Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК В ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Н. А. Алумяэ
(Таллин)

Целью настоящей работы является вывод основных дифференциальных уравнений, хотя и приближенных, но с достаточной точностью описывающих состояния равновесия тонкостенных упругих оболочек после потери устойчивости основной формы равновесия. Попутно выводится система дифференциальных уравнений для определения нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости основной формы равновесия и выясняется качественный вид деформации после потери устойчивости. Однако результаты, полученные в первых трех разделах, более общие и применимы при исследовании других задач равновесия тонкостенных упругих оболочек при конечных перемещениях.

В работе приняты следующие допущения: (1) несмотря на конечные перемещения точек оболочки в послекритической стадии, деформация оболочки остается малой; (2) применима кинематическая гипотеза Кирхгофа-Лява о деформации оболочки; (3) напряженное состояние основной формы равновесия принимается безмоментным.

1. Деформация срединной поверхности оболочки при конечных перемещениях. Срединная поверхность оболочки предполагается отнесенной к внутренним координатам x^1, x^2. В дальнейшем будут употребляться следующие обозначения:

$\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x^1, x^2), $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$;

$\mathbf{r}_i$ — координатные векторы, $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$;

a_{ij} — компоненты основной метрической формы, $a_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$; они же компоненты вертора;

a — дискриминат основной метрической формы, $a = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$;

c_{ij} — компоненты дискриминантного тензора, $c_{ii} = 0$, $c_{12} = -c_{12} = \sqrt{a}$;

$\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, $2\mathbf{n} = c^{\alpha\beta}\, \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta$;

b_{ij} — компоненты второй метрической формы, $b_{ij} = \mathbf{n} \cdot \partial^2 \mathbf{r} / \partial x^i \partial x^j$;

∇_j — символ ковариантного дифференцирования.

Пусть $\mathbf{r}^*$ будет радиус-вектор точки после деформации, положение которой до деформации задано радиусом-вектором $\mathbf{r}$; вообще в дальнейшем будем снабжать звездочкой все величины, относящиеся к деформированной срединной поверхности. Внутренние координаты x^1, x^2 рассматриваемой точки при деформации не изменяются.

Преобразование линейных элементов поверхности $d\mathbf{r}$ при деформации в $d\mathbf{r}^*$ можно представить однородным аффинным преобразованием бесконечно малой окрестности

$$d\mathbf{r}^* = d\mathbf{r} + d\mathbf{r}\cdot \boldsymbol{V} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{V}$—аффинор перемещения. Рассмотренное преобразование линейных элементов в окрестности некоторой точки поверхности можно разложить на вращение без деформации поверхности и на последующее симметричное преобразование [1], называемое чистой деформацией, относительно основного базиса $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{n}$, после вращения, скажем, $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{m}$.

Пусть линейный элемент $d\mathbf{r}$ при вращении преобразуется в линейный элемент $d\mathbf{p}$. При помощи аффинора вращения $\boldsymbol{P}$ это можно представить как изометрическое преобразование бесконечно малой окрестности

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{r} + d\mathbf{r}\cdot \boldsymbol{P} \tag{1.2}$$

как частный случай из (1.2) получаем

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i\cdot \boldsymbol{P}, \qquad 2\mathbf{m} = c^{\alpha\beta}\,\mathbf{p}_\alpha \times \mathbf{p}_\beta \tag{1.3}$$

По условию изометрического преобразования

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_i\cdot \mathbf{r}_j \tag{1.4}$$

Чистая деформация дается симметричным аффинным преобразованием бесконечно малой окрестности после вращения:

$$d\mathbf{r}^* = d\mathbf{p} + d\mathbf{p}\cdot \boldsymbol{D} \tag{1.5}$$

Аффинор $\boldsymbol{D}$ — назовем его первым тензором деформации срединной поверхности — симметричен по определению; значит, обозначая ковариантные компоненты $\boldsymbol{D}$ через ε_{ij}, имеем $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Из (1.3) следует, что векторы $\mathbf{p}_i$ образуют ковариантный тензор 1-й валентности с векторными компонентами, поэтому $\nabla_j \mathbf{p}_i$ являются компонентами тензора 2-й валентности с векторными компонентами [2]. Из разложения

$$\nabla_j \mathbf{p}_i = (b_{ij} - \mu_{ij})\,\mathbf{m} + \zeta_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}\,\mathbf{p}_\alpha \tag{1.6}$$

следует, что μ_{ij} и ζ_{ijk} — компоненты тензоров второй и третьей валентности. Тензор μ_{ij} будем называть вторым тензором деформации.

Соотношение тензора ζ_{ijk} с первым тензором деформации ε_{sr} можно найти из условия интегрируемости

$$c^{\alpha\beta}\,\nabla_\beta\, \mathbf{r}^*_\alpha = 0 \tag{1.7}$$

где $\mathbf{r}^*_i$ подразумевается в виде

$$\mathbf{r}^*_i = (a_i^\alpha + \varepsilon_i^\alpha)\,\mathbf{p}_\alpha \tag{1.8}$$

представляющем частный случай выражения (1.5).

Векторное уравнение (1.7) дает три уравнения совместности деформации

$$c^{\alpha\beta}\,\nabla_\beta\,\varepsilon_{i\alpha} + c^{\alpha\beta}\,(a_\alpha^\gamma + \varepsilon_\alpha^\gamma)\,\zeta_{\gamma\beta i} = 0 \tag{1.9}$$

$$c^{\alpha\beta}\,\mu_{\alpha\beta} - c^{\alpha\beta}\,\varepsilon_\alpha^\gamma\,(b_{\gamma\beta} - \mu_{\gamma\beta}) = 0 \tag{1.10}$$

Далее, ковариантным дифференцированием по x^k равенства (1.4) нетрудно показать кососимметричность тензора ζ_{ijk} относительно индексов i, k:

$$\zeta_{ijk} = -\zeta_{kji}$$

поэтому тензор ζ_{ijk} определяется только двумя значениями, скажем, ζ_j; пусть

$$\zeta_{ijk} = -c_{ik}\zeta_j \tag{1.11}$$

В случае малой деформации легко найти из уравнений (1.9) ζ_j:

$$\zeta_j = c^{\alpha\beta} \nabla_\beta \varepsilon_{\alpha j} \tag{1.12}$$

Разложение (1.6), очевидно, должно удовлетворять тождеству Риччи

$$2c^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha \mathbf{p}_i = c^{\alpha\beta} R_{\beta\alpha i\lambda} \mathbf{p}^\lambda \tag{1.13}$$

где R_{jkmn} — компоненты риманова тензора кривизны. Чтобы развернуть это векторное уравнение, заметим, что ковариантным дифференцированием равенств

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{m} = 0, \qquad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$$

по x^j получаем

$$\nabla_j \mathbf{m} = -(b_{\alpha j} - \mu_{\alpha j})\, \mathbf{p}^\alpha \tag{1.14}$$

Тождество Риччи (1.13) дает нам три скалярных уравнения совместности деформации

$$c^{j\gamma} c^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mu_{\gamma\alpha} - c^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} (b^j_{.\beta} - \mu^j_{.\beta}) \nabla_\rho \varepsilon_{\alpha\gamma} = 0 \tag{1.15}$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} (2b_{\gamma\alpha} \mu_{\rho\beta} - \mu_{\gamma\alpha} \mu_{\rho\beta} - 2\nabla_\beta \nabla_\rho \varepsilon_{\alpha\gamma}) = 0 \tag{1.16}$$

к этим уравнениям присоединяется еще уравнение совместности деформации (1.10).

В случае малых перемещений в этих уравнениях можно пренебречь членами, нелинейными относительно компонентов первого и второго тензоров деформации. Полученные таким образом уравнения совместности деформации совпадают с уравнениями, опубликованными А. Л. Гольденвейзером [3].

2. Статические соотношения при конечных перемещениях. В отличие от линейной теории оболочек будем исследовать равновесия элементов оболочки в деформированном, т. е. в конечном состоянии.

Пусть будут: $\mathbf{T}^i \sqrt{a}$ — приведенный главный вектор сил и $\mathbf{M}^i \sqrt{a}$ — приведенный главный момент сил (относительно точки на срединной поверхности), действующих на координатной поверхности $x^i = \text{const}$.

Исходя из условия равновесия вырезанного из оболочки элементарного трехгранника, нетрудно показать, что $\mathbf{T}^i$, $\mathbf{M}^i$ являются тензорами 1-й валентности с векторными компонентами.

Разложим $\mathbf{T}^i$, $\mathbf{M}^i$ по векторам $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{T}^i = T^{i\alpha} \mathbf{p}_\alpha + N^i \mathbf{m}, \qquad \mathbf{M}_i = c_\beta^{\cdot\alpha} M^{i\beta} \mathbf{p}_\alpha \tag{2.1}$$

Так как $\mathbf{p}_j$ — ковариантный тензор 1-валентности, то из (2.1) следует, что T^{ij}, M^{ij} — контравариантные тензоры 2-й валентности, скажем, тензоры тангенциальных сил и моментов, а N^i — контравариантный вектор поперечных сил.

Рассмотрим элемент оболочки, ограниченной координатными поверхностями $x^i, x^i + dx^i = \text{const}$ и внешними поверхностями $z = \pm\, {}^1\!/_2\, t$.

Обозначим через $\mathbf{X}\sqrt{a}\, dx^1 dx^2$ главный вектор всех внешних сил, действующих на этот элемент оболочки: пусть будет

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{p}_\alpha + X\mathbf{m} \tag{2.2}$$

Далее, обозначим через $\mathbf{M}\sqrt{a}\, dx^1 yx^2$ главный момент всех внешних сил, действующих на рассматриваемый элемент оболочки, и пусть будет

$$\mathbf{M} = M^\alpha \mathbf{p}_\alpha \tag{2.3}$$

Условия равновесия оболочки требуют

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\mathbf{T}^\alpha \sqrt{a}) + \mathbf{X} \equiv \nabla_\alpha \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{X} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\mathbf{M}^\alpha \sqrt{a}) + \mathbf{r}_\alpha{}^* \times \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{M} \equiv \nabla_\alpha \mathbf{M}^\alpha + \mathbf{r}_\alpha{}^* \times \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{M} = 0 \tag{2.5}$$

В развернутом виде получим уравнения

$$\nabla_\alpha T^{\alpha i} + c^i_{\cdot\beta}\, T^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} \nabla_\rho\, \varepsilon_{\gamma\alpha} - N^\alpha (b^i_{\cdot\alpha} - \mu^i_{\cdot\alpha}) + X^i = 0 \tag{2.6}$$

$$T^{\alpha\beta}(b_{\beta\alpha} - \mu_{\beta\alpha}) + \nabla_\alpha N^\alpha + X = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha i} + c^i_{\cdot\beta}\, M^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} \nabla_\rho\, \varepsilon_{\gamma\alpha} - (a^i_\alpha + \varepsilon^i_\alpha) N^\alpha + c^i_{\cdot\gamma} M^\gamma = 0 \tag{2.8}$$

$$c^{\cdot\alpha}_\beta M^{\gamma\beta}(b_{\alpha\gamma} - \mu_{\alpha\gamma}) + c_{\beta\gamma}(a^\beta_\alpha + \varepsilon^\beta_\alpha) T^{\alpha\gamma} = 0 \tag{2.9}$$

В дальнейшем за начальное положение оболочки примем положение, предшествующее потере устойчивости основной формы равновесия. Условимся, что начальное напряженное состояние — безмоментное. Обозначим тензор тангенциальных сил в этом состоянии через $T^{ij}_{(0)}$, а компоненты главного вектора внешних сил через $X^i_{(0)}$, $X_{(0)}$. После потери устойчивости основной формы равновесия возникает смешанное напряженное состояние, характеризуемое внутренними усилиями

$$T^{ij} = T_{(0)}{}^{ij} + S^{ij}, \qquad M^{ij}, \qquad N^i$$

сопутствуемое полем внешних сил

$$X^i = X_{(0)}{}^i + Y^i, \qquad X = X_{(0)} + Y$$

Очевидно, в состоянии равновесия

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} + c^i_{\cdot\beta}(T_{(0)}{}^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) c^{\gamma\rho} \nabla_\rho\, \varepsilon_{\gamma\alpha} - N^\alpha (b^i_{\cdot\alpha} - \mu^i_{\cdot\alpha}) + Y^i = 0 \tag{2.10}$$

$$-T_{(0)}{}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + S^{\alpha\beta}(b_{\beta\alpha} - \mu_{\alpha\beta}) + \nabla_\alpha N^\alpha + Y = 0 \tag{2.11}$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha i} + c^i_{\cdot\beta}\, M^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} \nabla_\rho\, \varepsilon_{\gamma\alpha} - N^\alpha (a^i_\alpha + \varepsilon^i_\alpha) = 0 \tag{2.12}$$

$$c^{\cdot\alpha}_\beta M^{\gamma\beta}(b_{\alpha\gamma} - \mu_{\alpha\gamma}) + c_{\beta\gamma}\, \varepsilon^\beta_\alpha T_{(0)}{}^{\alpha\gamma} + c_{\beta\gamma}(a^\beta_\alpha + \varepsilon^\beta_\alpha) S^{\alpha\gamma} = 0 \tag{2.13}$$

3. Законы упругости. Приняв распределение деформации по толщине оболочки согласно гипотезе Кирхгофа-Лява, нетрудно показать, что в пределах точности этой гипотезы[4] соотношения между тензорами внутренних усилий и тензорами деформации ничем не отличаются от таковых в теории оболочек малых перемещений.

Для этого мы должны допустить, что, несмотря на конечные перемещения срединной поверхности, деформация останется малой и, следовательно, членами типа $\varepsilon_{i\alpha}\,\varepsilon_j^{\alpha}$, $\mu_{i\alpha}\varepsilon_j^{\alpha}$ можно пренебречь по сравнению с членами ε_{ij}, μ_{ij}. Уточнение нижеприведенных соотношений нелинейными членами типа $\mu_{i\alpha}\,\mu_j^{\alpha}$ приходится делать только в случае бесконечно малой деформации первого порядка, понятие, которое будет определено ниже в разделе 6. Однако у оболочек, применяемых в строительной технике, этот вид деформации, повидимому, может быть только в самых исключительных случаях, поэтому уточненные соотношения здесь не приводятся. Читатель может их найти в работе Чина [8].

Опуская выкладки, приводим в окончательном виде [3]

$$S^{ij} = BE^{ij\alpha\beta}\,\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad M^{ij} = DE^{ij\alpha\beta}\,\mu_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

где

$$B = \frac{Et}{1-\nu^2}, \qquad D = \frac{Et^3}{12\,(1-\nu^2)}, \qquad E^{ijmn} = a^{im}\,a^{jn} + \nu c^{im}\,c^{jn} \tag{3.2}$$

причем E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — толщина оболочки. Легко найти и обратные соотношения

$$\varepsilon_{ij} = B' P_{ij\alpha\beta}\,S^{\alpha\beta}, \qquad \mu_{ij} = D' P_{ij\alpha\beta}\,M^{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

где

$$B' = \frac{1}{Et}, \qquad D' = \frac{12}{Et^3}, \qquad P_{ijmn} = a_{im}\,a_{jn} - \nu c_{im}\,c_{jn} \tag{3.4}$$

4. Определение критической нагрузки. В состоянии равновесия, бесконечно близком к основной форме равновесия, но качественно отличающемся от него при тех же внешних условиях, S^{ij}, M^{ij}, N^i, ε_{ij}, μ_{ij} будут бесконечно малыми величинами и поэтому их произведениями в дифференциальных уравнениях можно пренебречь. Тогда уравнения равновесия (2.10) — (2.13) получают вид

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} + c^{i}_{.\beta} T_{(0)}{}^{\alpha\beta} c^{\rho\gamma} \nabla_\gamma \varepsilon_{\rho\alpha} - b^i_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} = 0 \tag{4.1}$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - T_{(0)}{}^{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha} + \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} = 0 \tag{4.2}$$

$$c_{\beta\alpha} M^{\gamma\beta} b^\alpha_\gamma + c_{\beta\gamma}\,\varepsilon_\alpha{}^\beta T_{(0)}{}^{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.3}$$

Уравнения совместности деформации не будут отличаться от таковых в линейной теории оболочек; из (1.15), (1.16), (1.10) получим

$$c^{i\gamma} c^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mu_{\gamma\alpha} - c^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} b^i_\beta \nabla_\rho \varepsilon_{\alpha\gamma} = 0 \tag{4.4}$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho}\,(b_{\gamma\alpha}\mu_{\rho\beta} - \nabla_\beta \nabla_\rho \varepsilon_{\alpha\gamma}) = 0 \tag{4.5}$$

$$c^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} - c^{\alpha\beta}\,\varepsilon^\gamma_\alpha b_{\gamma\beta} = 0 \tag{4.6}$$

Физические соотношения (3.1) (3.3), останутся неизменными.

Отличное от нуля решение системы (4.1) — (4.6) возможно только при определенных значениях тензора тангенциальных сил $T_{(0)}{}^{ij}$. Напряженное состояние, отвечающее тензору $T_{(0)}{}^{ij}$, мы принимаем в качестве начального напряженного состояния. Метрические тензоры a_{ij}, b_{ij} также относятся к этому состоянию.

Значение внешней нагрузки, при которой возможны различные формы равновесия, будет, как обычно, названо критической нагрузкой.

Некоторые статические свойства оболочек определяются значениями трех геометрических параметров: толщины оболочки t, наименьшего радиуса кривизны R, наименьшей протяжности оболочки L.

Оболочка называется *тонкостенной*, если соотношение $t / L = \lambda$ малая величина. *Пологость* оболочки характеризуется соотношением L / R; пусть будет

$$L / R = \lambda^r$$

Пологими принято считать оболочки, для которых $r > 0$; кроме того, при $r \geqslant 1$ мы считаем оболочку весьма пологой. Пологие и весьма пологие оболочки будут предметом дальнейших рассмотрений.

Примем величину L за единицу и отнесем срединную поверхность оболочки к координатной системе, обладающей свойством, что главные члены тензора $a_{ij} \sim 1$. Такое временное ограничение осуществимо при пологих оболочках: оно удобно при качественном анализе основных уравнений, представленных в начале этого раздела. При такой системе координат главное значение тензора $b_{ij} \sim \lambda^r$. В дальнейшем будем говорить, что тензор t_{ij} соизмерим λ^t, если главный член тензора $t_{ij} \sim \lambda^t$.

Пусть в уравнениях (4.1) — (4.6) главный член тензора μ_{ij} имеет значение μ и пусть тензоры ε_{ij}, $T_{(0)}{}^{ij}$ будут соизмеримы с $\mu\lambda^e$, $E\lambda^{c+1}$ соответственно, где e и c пока неизвестные. Тогда по (3.1) тензоры S^{ij}, M^{ij} соизмеримы с $E\mu\lambda^{e+1}$, $E\mu\lambda^3$ соответственно. Далее, пусть при ковариантном дифференцировании порядок неизвестных изменяется в λ^{-k} раз, так что, например,

$$\nabla_m \mu_{ij} \sim \mu\lambda^{-k}, \quad \nabla_m \varepsilon_{ij} \sim \mu\lambda^{e-k}$$

Здесь k — также пока неопределенная величина. Нетрудно найти физическое значение k: длина волны выпученной стенки оболочки будет $l \sim \lambda^k L$.

Будем различать два вида деформации при потере устойчивости основной формы равновесия. Мы скажем, что срединная поверхность оболочки при потере устойчивосси окажется: (*а*) жесткой, если тензоры $b_{\gamma\alpha}\mu_{\rho\beta}$, $\nabla_i \nabla_j \varepsilon_{mn}$ соизмеримы, а (*б*) нежесткой первого порядка, если тензор $\nabla_i \nabla_j \varepsilon_{mn}$ соизмерим с тензором $\lambda b_{\gamma\alpha}\mu_{\rho\beta}$.

В случае (*а*), очевидно,

$$r = e - 2k$$

а в случае (*б*)

$$r + 1 = e - 2k$$

Пологие оболочки $(r \sim 0)$

Деформация вида (*а*). Качественный анализ уравнения (4.2) показывает, что критическая нагрузка будет наименьшей, если $e = 2k = 1$ в таком случае c принимает значение 1. После установления этих величин оказывается, что в уравнениях (4.1) — (4.6) можно пренебречь некоторыми несущественными членами. Именно, при определении критической нагрузки достаточно рассмотреть уравнения

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} = 0, \qquad c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.7}$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - T_{(0)}{}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} = 0 \tag{4.8}$$

в качестве уравнений равновесия и уравнения

$$c^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mu_{\alpha i} = 0, \qquad c^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.9}$$

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} (b_{\gamma\alpha} \mu_{\rho\beta} - \nabla_\beta \nabla_\rho \varepsilon_{\gamma\alpha}) = 0 \tag{4.10}$$

в качестве уравнений совместности деформации, причем отброшенные члены имеют порядок λ в сравнении с удерживаемыми членами[1]. К этим уравнениям присоединяются физические соотношения (3.1).

Деформация вида (*б*). Анализ уравнения (4.2) показывает, что c будет максимальным при $e = c = 1.5$, причем $2k = 0.5$. Легко проверить, что в уравнениях (4.7) отброшенные члены имеют порядок $\lambda^{0.5}$, а в уравнениях (4.9) $\lambda^{1.5}$. Так как уравнение (4.5) можно написать в виде

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} b_{\gamma\alpha} \mu_{\rho\beta} = 0$$

то для определения μ_{ij} получаем полную систему линейных однородных уравнений. Она является основной системой уравнений бесконечно малых изгибаний первого порядка.

В разделе 6 доказывается, что во всех случаях потери устойчивости можно μ_{ij} выразить через функцию перемещений W, именно.

$$\mu_{ij} = \nabla_i \nabla_j W \tag{4.11}$$

Бесконечно малое изгибание первого порядка при потере устойчивости осуществляется, если W — решение краевой задачи, удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$c^{\alpha\beta} c^{\gamma\rho} b_{\gamma\alpha} \nabla_\rho \nabla_\beta W = 0 \tag{4.12}$$

и некоторым краевым условиям, которые ставятся согласно задаче о потере устойчивости основной формы равновесия. Это решение может и отсутствовать, но тем не менее возможно, что в довольно большой области деформация вида (*б*) все-таки имеет место. Тогда, конечно, $1.0 < c < 1.5$. Анализ, проделанный относительно c и k, касается бесконечно малой области оболочки, но полученные результаты имеют общий для всей оболочки характер, если деформация качественно однородна по всей срединной поверхности. В противном случае критическая нагрузка увеличивается за счет более жестких областей.

[1] В дальнейшем будем говорить просто «отброшенные члены имеют порядок λ», если они имеют такой порядок по сравнению с удерживаемыми членами.

Весьма пологие оболочки $(r \geqslant 1)$

Деформация вида (*а*). Качественный анализ показывает, что деформация оболочки характеризуется значениями $k = 0$, $e = 1$, а параметр, определяющий критическую нагрузку, $c = 2$. Критическое состояние определяется уравнениями (4.7) — (4.10), причем отброшенные члены теперь имеют порядок λ^2. При потере устойчивости происходит бесконечно малое изгибание срединной поверхности.

Деформация вида (б). Критическую нагрузку можно определить из уравнения

$$-T_{(0)}^{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha} + \nabla_\alpha\nabla_\beta M^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.13}$$

Здесь отброшенный член имеет порядок λ. Легко убедиться, что в данном случае также $c = 2$, $k = 0$.

Эти результаты получил впервые Цолли [10], который применял энергетический метод для определения критической нагрузки. Заметим, что за параметр λ у Цолли принято отношение t / R.

Заключение: Предыдущий анализ показывает, что критическая нагрузка всегда определяется уравнениями (4.7) — (4.10) с точностью по крайней мере $\lambda^{0.5}$. В самом деле, при потере устойчивости оболочек мы не можем в отдельном конкретном случае заранее утверждать, что деформация будет вида (*б*), а поэтому приходится и в этом случае исходить из более общих уравнений (4.7) — (4.10)

В конце статьи уравнения (4.7) — (4.10) будут представлены в более удобном для интегрирования виде.

5. Равновесие оболочки в послекритической стадии. Состояние равновесия оболочки после потери устойчивости основного (безмоментного) состояния равновесия определяются уравнениями равновесия (2.10) — (2.13) и уравнениями совместности деформации (1.15), (1.16), (1.10), при этом компоненты тензоров деформации и внутренних усилий связаны физическими соотношениями (3.1) или (3.3). Однако эта система довольно сложна для проведения вычислений, и мы постараемся при помощи качественного анализа послекритической стадии удержать в этих уравнениях только существенные члены.

Рассмотрим некоторое состояние равновесия оболочки в послекритической стадии. Пусть в этом состоянии тензоры ε_{ij}, μ_{ij} будут соизмеримы соответственно с λ^e, λ^m, тогда по (3.1) тензоры S^{ij}, M^{ij} соизмеримы с $E\lambda^{e+1}$, $E\lambda^{m+3}$ соответственно. Величины e и m ограничены снизу, так как напряжения должны быть в пределах упругости. Ради простоты примем $m \geqslant 0$, $e \geqslant 1$; эти значения имеют место, если $\sigma_p / E = \lambda$, где σ_p — предел пропорциональности. Прежде всего очевидно, что уравнения равновесия (2.10) — (2.13) можно заменить системой

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} - (b^{i}_{\cdot\alpha} - \mu^{i}_{\cdot\alpha})\nabla_\beta M^{\beta\alpha} + Y^i = 0 \tag{5.1}$$

$$S^{\alpha\beta}b_{\beta\alpha} - (T_{(0)}^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta})\mu_{\beta\alpha} + \nabla_\alpha\nabla_\beta M^{\beta\alpha} + Y = 0 \tag{5.2}$$

$$c_{\beta}^{\cdot\alpha} M^{\gamma\beta}(b_{\alpha\gamma} - \mu_{\alpha\gamma}) + c_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} = 0 \tag{5.3}$$

но дальнейшие упрощения пока не обоснованы.

Чтобы наши рассуждения были применимы в наиболее широкой области, полагаем, что внешняя нагрузка после потери устойчивости качественно не изменяется.

Непосредственно после потери устойчивости, как мы видели в разделе 4, деформация оболочки характеризована тем, что ковариантное дифференцирование увеличивает порядок неизвестных величин, вообще говоря, в λ^{-k} раз. Нельзя представить, однако, что при развитии деформации в послекритической стадии это свойство изменяется численно хотя бы даже и немного, так как это требует качественного изменения поля перемещений. Нагрузка, при которой происходит такое качественное изменение поля перемещений, называется второй критической нагрузкой. Мы будем рассматривать равновесия оболочки в стадии между первыми двумя критическими нагрузками.

Классификацию состояний оболочек основываем на свойствах уравнения совместности (1.16). Мы говорим, что деформация срединной поверхности оболочки относительно больших перемещений, поле которых качественно определяется при потери устойчивости основной формы равновесия, окажется (*А*) *жесткой*, если тензоры $b_{ij}\mu_{km}$ или $\mu_{ij}\mu_{km}$ и $\nabla_i\nabla_j\varepsilon_{km}$ соизмеримы, а (*Б*) *нежесткой первого порядка*, если тензор $b_{ij}\mu_{km}$ или $\mu_{ij}\mu_{km}$ соизмерим с тензором $\lambda^{-1}\nabla_i\nabla_j\varepsilon_{km}$. Следовательно,

при деформации вида (*А*)

$$\begin{aligned} r+m &\sim e-2k, \quad \text{если} \quad r<m \\ 2m &\sim e-2k, \quad \text{если} \quad r>m \end{aligned}$$

при деформации вида (*Б*)

$$\begin{aligned} r+m &\sim e-2k-1, \quad \text{если} \quad r<m \\ 2m &\sim e-2k-1, \quad \text{если} \quad r>m \end{aligned}$$

В дальнейшем мы рассматриваем состояния равновесия пологих и весьма пологих оболочек в послекритической стадии при конечных перемещениях с жесткой (*А*) и нежесткой (*Б*) деформациями срединной поверхности, различая при этом случай жесткой (*а*) и нежесткой (*б*) деформации срединной поверхности при потере устойчивости.

Однако рассмотрение перехода от нежесткой деформации вида (*б*) к жесткой деформации вида (*А*) или же от (*а*) к (*Б*) требует анализа деформации в переходной области, которую будем называть *полужесткой* деформацией срединной поверхности и обозначать через (*В*).

Количественно деформацию вида (*В*) определяем соотношениями

$$\begin{aligned} r+m &\sim e-2k-0.5, \quad \text{если} \quad r<m \\ 2m &\sim e-2k-0.5, \quad \text{если} \quad r>m \end{aligned}$$

Произведенный анализ относительно порядка отдельных величин в основных уравнениях при конечных перемещениях показывает, что во всех случаях можно пользоваться упрощенными уравнениями

$$c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\mu_{i\alpha}=0, \qquad c^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}=0 \tag{5.4}$$

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i}+Y^i=0, \qquad c_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}=0 \tag{5.5}$$

вместо (1.15), (1.10) и (5.1), (5.3). В табл. 1. показан порядок отброшенных членов по сравнению с удерживаемыми; если, например, они имеют порядок $\lambda^{0.5}$, то в таблице это указано цифрой 0.5

Иногда являются несущественными также и некоторые члены в уравнениях (1.16) и (5.2). Порядок этих величин также указан в таблице аналогичным предыдущему образом.

Мы ограничивались рассмотрением состояний равновесия в послекритической стадии при больших перемещениях, поле которых качественно определяется при потере устойчивости основной формы равновесия. Таким образом, длина волны выпученной стенки определяется уже при критической нагрузке.

Однако в послекритической стадии могут существовать и другие формы равновесия, у которых поле перемещений качественно отличается от рассмотренных. У этих форм может быть прежде всего иная длина волны выпученной стенки, поэтому нельзя утверждать, что равнения (1.16), (5.4), (5.2), (5.5) достаточно полные для определения упомянутых форм равновесия.

Тензор ε_{ij}, а следовательно, и тензор S^{ij} содержат, вообще говоря, и части, не возрастающие при дифференцирования,— это обстоятельство не изменяет результатов анализа.

6. Введение функции перемещения и напряжения. Очень простое качественное исследование послекритической стадии как пологих, так и весьма пологих оболочек показало, что наиболее общую систему дифференциальных уравнений требуется рассмотреть в случаях 1 и 7 по табл. 1, когда основная система состоит из уравнений (1.16), (5.4), (5.2) и (5.5) со всеми членами. Все остальные варианты получаются из этой системы отбрасыванием некоторых несущественных членов, а не добавлением новых.

Практически приходится всегда пользоваться системой (1.16), (5.4) (5.2), (5.5), потому что при решении конкретных задач мы не в состоянии сказать заранее, будет ли деформация срединной поверхности при больших перемещениях нежесткой или нет. Однако мы теперь знаем, что при нежесткой деформации новые члены в уравнения включать не нужно.

Характер деформации в послекритической стадии или же малая гауссова кривизна весьма пологих оболочек дает возможность выразить компоненты второго тензора деформации через скалярную функцию перемещения W:

$$\mu_{ij} = \nabla_i \nabla_j W \tag{6.1}$$

Действительно, правое из уравнений (5.4) удовлетворяется тождественно, а левое с точностью λ^{2r+2k}.

Аналогично можно показать, что уравнения (5.5) в случае $Y^i = 0$ удовлетворяются по крайней мере с точностью λ^{2r+2k}, если

$$S^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta F \tag{6.2}$$

F — произвольная скалярная функция, так называемая функция напряжения.

Таблица 1

Случай	Состояние деформации: при критической нагрузке	Состояние деформации: при конечных перемещениях	m	(1.16): $b_{ij}\mu_{km}$	(1.16): $b_{ij}\mu_{km}$	(1.16): $\nabla_i\nabla_j\varepsilon_{km}$	(5.2): $S^{\alpha\beta}b_{\beta\alpha}$	(5.2): $T_{(0)}^{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}$	(5.2): $S^{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}$	(5.2): $\nabla_\beta\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}$	Порядок отброшенных величин в уравнениях (1.15) или (1.10)	Порядок отброшенных величин в уравнениях (5.1) или (5.3)
				Пологие оболочки								
1	*а*	*А*	0	×	×	×	×	×	×	×	1	1
2	*а*	*В*	0	×	×	0.5	0.5	×	0.5	×	1.5	0.5*
3	*а*	*Б*	0	×	×	1	1	×	1	×	2	0*
4	*б*	*А*	0.5	×	0.5	×	×	1	0.5	1	0.5	1.5
5	*б*	*В*	0	×	×	0.5	×	0.5	×	0.5	1	1
6	*б*	*Б*	0	×	×	1	×	×	×	×	1.5	0.5
				Весьма пологие оболочки								
7	*а, б*	*А*	1.0	×	×	×	×	×	×	×	2	2
8	*а, б*	*А*	0.5	0.5	×	×	0.5	1	×	1	1	2
9	*а, б*	*В*	1.0	×	×	0.5	0.5	×	0.5	×	2.5	1.5*
10	*а, б*	*В*	0.5	0.5	×	0.5	0.5	0.5	×	0.5	1.5	1.5
11	*а, б*	*Б*	1.0	×	×	1	1	×	1	×	3	1*
12	*а, б*	*Б*	0.5	0.5	×	1	0.5	×	×	×	2	0.5

Удерживаемые величины (отмечены ×) и порядок отброшенных величин в уравнениях (указан цифрами).

Функции перемещения W и напряжения F определяются из уравнений (1.16), (5.2). Выражая ε_{ij} через F и M^{ij} через W при помощи физических соотношений (3.4), (3.1), получим два уравнения

$$2B'a^{\alpha\gamma}a^{\beta\rho}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\nabla_\rho F - c^{\alpha\gamma}c^{\beta\rho}(2b_{\alpha\beta}\nabla_\rho\nabla_\gamma W - \nabla_\alpha\nabla_\beta W\cdot\nabla_\gamma\nabla_\rho W) = 0 \tag{6.3}$$

$$c^{\alpha\gamma}c^{\beta\rho}b_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\nabla_\rho F - c^{\alpha\gamma}c^{\beta\rho}\nabla_\gamma\nabla_\rho F\cdot\nabla_\alpha\nabla_\beta W - T_{(0)}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta W + Da^{\alpha\gamma}a^{\beta\rho}\nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla_\gamma\nabla_\rho W + Y = 0 \tag{6.4}$$

При выводе этих уравнений пренебрегалось несущественными членами, возникающими при изменении порядка дифференцирования.

Уравнения (6.3), (6.4) являются основными дифференциальными уравнениями для определения состояний равновесия в послекритической стадии оболочек, если касательный компонент внешней нагрузки Y^i имеет пренебрегаемое значение в левом уравнении (5.5).

* Тензор S_{ij} выпадает из основных уравнений, поэтому уравнения (5.1), (5,3) несущественны.

В частном случае плоской пластинки основные уравнения (6.3), (6.4) ничем не отличаются от уравнений теории Кармана плоских пластинок [5]. Эти уравнения для случая круглой цилиндрической оболочки вывел впервые Л. Доннелл [6] а затем Цзян [7]. Наконец, эти уравнения получил Чин[8] как частный случай (*ss* 12) при исследовании тонкостенных пластинок и оболочек.

Аналогичным образом можно привести основные уравнения для определения критической нагрузки (4.7) — (4.10) к виду

$$B' a^{\alpha\gamma} a^{\beta\rho} \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla_\rho F - c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} b_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\rho W = 0 \tag{6.5}$$

$$c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} b_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\rho F - T_{(0)}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta W + D a^{\alpha\gamma} a^{\beta\rho} \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla_\rho W = 0 \tag{6.6}$$

Уравнения (6.5), (6.6) в ортогональной системе координат впервые опубликованы В. З. Власовым [9].

Поступила в редакцию
2 IX 1948

Институт строительства и архитектуры
Академии Наук Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. A. Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress, Philosophical Magazine. 1939. № 183, 7-th series.
2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей 1947. Ч. 1.
3. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 6.
4. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. О погрешности гипотезы Кирхгофа в теории оболочек. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 5.
5. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. 1941. Ч. II. Стр. 494.
6. Donnell L. H. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. 1934. Vol. 56.
7. Tsien H., Karman Th. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. Journ. Aeronautical Sciences. 1941. Vol. 8. No. 8.
8. Chien W. The intrinsic theory of thin plates and shells. Quarterly of Applied Mathematics. 1944. Vol. I. No. 4. Vol. II. No. 1; vol. II. No. 2.
9. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 2.
10. Zoelly R. Dissertation. Zürich. 1915.