi} a^{\beta\lambda}\}$$

При этом второе уравнение (2.2) удовлетворяется. Эти выражения могут быть применены и в случае действия сосредоточенной поверхностной силы, если эту последнюю заменить такой статически эквивалентной распределенной нагрузкой, которая в точке приложения силы удовлетворяет условию (2.3), а при удалении от нее убывает по экспоненциальному закону так, что отношение единичной нагрузки к ее производной по гауссовой координате есть величина порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$.

С той же точностью условия совместности деформаций будут

$$c^{\beta\gamma}\{\nabla_\gamma q_{\alpha\beta} - a^{\pi\omega}(q_{\beta\pi} + b_{\beta\pi})(\nabla_\gamma \varepsilon_{\alpha\omega} + \nabla_\alpha \varepsilon_{\gamma\omega} - \nabla_\omega \varepsilon_{\alpha\gamma})\} = 0 \qquad (2.7)$$

$$c^{\alpha\rho} c^{\beta\omega} \{\nabla_\beta \nabla_\alpha \varepsilon_{\rho\omega} + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta} q_{\rho\omega} + b_{\rho\omega} q_{\alpha\beta}\} - a^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} K = 0 \qquad (2.8)$$

Обозначая через E_*^{ki} компоненты тензора напряжений, на ограничивающих поверхностях имеем

$$n_{k+}{}^* E_{*+}^{ki} = Z_{*+}^{\;i} \text{ при } x_*^3 = +h, \quad n_{k-}{}^* E_{*-}^{ki} = Z_{*-}^{\;i} \text{ при } x_*^3 = -h \qquad (2.9)$$

$$\begin{aligned} n_{\alpha+}^{*} &= -n_{3+}{}^* h_{,\alpha}, \qquad & n_{3+}{}^* &= (1 - n_{\alpha+}{}^* n_{*+}^{\alpha})^{1/2}, \\ n_{\alpha-}^{*} &= n_{3-}{}^* h_{,\alpha}, \qquad & n_{3-}{}^* &= -(1 - n_{\alpha-}{}^* n_{*-}^{\alpha})^{1/2} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Так как $P_*^i \sim Q_*^i$, то эти условия равносильны уравнениям (2.11)

$$E_{*+}^{3i} + E_{*-}^{3i} + (E_{*-}^{\alpha i} - E_{*+}^{\alpha i}) h_{,\alpha} = Q_*^{\,i}, \quad E_{*+}^{3i} - E_{*-}^{3i} - (E_{*-}^{\alpha i} + E_{*+}^{\alpha i}) h_{,\alpha} = P_*$$

С принятой точностью, как показывает исследование, имеем

$$E_*^{ik} \approx E_{*(0)}^{ik} + x_*^3 E_{*(1)}^{ik} + \frac{(x_*^3)^2}{2} E_{*(2)}^{ik}, \qquad X_*^i \approx X_{*(0)}^{\;i} + x_*^3 X_{*(1)}^{\;i} \quad (2.12)$$

где введены обозначения

$$2E_{*(0)}^{33} = Q_*^3 - A^{\lambda\pi\delta\gamma} \nabla_\pi (h^2 \nabla_\lambda \varepsilon_{\delta\gamma}) + \{2H\sigma a^{\pi\lambda} - (1-\sigma) b^{\pi\lambda}\} \frac{q_{\pi\lambda} h^2}{1-\sigma^2}$$

$$2E_{*(0)}^{\alpha 3} = Q_{*}^{\alpha} - A^{\alpha\beta\pi\lambda}\nabla_{\beta}(q_{\pi\lambda}h^2), \qquad E_{*(0)}^{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{1-\sigma} a^{\alpha\beta}E_{*(0)}^{33} + A^{\alpha\beta\lambda\pi}\varepsilon_{\pi\lambda}$$

$$E_{*(1)}^{33} = -X_{*(0)}^{3} - \nabla_{\pi}E_{*(0)}^{\pi 3} - A^{\delta\gamma\pi\lambda}b_{\delta\gamma}\varepsilon_{\pi\lambda}$$

$$E_{*(1)}^{\alpha 3} = -X_{*(0)}^{\alpha} - \frac{\sigma}{1-\sigma} a^{\alpha\pi}\nabla_{\pi}E_{*(0)}^{33} - A^{\lambda\alpha\pi\delta}\nabla_{\lambda}\varepsilon_{\pi\delta} \tag{2.13}$$

$$E_{*(2)}^{33} \approx A^{\lambda\delta\pi\gamma}\nabla_{\delta}\nabla_{\lambda}\varepsilon_{\pi\gamma} - \left\{\frac{2\sigma H a^{\pi\lambda} - (1-\sigma)b^{\pi\lambda}}{1-\sigma^2}\right\}q_{\pi\lambda}, \quad E_{*(2)}^{\alpha 3} = A^{\alpha\delta\pi\lambda}\nabla_{\delta}q_{\pi\lambda}$$

$$E_{*(1)}^{\alpha\beta} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} a^{\alpha\beta}\left(X_{*(0)}^{3} + \nabla_{\pi}E_{*(0)}^{\pi 3}\right) + \{2a^{\beta\delta}A^{\alpha\lambda\pi\gamma} + 2a^{\pi\beta}A^{\alpha\beta\delta\gamma} -$$
$$- \frac{\sigma}{1-\sigma}(a^{\alpha\beta}A^{\lambda\delta\pi\gamma} - a^{\gamma\pi}A^{\alpha\beta\delta\lambda})\}b_{\lambda\delta}\varepsilon_{\pi\gamma} - A^{\alpha\beta\pi\lambda}q_{\pi\lambda}$$

$$(\sigma^2-1)E_{*(2)}^{\alpha\beta} = [\sigma a^{\alpha\beta}b^{\pi\lambda} + 5\sigma b^{\alpha\beta}a^{\pi\lambda} + 3(1-\sigma)(b^{\alpha\pi}a^{\beta\lambda} + b^{\beta\lambda}a^{\alpha\pi})]q_{\lambda\pi} +$$
$$+ [\sigma(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\delta}a^{\pi\gamma} + a^{\alpha\beta}a^{\delta\gamma}a^{\pi\lambda}) + (1-\sigma)(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\beta\gamma})a^{\pi\lambda}]\nabla_{\delta}\nabla_{\lambda}\varepsilon_{\pi\gamma}$$

В выражениях $E^{\alpha\beta}$ наряду с членами одного порядка с ε_p удержаны и члены порядка $h\varepsilon_p$. Величины же E^{i3} одного порядка с $h\varepsilon_p$, поэтому в соответствующих выражениях (2.13) сохранены лишь главные члены.

При этом условия (2.10) удовлетворяются с принятой точностью. Если поверхностная нагрузка односторонняя, то условия (2.11) совпадают с (2.10) и, следовательно, также удовлетворяются. В общем случае условия (2.11) удовлетворяются на основании уравнений (2.4)—(2.8), если вместо выражений (2.13) для напряжений пользоваться более точными, приведенными в статье [2].

Таким образом, задача приводится к определению интегралов системы уравнений (2.4)—(2.8), удовлетворяющих условиям на граничных срезах.

§ 3. Деформация оболочки при малых изгибах. Пусть

$$q < \text{или} \sim \varepsilon_p, \qquad q_{,\alpha} \sim q, \qquad \varepsilon_{,\alpha} \sim \varepsilon \tag{3.1}$$

При этом внешние и внутренние силы можно считать отнесенными к недеформированной поверхности. Если $\varepsilon \sim \varepsilon_p$, то, пренебрегая h^2 по сравнению с единицей, из (2.6) и (2.4) находим

$$T^{\alpha\beta} = 2A^{\alpha\beta\pi\lambda}\varepsilon_{\pi\lambda}h + \frac{\sigma}{1-\sigma}a^{\alpha\beta}Q^3h, \qquad L^{\alpha\beta} \sim N^{\gamma} \sim T^{\alpha\beta}h^2 \sim \varepsilon h^3 \tag{3.2}$$

$$\nabla_{\beta}T^{\beta\alpha} + F^{\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

Далее различаем следующие типы задач.

Тип I а. Оболочка конечной кривизны ($b \sim 1$). В этом случае с принятой точностью уравнение (2.5) может быть заменено на

$$b_{\pi\lambda}T^{\pi\lambda} + F^3 = 0 \tag{3.4}$$

Из системы (3.3) и (3.4) можно определить $T^{\alpha\beta}$ (эта задача теории безмоментного напряженного состояния решена для ряда поверхностей). Решая затем систему алгебраических уравнений (3.2), имеем

$$2\varepsilon_{\pi\lambda}h = (a_{\pi\alpha}a_{\lambda\beta} - \sigma c_{\pi\alpha}c_{\lambda\beta})T^{\alpha\beta} - \sigma Q^3 h a_{\pi\lambda} \tag{3.5}$$

Подставляя эти выражения в (2.7) и (2.8), для определения $q_{\alpha\beta}$ имеем

$$\begin{gathered}\nabla_\gamma G^{\delta\gamma} = b_\beta{}^\omega c^{\alpha\delta} c^{\beta\gamma} (\nabla_\gamma \varepsilon_{\alpha\omega} + \nabla_\alpha \varepsilon_{\gamma\omega} - \nabla_\omega \varepsilon_{\alpha\gamma}) \\ b_{\delta\gamma} G^{\delta\gamma} = -c^{\alpha\rho} c^{\beta\omega} \nabla_\beta \nabla_\alpha \varepsilon_{\rho\omega} + a^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} K, \qquad G^{\delta\gamma} = -c^{\alpha\delta} c^{\beta\gamma} q_{\alpha\beta}\end{gathered} \tag{3.6}$$

Однородная часть этих уравнений одинакова по своей структуре с уравнениями безмоментной теории.

Тип I b. Пластинка весьма малой кривизны ($b <$ или $\sim \varepsilon_p$). При этом, если пренебрегать ε_p по сравнению с единицей, уравнение (2.8) примет вид

$$c^{\alpha\rho} c^{\beta\omega} \nabla_\beta \nabla_\alpha \varepsilon_{\rho\omega} = 0 \tag{3.7}$$

В силу малости гауссовой кривизны, изменение порядка ковариантного дифференцирования в этом случае дает погрешность, меньшую допущенной выше. Пусть, кроме того, $F^\alpha = 0$. Тогда уравнения (3.3) удовлетворяются, если положить

$$T^{\beta\alpha} = c^{\mu\beta} c^{\nu\alpha} \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi \tag{3.8}$$

По уравнению (3.4) в данном случае $F^3 \sim Q^3 \sim \varepsilon_p{}^2 h$. Поэтому из (3.2) и (3.8) следует

$$2 \varepsilon_{\rho\omega} h = (a_{\rho\alpha} a_{\omega\beta} - \sigma c_{\rho\alpha} c_{\omega\beta}) c^{\mu\beta} c^{\nu\alpha} \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi \tag{3.9}$$

Подставляя эти выражения в (3.7) и учитывая, что $c^{\gamma\rho} c^{\nu\alpha} a_{\rho\alpha} = a^{\gamma\nu}, \ldots,$ приходим к уравнению, представляющему собой обобщение бигармонического уравнения на случай пластинки переменной толщины:

$$(a^{\rho\gamma} a^{\delta\omega} + \sigma c^{\rho\gamma} c^{\delta\omega}) \nabla_\delta \nabla_\gamma \left(\frac{1}{h} \nabla_\rho \nabla_\omega \Phi \right) = 0 \tag{3.10}$$

Условия совместности (2.7) этом случае имеют вид $c^{\beta\gamma} \nabla_\gamma q_{\alpha\beta} \approx 0$. Они удовлетворяются при

$$q_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \nabla_\alpha w \tag{3.11}$$

Подставляя (3.8), (3.11) и (2.6), уравнение (2.5) с принятой точностью заменяем приближенным уравнением для определения прогибов

$$\begin{gathered}-\frac{2}{3} A^{\lambda\delta\mu\nu} \nabla_\delta \nabla_\lambda (h^3 \nabla_\nu \nabla_\mu w) + c^{\mu\beta} c^{\nu\alpha} (\nabla_\beta \nabla_\alpha w + b_{\alpha\beta}) \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi + \\ + F^3 + c_\gamma{}^{\delta\cdot} \nabla_\delta M^\gamma = 0\end{gathered} \tag{3.12}$$

Это уравнение может быть также использовано для исследования потери устойчивости тонкой пластинки, причем $\varepsilon < \varepsilon_p$, $q < \varepsilon$.

Тип Ic. Оболочка малой кривизны ($b \sim \sqrt{\varepsilon_p}$). Для решения задачи в этом случае, кроме (2.5) и (3.3), имеем уравнения

$$c^{\alpha\rho} c^{\beta\omega} (\nabla_\beta \nabla_\alpha \varepsilon_{\rho\omega} + b_{\rho\omega} q_{\alpha\beta}) = 0, \qquad c^{\beta\gamma} \nabla_\gamma q_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.13}$$

При этом в последнем уравнении мы пренебрегли величинами порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей. Эта точность достаточна при определении изменений кривизны в случае превалирующей деформации растяжения-сжатия. При подстановке (3.11) последнее уравнение (3.13) приближенно удовлетворяется. Также удовлетворяется уравнение (3.3) при подстановке (3.8) и при условии $F^\alpha = 0$, а уравнение (2.5) приводится к виду (3.12). Это последнее уравнение и первое уравнение (3.13), преобразованное с учетом (3.5), (3.8) и (3.11), образуют систему двух нелинейных уравнений относительно Φ и w.

Таким образом, решение задач типа I (за исключением типа I c) с точностью, присущей теории, основанной на законе Гука, приводится к интегрированию линейных дифференциальных уравнений.

При пренебрежении величинами порядка h эта задача приводится к известным уравнениям линейной теории, причем определение напряжения от изгиба становится излишним, а типы I a и I c сливаются.

§ 4. Деформация оболочки при средних изгибах. В этом случае $q \sim \sqrt{\varepsilon_p}$. Пусть, кроме того,

$$q_{,\alpha} \sim q, \qquad \varepsilon_{,\alpha} \sim \varepsilon, \qquad hq < \text{или} \sim \varepsilon \leqslant \varepsilon_p \tag{4.1}$$

При этом разделение системы уравнений равновесия (2.4) и (2.5) и уравнений совместности (2.7) и (2.8) на две системы уравнений, содержащих лишь $\varepsilon_{\alpha\beta}$ или $q_{\pi\lambda}$, с принятой точностью оказывается невозможным. Кроме того, эта система нелинейная. Линеаризация ее возможна лишь при пренебрежении величинами порядка h по сравнению с единицей, да и то не во всех случаях, рассмотренных в этом и в следующих параграфах. Поэтому, оставаясь в пределах линейной теории оболочек, нерационально искать решения во втором приближении и, следовательно, гипотеза Кирхгофа-Лява, дающая, как известно [4], погрешность порядка h по сравнению с единицей, является обоснованной в этом первом приближении. Это было доказано в работе [5] иначе, чем здесь [1]. В теории тонких оболочек точность первого приближения является достаточной и в случае немалых смещений, если деформации остаются малыми. В случае оболочек средней толщины желательно решение во втором приближении, что оказывается возможным, как мы видели, для деформации типа I. Сохранение этой же степени точности в дальнейшем сопряжено с решением системы шести нелинейных уравнений относительно $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $q_{\lambda\mu}$. Поэтому в последующем мы пренебрегаем h по сравнению с единицей, хотя это дает для оболочек средней толщины погрешность порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей.

Таким образом, при условии (4.1) имеем (4.2

$$T_*^{\alpha\beta} \approx 2\, A^{\alpha\beta\pi\lambda}\, \varepsilon_{\pi\lambda}\, h, \qquad L_*^{\alpha\beta} \approx \frac{2}{3}\, C^{\beta\cdot}_{\pi}\, A^{\alpha\pi\lambda\delta}\, q_{\lambda\delta}\, h^3, \qquad F_*^{3} \approx 2\, X_*^{3}\, h + P_*^{3}$$

$$F_*^{\alpha} \approx 2\, X_*^{\alpha}\, h + P_*^{\alpha}, \qquad M_*^{\alpha} \approx c_{\beta}^{\cdot\alpha}\, Q_*^{\beta}\, h, \qquad N_*^{\alpha} \approx -\frac{2}{3}\, A^{\pi\alpha\lambda\delta}\, \nabla_\pi\, (q_{\lambda\delta}\, h^3)$$

Далее различаем следующие типы задач.

Тип IIa. Оболочка конечной кривизны ($b \sim 1$). В этом случае уравнения равновесия можно заменить приближенными уравнениями

$$\nabla_\pi T_*^{\pi\alpha} + F_*^{\alpha} = 0, \qquad (b_{\alpha\beta} + q_{\alpha\beta})\, T_*^{\alpha\beta} + F_*^{3} = 0 \tag{4.3}$$

[1] Заметим, что в случае плоских плит и пластинок малой кривизны гипотеза Кирхгофа приводит к меньшей погрешности, а именно, порядка h^2 по сравнению с единицей, для плит средней толщины.

а условия совместности деформаций при обозначениях (3.6) будут

$$\nabla_\gamma G^{\delta\gamma} = 0, \qquad b_{\delta\gamma} G^{\delta\gamma} = 0 \tag{4.4}$$

Эти последние уравнения содержат погрешность самое большее порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей, что в случае тонких оболочек соответствует пренебрежению $\sqrt{h}$ по сравнению с единицей при определении изгиба. Однако в этом случае удлинение от изгиба $hq \sim \varepsilon_p{}^{3/2}$, поэтому влияние указанной погрешности на величину суммарного напряжения не выходит за пределы принятой точности.

Об интегрировании уравнений (4.4) было сказано выше. Подставляя найденные значения $q_{\alpha\beta}$ в (4.3), приходим к системе уравнений относительно $T_*{}^{\alpha\beta}$, которая сложнее системы уравнений безмоментной теории. При этом следует учесть, что если внешние силы даны в компонентах по осям до деформации, то выражения их компонент по деформированным осям будут содержать искомые угля поворотов. Уравнения (4.3) переходят в обычные линейные уравнения безмоментной теории, если пренебрегать $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей. Поэтому в случае «тонких» оболочек при определении напряженного состояния, зависящего от изгиба, линейная теория дает погрешность (порядка $\sqrt{h}$) большую, чем погрешность от принятия гипотезы Кирхгофа.

Тип IIb. Пластинка малой кривизны ($b <$ *или* $\sim \sqrt{\varepsilon_p}$). В этом случае имеем первое уравнение (4.3), первое уравнение (4.4), уравнение (2.5) и уравнение

$$c^{\alpha\rho} c^{\beta\omega} \left(\nabla_\beta \nabla_\alpha \varepsilon_{\rho\omega} + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta} q_{\rho\omega} + b_{\rho\omega} q_{\alpha\beta} \right) = 0 \tag{4.5}$$

причем допускается погрешность самое большее порядка ε_p.

Пусть $F_*{}^\alpha = 0$. Тогда указанные уравнения (4.3) и (4.4) удовлетворяются, если ввести функцию напряжения согласно (3.8) и функцию прогиба согласно (3.11), а уравнения (2.5) и (4.5) приводятся к виду

$$-\frac{2}{3} A^{\lambda\delta\mu\nu} \nabla_\delta \nabla_\lambda (h^3 \nabla_\nu \nabla_\mu w) + (b_{\alpha\beta} + \nabla_\beta \nabla_\alpha w) c^{\mu\alpha} c^{\nu\beta} \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi + {} + F_*{}^3 + \nabla_\delta (Q_*{}^\delta h) = 0 \tag{4.6}$$

$$(a^{\alpha\mu} a^{\beta\nu} - \sigma c^{\alpha\mu} c^{\beta\nu}) \nabla_\beta \nabla_\alpha \left(\frac{1}{h} \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi \right) + {} + c^{\alpha\rho} c^{\beta\omega} (\nabla_\omega \nabla_\rho w + b_{\rho\omega}) \nabla_\beta \nabla_\alpha w = 0 \tag{4.7}$$

Эти уравнения не линеаризируются даже при пренебрежении $\sqrt{\varepsilon_p}$.

В частности, если круговая цилиндрическая оболочка малой кривизны и постоянной толщины находится под действием нормального внешнего давления и продольного сжатия, действующего на концы, то, приняв за $x^1 = x$ координату, измеряемую по образующей, за $x^2 = y$ безразмерное расстояние, измеряемое по параллели, имеем

$$-D \triangle\triangle w + w_{,xx} \Phi_{,yy} + w_{,yy} \Phi_{,xx} - 2 w_{,yx} \Phi_{,xy} - \frac{1}{R} \Phi_{,xx} + P_*{}^3 = 0 \tag{4.8}$$

$$\triangle \triangle \Phi + 2h (w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}{}^2) - \frac{2h}{R} w_{,xx} = 0 \qquad \left(D = \frac{2}{3} \frac{h^3}{1-\sigma^2} \right) \tag{4.9}$$

Тип IIb был рассмотрен в работе [2], а уравнение (4.9) было выведено в нашей статье [6]. Напряженное состояние этого типа может возникнуть и при изгибе пластинки средней толщины с закрепленными краями, причем появляющиеся мембранные напряжения достигают того же порядка, что и изгибные, если прогибы одного порядка с толщиной.

§ 5. Деформация тонкой пластинки при больших смещениях. *Тип IIIa. Деформация с превалирующим изгибом.* В этом случае

$$b < \text{или} \sim 1, \quad q_{,\alpha} \sim q \sim 1, \quad hq \sim \varepsilon_p, \quad \varepsilon_{,\alpha} \sim \varepsilon < \text{или} \sim \varepsilon_p^2 \tag{5.1}$$

Из (2.7) и (2.8) имеем приближенные уравнения

$$c^{\beta\gamma} \nabla_\gamma q_{\alpha\beta} = 0, \qquad c^{\alpha\rho} c^{\beta\omega} (q_{\rho\omega} + 2 b_{\rho\omega}) q_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.2}$$

Мембранные напряжения должны быть малы согласно (5.1). Для этого внешние силы и моменты должны согласно (2.5) удовлетворять условию $F_*^3 \sim \varepsilon_p^3$, $M_*^\gamma \sim \varepsilon_p^3$. Если на граничных срезах даны не только изгибающие моменты, но и мембранные усилия, то задача приводится к определению интегралов системы уравнений (5.2), (2.4) и (2.5); решение ее для некоторых случаев дано в работе [2].

В случае развертывающихся поверхностей (или поверхностей малой гауссовой кривизны) уравнения (5.2) удовлетворяются при подстановке (3.11). При этом функция „прогиба“ определяется из уравнения

$$b_{22}\nabla_1 \nabla_1 w + b_{11} \nabla_2 \nabla_2 w - 2 b_{12} \nabla_1 \nabla_2 w + \nabla_1 \nabla_1 w \cdot \nabla_2 \nabla_2 w - \\ -(\nabla_1 \nabla_2 w)^2 = 0 \tag{5.3}$$

Если за координатные линии x^1 и x^2 принять прямолинейные образующие и их ортогональные траектории, разрешающее уравнение (5.3) приводится к виду

$$w_{,11} w_{,22} - w_{,12}^2 + b_{22} w_{,11} + \frac{1}{2} a_{22,1} w_{,1} w_{,11} - \frac{1}{2 a_{22}} a_{22,2} w_{,2} w_{,11} + \\ + \frac{1}{a_{22}} a_{22,1} w_{,12} w_{,2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_{22}} a_{22,1}\right)^2 w_{,2}^2 = 0 \tag{5.4}$$

Оба семейства соответствующих характеристик совпадают и выражаются уравнениями [7]

$$dw - w_{,1} dx^1 - w_{,2} dx^2 = 0, \qquad dw_{,1} - \frac{1}{2 a_{22}} a_{22,1} w_{,2} dx^2 = 0 \\ dw_{,2} - \frac{1}{2 a_{22}} a_{22,1} w_{,2} dx^1 + \left(b_{22} + \frac{1}{2} a_{22,1} w_{,1} - \frac{1}{2 a_{22}} a_{22,2} w_{,2}\right) dx^2 = 0 \tag{5.5}$$

В случае цилиндрической оболочки, полагая $x^1 = x$ и $x^2 = y$, где x — расстояние, измеряемое по образующей, и y — длина дуги направляющей кривой (поделенные на L), имеем $a_{22} = 1$, $b_{22} = b_{22}(y)$.

Уравнения характеристик допускают три интегрируемые комбинации:

$$d\Phi_1 = 0, \qquad d_2\Phi = 0, \qquad d\Phi_3 = 0 \tag{5.6}$$

где

$$\Phi_1 = w_{,x}, \qquad \Phi_{2y} = w, + \int b_{22} dy, \qquad \Phi_3 = w - x\Phi_1 - y\,\Phi_2 + \iint b_{22}\, dy\, dy$$

Следовательно, полный интеграл системы определяется уравнениями

$$\Phi_3 = C \qquad \Phi_1 = \varphi(C), \qquad \Phi_2 = \psi(C)$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Общий интеграл уравнения (5.4) получим, исключая C из уравнений

$$\Phi = \Phi_3 - C = w - C - x\varphi(C) - y\psi(C) + f(y) = 0 \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = -1 - x\varphi'(C) - y\psi'(C) = 0, \qquad f(y) = \iint b_{22}\,dy\,dy \tag{5.8}$$

Предположим далее, что края цилиндрической пластинки свободны и находятся под действием таких распределенных изгибающих и скручивающих моментов, которые вызывают изменения кривизны:

$$q_{11} = w_{,xx} = \alpha \neq 0, \qquad q_{22} = w_{,yy} = \beta, \qquad q_{12} = w_{,xy} = \gamma \tag{5.9}$$

Из уравнения (5.7) с учетом (5.8) находим

$$\begin{gathered} w_{,x} = \varphi, \quad w_{,y} = \psi - f_{,y}, \quad w_{,xx} = \varphi' C_{,x} = \alpha, \quad w_{,yy} = \psi' C_{,y} - f_{,yy} = \beta \\ w_{,xy} = \psi' C_{,x} = \varphi' C_{,y} = \gamma, \quad \gamma^2 = \alpha(b_{22} + \beta), \quad \frac{\gamma^2 y}{\alpha C_{,y}} + \frac{\alpha x}{C_{,x}} = -1 \end{gathered} \tag{5.10}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} -dC = (\alpha x + \gamma y)\,dx + \left(\frac{\gamma^2}{\alpha}\,y + \gamma x\right)dy \\ d\varphi = \alpha dx + \gamma dy, \qquad d\psi = \gamma dx + (\beta + b_{22})\,dy \end{gathered} \tag{5.11}$$

Отсюда можно найти выражения C, φ и ψ через заданные α, β, γ, причем должны удовлетворяться условия интегрируемости уравнений (5.11)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma^2}{\alpha}\right) = \frac{\partial \beta}{\partial x} \tag{5.12}$$

Например, если $\alpha = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ и $\alpha(b_{22} + \beta) = \gamma^2$, то из уравнений (5.11) легко находим

$$\begin{gathered} C = -\frac{\gamma^2 y^2}{2\alpha} - \gamma xy - \frac{\alpha x^2}{2}, \qquad \varphi = \alpha x + \gamma y, \qquad \psi = \frac{\gamma^2}{\alpha}\,y + \gamma x \\ w = \frac{\gamma^2 y^2}{2\alpha} + \frac{\alpha x^2}{2} + \gamma xy - f(y) \end{gathered} \tag{5.13}$$

При этом φ и ψ являются функциями от C, так как якобианы $D(C, \varphi; x, y) = 0$, $D(C, \psi; x, y) = 0$. В частности, $\beta = \gamma^2/\alpha$ при $b_{22} = 0$.

Если $\alpha = 0$, это решение непригодно и пластинка может получить изгибы данного типа лишь при сохранении цилиндрической формы.

§ 6. Краевой эффект. В § 3—5 мы классифицировали задачи, в которых компоненты деформации и упругого усилия — величины одного порядка со своими производными по гауссовым координатам. Рассмотрим теперь интегралы типа краевого эффекта (без учета наложения решений), не удовлетворяющие этому условию. Пусть в пограничной зоне контура $x^1 = \text{const}$, не имеющего общих участков с асимптотическими линиями поверхности, имеем

$$b_{22}^* \sim \varepsilon_p^{\beta}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_{\alpha\beta,2} \sim \varepsilon_p^{m}, \qquad q_{11} \sim \varepsilon_p^{n}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta,1} \sim \varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon_p^{-s} \tag{6.1}$$

$$(\beta \geqslant 0, \ \ m \geqslant 1, \ \ n \geqslant 0, \ \ s \geqslant 1/4)$$

Напряженное состояние можно назвать смешанным, если

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim h q_{11}\, \varepsilon_p{}^t, \qquad -{}^1/_2 \leqslant t \leqslant {}^1/_2, \qquad h \sim \varepsilon_p{}^{m-n-t} \tag{6.2}$$

По уравнениям (2.4), (2.7) и (6.1) для нецилиндрической оболочки во всех случаях, кроме особого случая, рассмотренного ниже, имеем

$$T^{11} \sim T^{12} \sim T^{22}\, \varepsilon_p{}^s, \qquad q_{12} \sim q_{22} \sim q_{11}\, \varepsilon_p{}^s \tag{6.3}$$

и также для оболочек цилиндрических или мало отличающихся от них

$$T^{11} \sim T^{12}\, \varepsilon_p{}^s \sim T^{22}\, \varepsilon_p{}^{2s}, \qquad q_{22} \sim q_{12}\, \varepsilon_p{}^s \sim q_{11}\, \varepsilon_p{}^{2s} \tag{6.4}$$

При этом из уравнения равновесия (2.5) и условия совместности (2.8) путем сравнения главных членов приходим к заключению, что

$$q_{11},_{11} h^2 \sim b_{22}{}^* \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon_{22},_{11} \sim b_{22}{}^* q_{11}, \qquad b_{22}{}^* = b_{22} + q_{22} \tag{6.5}$$

Отсюда с учетом (6.1) и (6.2) находим

$$\beta = m - n - 2s, \qquad t = 0 \tag{6.6}$$

Последнее из этих равенств показывает, что в пограничной зоне удлинения от изгиба одного порядка с удлинениями от растяжения-сжатия. Рассмотрим далее важнейшие случаи краевого эффекта.

Тип IVa. Краевой эффект в оболочке при малом изгибе ее в целом.

$$b_{22} \sim 1, \qquad m = 1, \qquad \beta = 0 \tag{6.7}$$

Обычное приближенное решение, основанное на пренебрежении величинами деформаций по сравнению с их первыми производными, предполагает допущение пренебрежения величинами порядка $\sqrt{h}$ по сравнению с единицей. При этом для линеаризации уравнений равновесия и уравнений совместности деформации мы заменяем $b_{22}{}^*$ через b_{22}, пренебрегая q_{22} по сравнению с единицей. Оба пренебрежения одного порядка, если $q_{22} \sim \sqrt{h}$, что возможно для нецилиндрической оболочки, как видно из (6.2), (6.3), (6.6) и (6.7), при $n = 0$, $s = {}^1/_2$, $h \sim \varepsilon_p$. В случае же цилиндрической оболочки погрешность от линеаризации порядка ε_p.

Таким образом, это приближенное решение является логичным в случае тонкой оболочки, когда $h \sim \varepsilon_p$, причем допускается погрешность порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей. Необходимо лишь отметить, что в этом случае прибавление к общему решению интеграла, соответствующего «чисто изгибному» напряженному состоянию, излишне, так как напряжения от изгиба при малом изгибе оболочки в целом будут малы. Если $h < \varepsilon_p$, то линеаризация разрешающей системы уравнений недопустима даже при пренебрежении величинами порядка $\sqrt{h}$. Если же

$$\varepsilon_p < h < \text{или} \sim \sqrt{\varepsilon_p} \tag{6.8}$$

то можно рассчитывать на уточнение решения задачи краевого эффекта, сохраняя величины порядка $\sqrt{h}$ и пренебрегая h по сравнению с единицей, применяя при этом линейную теорию и гипотезу Кирхгофа. Такое решение было предложено нами в работе [8]. Погрешность его не более величины порядка h по сравнению с единицей, если

$$\varepsilon_p{}^{2/3} \leqslant h \leqslant \varepsilon_p{}^{1/2}$$

В самом деле, при $\beta = 0$ погрешность от пренебрежения q_{22} по сравнению с b_{22} будет одного порядка с h, если по (6.1) и (6.2) $m-n=n+s$. Кроме того, по (6.6) $m-n-2s=0$. Для совместности этих равенств должно быть $n=s$. Поэтому, если $m=1$, т. е. напряжения предельные, то $n=s={}^1/_3$ и, следовательно, $h\sim\varepsilon_p{}^{2/3}$.

При меньших значениях h погрешность линейной теории, а следовательно, и решения [8] становится величиной порядка h^r $(r<1)$ по сравнению с единицей. Например, при $h\sim\varepsilon_p{}^{3/4}$, $r={}^5/_6$. При $h\sim\varepsilon_p$ эта погрешность становится величиной порядка $\sqrt{h}$ по сравнению с единицей и наше уточнение решения теряет смысл в пределах линейной теории.

В пологой оболочке, для которой $b_{22}\sim\varepsilon_p{}^{1/4}$, при условии (6.8) явление краевого эффекта не имеет ясно выраженного характера, а при $h\sim\varepsilon_p$, $m=1$ имеем $s={}^3/_8$, $n=0$, $q_{11}\sim 1$, $q_{22}\sim\varepsilon_p{}^{3/8}$ в общем случае и $q_{22}\sim\varepsilon_p{}^{3/4}$ в случае цилиндрической оболочки. Пренебрегая q_{22} по сравнению с b_{22} в общем случае, мы необоснованно считаем $\varepsilon_p{}^{3/8}$ малым по сравнению с $\varepsilon_p{}^{1/4}$. Поэтому краевой эффект в пологой оболочке можно определять по линейной теории, пренебрегая $\sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей, только в случае цилиндрической оболочки, а в остальных случаях упрощенные линейные уравнения равновесия, предложенные В. З. Власовым для «пологих» оболочек, не могут считаться удовлетворительными.

При $b_{22}<$ или $\sim\sqrt{\varepsilon_p}$ даже в очень тонких оболочках краевой эффект рассматриваемого типа не имеет резко выраженного характера.

В статье [9] Ю. Н. Работнов вводит в рассмотрение «безмоментный» краевой эффект, который может иметь место в мембране (при $h<$ или $\sim\varepsilon_p{}^2$), растягиваемой без изгиба вне пограничной зоны. Это соответствует в наших обозначениях случаю, когда $t=-1$. Очевидно, возможны и другие случаи краевого эффекта этого частного типа.

Тип IVb. Краевой эффект при больших изгибах тонкой оболочки в целом. В этом случае

$$q_{11}\sim q_{22}\sim q_{12}\sim 1 \tag{6.9}$$

и сравнения (6.3) или (6.4) не имеют места при одновременном выполнении условий (6.1), (6.2), (6.5) и (6.6). Для иллюстрации задач этого типа рассмотрим определение сил и моментов, которые должны быть приложены к прямолинейным краям тонкой круговой цилиндрической пластинки для сохранения ее цилиндрической (или весьма близкой к ней) формы после сильного изгиба. Пусть $x^1=x$ и $x^2=y$, где x — расстояние, измеренное по образующей, и y — расстояние, измеренное по параллели до деформации (поделенные на ширину пластинки L), причем

$$-b\leqslant x\leqslant b,\qquad 0\leqslant y\leqslant 1,\qquad b=\frac{l}{L}>\text{или}\sim 1$$

где $2l$ — длина пластинки. Тогда (6.10)

$$a_{11}=a_{22}=c_{12}=1,\ a_{12}=b_{12}=b_{11}=0,\ b_{22}=-\frac{1}{R},\qquad b_{22}{}^*=-\frac{1}{R^*}=\text{const}$$

Уравнения 2.7) удовлетворяются, если пренебрегать ε_p по сравнению с единицей, и

$$\varepsilon_{12}=0,\quad q_{12}=0,\quad q_{11}=q_{11}(x),\quad q_{22}=-\frac{1}{R^*}+\frac{1}{R}\approx q_{22}{}^\circ=\text{const} \tag{6.11}$$

Так как $F_*{}^i = 0$, $M^8 = 0$, то уравнения (2.4) удовлетворяются, если

$$T_*{}^{11}{}_{,x} = 0, \qquad T_*{}^{22}{}_{,y} = 0 \tag{6.12}$$

При этом должны удовлетворяться при $x = \pm b$ граничные условия

$$T_*{}^{11} = 0, \quad -L_{12} = D(q_{11} + \sigma q_{22}) = 0, \quad -N^1 = Dq_{11},_1 = 0 \tag{6.13}$$

Из (6.12) и первого условия (6.13) следует, что

$$T_*{}^{11} = 0, \qquad \varepsilon_{11} = -\sigma\varepsilon_{22}, \qquad T_*{}^{22} = 2h\varepsilon_{22} \tag{6.14}$$

При этом уравнения (2.5) и (2.8) приводится к виду

$$2b_{22}{}^* \varepsilon_{22} - Dq_{11},_{xx} = 0, \qquad \varepsilon_{22},_{xx} + b_{22}{}^* q_{11} = 0 \tag{6.15}$$

или

$$q_{11},_{xxxx} + 4\lambda^4 q_{11} = 0, \qquad \lambda = \left(\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{2hR^*}\right)^{1/2} \tag{6.16}$$

Решение должно быть четной функцией от x. Следовательно,

$$q_{11} = C_1 \operatorname{ch}\lambda x \cos\lambda x + C_2 \operatorname{sh}\lambda x \sin\lambda x \tag{6.17}$$

Из второго и третьего условий (6.13), пользуясь приближенным соотношением $\operatorname{ch}\lambda b \approx \operatorname{sh}\lambda b$, находим

$$C_1 \approx -\sigma q_{22}{}^{\circ} \frac{\cos\lambda b + \sin\lambda b}{\operatorname{ch}\lambda b}, \qquad C_2 \approx \sigma q_{22}{}^{\circ} \frac{\cos\lambda b - \sin\lambda b}{\operatorname{ch}\lambda b}$$

После этого вычисление искомого усилия по (6.14) и изгибающего момента по формуле

$$L^{21} = -D(q_{22}{}^{\circ} + \sigma q_{11}), \qquad D = \frac{2}{3}\frac{h^3}{1-\sigma^2}$$

не представляет затруднений. Частный случай этой задачи при $R = \infty$ иным путем был рассмотрен в работе [10]. Исследование напряженного состояния упругой оболочки с учетом начальных напряжений можно провести, пользуясь уравнениями данной статьи, а также формулами, выражающими деформацию срединной поверхности и изменения ее кривизны через смещение, данными нами в заметке [11].

Поступила в редакцию
18 VI 1948

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 2.
2. Wei-Zang-Chien. The instrinsic theory of thin shells and plates. Quarterly of applied mathematics. Vol. I. No. 4; vol. II, No. 1—2.
3. Х. М. Муштари. ДАН СССР. 1947. Т. 58. № 6.
4. В. В. Новожилов и Р. Финкельштейн ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 5.
5. Х. М. Муштари. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
6. Х. М. Муштари. Труды Казанского авиац. института. 1946. Вып. 17.
7. E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. T. I.
8. Х. М. Муштари. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 2
9. Ю. Н. Работнов. ПММ. 1946. Т. X. № 5—6.
10. А. Ляв. Математическая теория упругости (§ 335 Д)
11. Х. М. Муштари. Тр. Казанского химико-технолог. института. 1948. Вып. 13.