Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ОБОЛОЧЕК [1]

В. М. Панферов

(Москва)

В работе дается доказательства существования, единственности решения и сходимости метода упругих решений А. А. Ильюшина в теории упруго-пластических деформаций [1,2] для случая осесимметричной деформации цилиндрической оболочки. Показывается, что пластические участки занимают конечную область и число их конечно, а также, что по мере удаления от зоны приложения нагрузок напряжения в оболочке убывают.

Метод упругих решений состоит в применении последовательных приближений. Для первого приближения выделяются линейные оператор, соответствующий упругой задаче, и нагрузка, нелинейные члены в дифференциальных уравнениях упруго-пластической задачи полагаются равными нулю, таким образом, решается краевая задача теории упругости в той же постановке. Для второго приближения выделяются тот же линейный оператор и та же нагрузка, а нелинейные члены заменяются результатом подстановки первого приближения в нелинейные члены основных дифференциальных уравнений упруго-пластической задачи. Следовательно, за второе приближение берется решение той же самой краевой задачи теории упругости, но «внешняя нагрузка» отличается от действительной на результат подстановки первого приближения в нелинейный члены.

Аналогично определяется третье приближение и т. д. Доказательство сходимости проводится методом Пикара[3].

1. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки. Рассмотрим деформацию цилиндрической оболочки радиуса a под действием осесимметричного внешнего давления q.

На фиг. 1 показан элемент оболочки и силы, действующие на него. Направим ось x по образующей срединной поверхности, ось y — по окружности и z — по радиусу цилиндра.

Пусть ε_1 и ε_2 деформации срединной поверхности по осям x и y, а w перемещение точки поверхности по нормали в сторону оси z.

Считаем, что толщина оболочки h мала и гипотезы Кирхгофа-Лява применимы для упруго-пластических деформаций. Для срединной поверхности предполагается условие несжимаемости, следовательно, деформации в любой точке срединной поверхности имеют вид

$$e_{xx} = \varepsilon_1 - z\frac{d^2w}{dx^2}, \qquad e_{yy} = \varepsilon_2 = -\frac{w}{a} \tag{1.1}$$

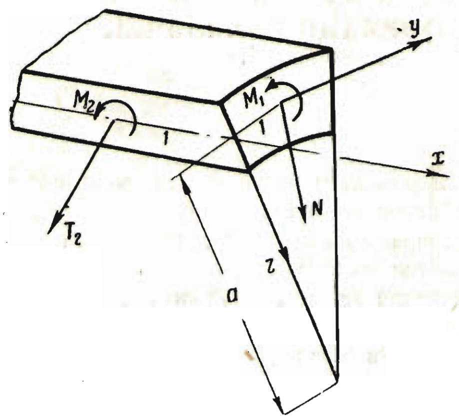
[1] В. М. Панферов. О методе упругих решений в задачах пластичности для цилиндрической оболочки. Диссерт. МГУ, 1946. Работа доложена в Институте механики Академии Наук СССР на совещании по теории упругости, строительной механики и теории пластичности 22—25 марта 1946 г.

Так как $T_1 = 0$, то

$$\varepsilon_1 + {}^1/_2\,\varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_1 = \frac{w}{2a} \tag{1.2}$$

поэтому деформации есть функции только w.

Дифференциальные уравнения равновесия элемента (фиг. 1) запишутся так:



Фиг. 1

$$\frac{dN}{dx} + \frac{1}{a}T_2 + p = 0$$

$$N = \frac{dM_1}{dx} \tag{1.3}$$

Третье уравнение равновесия при условии $T_1 = 0$ тождественно удовлетворяется. В уравнениях (1.3) величины T_2, M_1 выражаются через соответствующие напряжения по формулам

$$T_2 = \int\limits_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} \sigma_{yy}\,dz$$

$$M_2 = \int\limits_{-{}^1/_2 h}^{{}^1/_2 h} \sigma_{yy}\,z\,dz \tag{1.4}$$

Применим законы упруго-пластических деформаций А. А. Ильюшина при простом нагружении; тогда связь между напряжениями и деформациями в главных осях для несжимаемого материала имеет вид

$$\sigma_{xx} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i}e_{xx}, \qquad \sigma_{yy} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i}e_{yy}, \qquad \sigma_{zz} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i}e_{zz} \tag{1.5}$$

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0, \qquad 3\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \tag{1.6}$$

где σ_i и e_i — соответственно интенсивность напряжений и деформаций:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2}$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_{xx}-e_{yy})^2 + (\sigma_{yy}-e_{zz})^2 + (e_{zz}-e_{xx})^2} \tag{1.7}$$

Интенсивность σ_i есть функция e_i (определяемая экспериментально):

$$\sigma_i = 3Ge_i\,[1 - \omega(e_i)] \qquad \begin{pmatrix} \omega \neq 0 \text{ для } e_i > e_s \\ \omega = 0 \text{ для } e_i \leqslant e_s \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Здесь e_s — предел текучести, G — модуль сдвига. При этом

$$1 > \omega + e_i\frac{d\omega_i}{de_i} > \omega \geqslant 0, \qquad \frac{d\omega}{de_i} > 0 \tag{1.9}$$

Перейдем к безразмерным величинам. Все напряжения, деформации и перемещения соответственно отнесем к характерному напряжению

$\sigma_s = 3Ge_s$ деформации e_s и перемещению ae_s. Введем координату ξ;

$$\xi = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2ah}}$$

В системе координат ξ, y, z обозначим безразмерные перемещения точки срединной поверхности по радиусу

$$\frac{w}{ae_s} = \eta(\xi)$$

Тогда уравнения (1.3) при использовании (1.6), (1.8) в безразмерных величинах запишутся[1,2] в виде

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 4\eta = \frac{d^2}{d\xi^2}[\eta'' \varphi(\eta, \eta'')] + 2\,\Omega(\eta, \eta'') + p \tag{1.10}$$

Здесь

$$\varphi(\eta, \eta'') = \frac{3}{\lambda}\int_0^1 \omega(e_i)\zeta^2 d\zeta, \qquad \Omega(\eta, \eta'') = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \omega(e_i)\,d\zeta \tag{1.11}$$

$$p = \frac{4aq}{\sigma' h}, \qquad e_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{4}{3}\eta^2 + \eta''^2\zeta^2}, \qquad \zeta = \frac{z}{{}^1/_2\, h} \tag{1.12}$$

причем p — приведенная нагрузка, $\lambda \neq 0$ — произвольный параметр; штрихи означают дифференцирование по ξ.

Согласно (1.12) для пластической зоны $|\eta| \geqslant 1$, т. е. вся толщина оболочки находится в пластическом состоянии.

Для упруго-пластической зоны

$$\eta^2 + \frac{3}{4}\eta''^2 \geqslant 1, \qquad \eta \geqslant 1$$

Для упругой зоны

$$\eta^2 + \frac{3}{4}\eta''^2 \leqslant 1, \qquad \varphi \equiv \Omega \equiv 0$$

2. Интегральные уравнения упруго-пластического изгиба цилиндрической оболочки. Допустим, не нарушая общности задачи, что в сечении ξ_1 действует сосредоточенное кольцевое давление интенсивности p на единицу длины дуги окружности. Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4\eta = \lambda\,\frac{d}{d^2\xi}\,[\eta''\varphi(\eta, \eta'')] + 2\lambda\,\Omega(\eta, \eta'') \tag{2.1}$$

Граничные условия задачи будут

$$\eta = 0, \quad \eta' = 0 \quad \text{при } \xi = 0; \qquad \eta \to 0, \quad \eta' \to 0 \quad \text{при } \xi \to \infty \tag{2.2}$$

Если общее решение нелинейного уравнения (2.1) существует, то оно тождественно удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \eta = \sum_1^4 a_n J_n(\xi) + \lambda \int_0^\xi [2\,\eta\,\Omega(\eta, \eta'')\,J_4(\xi - t) + \\ + \eta''\varphi(\eta, \eta'')\,J_2(\xi - t)]\,dt + p\int_0^\xi J_4(\xi - t)\,dt \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Крылова. Покажем, как выражаются a_n через решение задачи.

Рассмотрим частную задачу, когда $\varphi \equiv 0$, $\Omega \equiv 0$ — упругая задача. В этом случае коэффициенты a_n должны в силу граничных условий определяться из следующих четырех граничных условий (и в дальнейшем значок $^\circ$ означает, что величина относится к упругой задаче):

$$\begin{gathered}
a_1^\circ J_1(0) + a_2^\circ J_2(0) + a_3^\circ J_3(0) + a_4^\circ J_4(0) + \Phi(0) = 0 \\
a_1^\circ J_1'(0) + a_2^\circ J_2'(0) + a_3^\circ J_3'(0) + a_4^\circ J_4'(0) + \Phi'(0) = 0 \\
[a_1^\circ J_1(\xi) + a_2^\circ J_2(\xi) + a_3^\circ J_3(\xi) + a_4^\circ J_4(\xi) + \Phi(\xi)]_{\xi \to \infty} = 0 \\
[a_1^\circ J_1'(\xi) + a_2^\circ J_2'(\xi) + a_3^\circ J_3'(\xi) + a_4^\circ J_4'(\xi) + \Phi'(\xi)]_{\xi \to \infty} = 0
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Из первых двух уравнений (2.4) в силу свойств функций $J_n(\xi)$ получим

$$a_1^\circ = 0, \qquad a_2^\circ = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \tag{2.5}$$

Из двух последних уравнений (2.4) имеем

$$\begin{gathered}
a_3^\circ = \left[\frac{\Phi'(\xi) J_4(\xi) - \Phi(\xi) J_4'(\xi)}{J_3(\xi) J_4'(\xi) - J_4(\xi) J_3'(\xi)}\right]_{\xi \to \infty} \\
a_4^\circ = \left[\frac{\Phi(\xi) J_3'(\xi) - \Phi'(\xi) J_3(\xi)}{J_3(\xi) J_4'(\xi) - J_4(\xi) J_3'(\xi)}\right]_{\xi \to \infty}
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Если сосредоточенное кольцевое давление p приложено в сечении ξ_1, то, полагая $t = \zeta - \xi_1$, для $\xi_1 \leqslant \xi < \infty$ получим

$$\Phi(\xi) = 8p J_4(t), \qquad \Phi'(\xi) = 8p J_3(t) \tag{2.7}$$

Совершим предельный переход в (2.6), предварительно сделав некоторые преобразования. Знаменатель в выражениях a_3° и a_4° можно представить в виде

$$\begin{gathered}
J_3(\xi) J_4'(\xi) - J_4(\xi) J_3'(\xi) = J_3^2(\xi) - J_4(\xi) J_2(\xi) = \\
= \frac{1}{4} \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \xi - \frac{1}{8} (\operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \xi - \cos^2 \xi \operatorname{sh}^2 \xi) = \frac{1}{8} (-\sin^2 \xi + \operatorname{sh}^2 \xi)
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Числители выражений (2.6) для a_3° и a_4°, согласно (2.7), можно привести к виду

$$\begin{gathered}
J_3(t) J_4(\xi) - J_4(t) J_3(\xi) = \\
= \sin \xi_1 \operatorname{sh}^2 \xi \operatorname{ch} \xi_1 - \sin \xi_1 \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \xi_1 - \operatorname{sh} \xi_1 \sin t \sin \xi \\
J_4(t) J_2(\xi) - J_3(t) J_3(\xi) = \operatorname{ch} \xi_1 \sin t \sin \xi - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} \xi \cos \xi_1 - \\
- \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \xi_1 \sin \xi_1 + \operatorname{sh}^2 \xi \operatorname{sh} \xi_1 \sin \xi_1 + \sin \xi \cos t \operatorname{sh} \xi
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.6) и переходя к пределу при $\xi \to \infty$, получим

$$a_3^\circ = 8p e^{-\xi_1} \sin \xi_1, \qquad a_4^\circ = -8p e^{-\xi_1} (\sin \xi_1 + \cos \xi_1) \tag{2.10}$$

Пусть $\varphi(\eta, \eta'')$ и $\Omega(\eta, \eta'')$ отличны от нуля — задача упруго-пластическая. Тогда значения a_n должны в силу граничных условий определяться теми же уравнениями (2.4) (величина a_n без ноликов), где функции $\Phi(\xi)$ и $\Phi'(\xi)$ имеют вид $(\xi > \xi_1)$ (2.11)

$$\Phi(\xi) = 8pJ_4(\xi - \xi_1) + \lambda \int_0^{\xi = l} [4\eta\Omega(\eta, \eta'')J_4(\xi - t) + \eta''\varphi(\eta', \eta'')J_2(\xi - t)]\,dt$$

$$\Phi'(\xi) = 8pJ_3(\xi - \xi_1) + \lambda \int_0^{\xi = \varepsilon} [4\eta\Omega(\eta, \eta'')J_3(\xi - t) + \eta''\varphi(\eta', \eta'')J_1(\xi - t)]\,dt$$

Здесь l — наибольшой корень уравнения

$$\eta''^2(\xi) + \frac{4}{3}\eta^2(\xi) = \frac{4}{3} \tag{2.12}$$

или $l = \infty$, если корень не существует. Мы покажем ниже, что пластическая деформация распространяется всегда на конечную длину, т. е. l конечно.

В силу граничных условий и свойств функций $J_n(\xi)$ при $\xi = 0$ коэффициенты a_1, a_2, a_3 и a_4 будут попрежнему определяться формулами (2.5) и (2.6), причем Φ согласно (2.11).

Подставив (2.11) в (2.6) и переходя к пределу при $\xi \to \infty$, получим, учитывая выражение (2.8) и выражения (2.10) для a_3° и a_4°:

$$a_3 = a_3^\circ + 4\lambda \int_0^l \eta\Omega(\eta, \eta'')\,e^{-t}\sin t\,dt - 2\lambda \int_0^l \eta''\varphi(\eta, \eta'')\,e^{-t}\cos t\,dt$$

$$\begin{aligned} a_4 = a_4^\circ - 4\lambda \int_0^l \eta\Omega(\eta, \eta'')\,e^{-t}(\sin t + \cos t)\,dt + \\ + 2\lambda \int_0^t \eta''\varphi(\eta, \eta'')(-\sin i + \cos t)\,e^{-t}\,dt \end{aligned} \tag{2.13}$$

Следовательно, «решение» краевой задачи (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \eta = \eta^\circ + \lambda\left\{\int_0^t [4\eta\Omega(\eta.\,\eta'')\sin t - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')\cos t]\,e^{-t}\,dt\right\}J_3(\xi) - \\ - \lambda\left\{\int_0^t [4\eta\Omega(\eta, \eta'')(\sin t + \cos t) - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')(\cos t - \sin t)]\,e^{-t}\,dt\right\}J_4(\xi) + \\ + \lambda \int_0^t [4\eta\Omega(\eta, \eta'')J_4(\xi - t) + \eta''\varphi(\eta, \eta'')J_2(\xi - t)]\,dt \end{aligned} \tag{2.14}$$

где для $\xi \leqslant \xi_1$

$$\eta^\circ = 8pe^{-\xi_1}[\sin\xi_1 J_3(\xi) - (\sin\xi_1 - \cos\xi_1)J_4(\xi)]$$

и для $\xi_1 \leqslant \xi$

$$\eta^\circ = 8p\,\{e^{-\xi_1}[\sin\xi_1 J_3(\xi) - (\sin\xi_1 + \cos\xi_1)J_4(\xi)] + J_4(\xi - \xi_1)\}$$

3. Доказательство существования решения краевой задачи (2.1) и (2.2) методом упругих решений. Докажем, что если в сечении ξ_1 действует сосредоточенное кольцевое давление интенсивности p на единицу длины дуги окружности, то дифференциальное уравнение (2.1) имеет решение и единственное, удовлетворяющее граничным условиям (2.2). Относительно функций $\sigma_i(e_i)$ и $\omega(e_i)$ предполагается (1.8) и (1.9).

Если решение задачи существует, то оно согласно (2.14) может быть представлено в виде

$$\eta = \eta^\circ + A_3 J_3(\xi) - A_4 J_4(\xi) + \lambda \int_0^\xi [4\eta\Omega(\eta, \eta'') J_4(\xi - t) + \\ + \eta''\varphi(\eta, \eta'') J_2(\xi - t)] \tag{3.1}$$

где

$$\begin{gathered} A_3 = \lambda \int_0^l [4\eta\Omega(\eta, \eta'')\sin t - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')\cos t] e^{-t}\, dt \\ A_4 = \lambda \int_0^l [4\eta\Omega(\eta, \eta'')(\sin t + \cos t) - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')(\cos t - \sin t)] e^{-t} dt \end{gathered} \tag{3.2}$$

где l — максимальный корень уравнения (2.12), или если корня нет, то l стремится к бесконечности

Выше доказано (2.13), что A_3 и A_4 формально удовлетворяют второму граничному условию при $\xi \to \infty$. Подберем величины A_3 и A_4 так, чтобы было удовлетворено второе граничное условие (2.2), и докажем существование решения краевой задачи для уравнения (2.1).

Продифференцируем уравнение (3.1) два раза. Имеем

$$\eta'' = \eta^{\circ\prime\prime} + A_3 J_1(\xi) - A_4 J_2(\xi) + \lambda \int_0^l [4\eta\Omega(\eta, \eta'') J_2(\xi - t) - \\ - 4\eta''\varphi(\eta, \eta'') J_4(\xi - t)]\, dt + \lambda\eta''\varphi(\eta, \eta'')$$

или

$$\eta''[1 - \lambda\varphi(\eta, \eta'')] = \eta^{\circ\prime\prime} + A_3 J_1(\xi) - A_4 J_2(\xi) + \\ + \lambda \int_0^l [4\eta\Omega(\eta, \eta'') J_2(\xi - t) - 4\eta''\varphi(\eta, \eta'') J_4(\xi - t)]\, dt \tag{3.3}$$

Сделаем замену переменных, положив

$$\vartheta = \eta''[1 - \lambda\varphi(\eta, \eta'')] \tag{3.4}$$

Найдем оценку для производной $\partial\vartheta / \partial\eta''$. Имеем

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta''} = 1 - \lambda\varphi(\eta, \eta'') - 3\lambda\eta'' \frac{\partial}{\partial\eta''} \int_0^1 \omega(e_i)\zeta^2\, d\zeta =$$

$$= 1 - \lambda\varphi(\eta, \eta'') - 3 \int_0^1 \frac{d\omega}{de_i} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\zeta^2\eta''^2}{\sqrt{\zeta^2\eta''^2 + {}^4/_3\eta^2}}\, \zeta^2 d\zeta =$$

$$= 1 - 3\int_0^1 \omega\zeta^2 d\zeta - 3\int_0^1 e_i \frac{d\omega}{de_i} \frac{\zeta^2\eta''^2}{(\zeta^2\eta''^2 + {}^4/_3\eta^2)^{3/2}}\, \zeta_2 d\zeta > 1 - \int_0^1 \left(\omega + e_i \frac{d\omega}{de_i}\right) d\zeta^3$$

Но для пластической или упруго-пластической зоны $\omega + e_i d\omega / dl_i \leqslant 1$ и поэтому $\partial\vartheta / \partial\eta'' \neq 0$ при произвольных конечных значениях η, η''. Следовательно, к (3.4) применима теорема о неявных функциях. Имеем

$$\eta'' = f(\eta, \vartheta) \tag{3.5}$$

для любых конечных η, ϑ, причем η'' непрерывна по совокупности переменных η, ϑ и имеет частные производные по η и ϑ. Произведем замену переменных в (3.1) и (3.3):

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^\circ(\xi) + A_3 J_3(\xi) - A_4 J_4(\xi) + \lambda \int_0^\xi f_1(\xi, t, \eta, \vartheta)\, dt \\ \vartheta &= \eta^\circ(\xi) + A_3 J_1(\xi) - A_4 J_2(\xi) + \lambda \int_0^\xi f_2(\xi, t, \eta, \vartheta)\, dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\xi, t, \eta, \vartheta) &= 4\eta\Omega[\eta, f(\eta, \vartheta)] J_4(\zeta - t) + \frac{\vartheta\varphi[\eta, f(\eta, \vartheta)]}{1 - \lambda\varphi[\eta, f(\eta, \vartheta)]} J_2(\xi - t) \\ f_2(\xi, t, \eta, \vartheta) &= 4\eta\Omega[\eta, f(\eta, \vartheta)] J_2(\xi - t) - \frac{4\vartheta\varphi[\eta, f(\eta, \vartheta)]}{1 - \lambda\varphi[\eta, f(\eta, \vartheta)]} J_4(\xi - t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

а) Докажем, что система (3.6) имеет решение и единственное при произвольных постоянных A_3 и A_4. Для этого рассмотрим подинтегральные функции f_1 и f_2 в (3.6).

Докажем, что f_1 и f_2 непрерывны при изменении ξ, t, η, ϑ в произвольной фиксированной конечной области. Действительно, Ω непрерывная функция в этой области в силу ее задания (при $0 < \omega < 1$ и при любых конечных η и $f(\eta, \vartheta)$ должно быть $\Omega < 1$); $J_1, J_2, J_3, J_4, \vartheta, \eta$ непрерывны в этой области; φ непрерывна в этой области в силу ее задания ($0 < \omega < 1$ и при любых конечных η и $f(\eta, \vartheta)$ должно быть $\varphi < 1$); поэтому при условии $\omega < 1$ дробь $1 / (1 - \lambda\varphi)$ конечна и непрерывна в указанной области. Аналогично показывается непрерывность f_2.

Заметим, что f_1 и f_2 имеют непрерывные частные производные первого порядка по η и ϑ, следовательно, для них условие Липшица выполняется. Таким образом, f_1 и f_2 обладают всеми свойствами, которые гарантируют существование и единственность решения при доказательстве существования решения систем нелинейных интегральных уравнений вольтеровского типа методом Пикара [3]. Доказательство Пикара справедливо лишь для достаточно малого интервала изменения ξ, так как требует, чтобы ни одно из последовательных приближений не выходило из заданных границ.

Можно показать, что доказательство будет справедливо для конечного интервала $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$, если выполняются условия

$$|f_1(\xi, t, \eta, \vartheta)| < C(|\eta| + |\vartheta|), \quad |f_2(\xi, t, \eta, \vartheta)| < C(|\eta| + |\vartheta|) \quad (C = \text{const}) \tag{3.8}$$

Так как для функций f_1 и f_2 условие (3.8) выполняется, то тем самым доказано, что система (3.6) имеет только одно непрерывное решение для любого конечного изменения ξ

$$\eta = \psi_1(\xi, A_3, A_4), \qquad \vartheta = \psi_2(\xi, A_3, A_4) \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.5), получим, что существует непрерывная вторая производная η'' и третья кусочно-непрерывная производная с заданным скачком, а также четвертая для двух интервалов $0 \leqslant \xi < \xi_1$ и $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant L = \text{const}$. Таким образом, интегро-дифференциальное уравнение (3.1) при произвольных конечных постоянных коэффициентах A_3 и A_4 имеет единственное решение в любой конечной области изменения ξ. В силу теоремы о зависимости решения от параметров можно утверждать, что в нашем случае функции

$$\eta = \eta_1(\xi, A_3, A_4), \qquad \eta'' = \eta''(\xi, A_3, A_4), \qquad \vartheta = \vartheta(\xi, A_3, A_4) \tag{3.10}$$

имеют и частные производные по A_3 и A_4 в любой конечной области изменения ξ, A_3, A_4.

б) Докажем, что можно выбрать постоянные A_3 и A_4 так, чтобы удовлетворить и второму граничному условию $\eta \to 0$, $\eta' \to 0$ при $\xi \to \infty$.

Для этого покажем, что существуют A_3 и A_4, удовлетворяющие системе (3.2):

$$\begin{gathered} A_3 = \lambda \int_0^\xi [4\eta\Omega(\eta, \eta'')\sin t - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')\cos t]\, e^{-t}\, dt \\ A_4 = \lambda \int_0^\xi [4\eta\Omega(\eta, \eta'')(\sin t + \cos t) - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')(\cos t - \sin t)]\, e^{-}\, dt \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\eta''^2(\xi) + \frac{4}{3}\eta^2(\xi) = \frac{4}{3}$$

где η и η'' заменены согласно (3.10)

Первые два уравнения системы (3.11) есть интегральные уравнения с переменным пределом ξ относительно неизвестных функций $A_3(\xi)$, $A_4(\xi)$. Подинтегральные функции удовлетворяют всем условиям существования и единственности решения, и остается лишь показать (как и при доказательстве существования решения системы (3.6), что последовательные приближения не выйдут из заданных границ при произвольно фиксированном интервале изменения ξ. Для этого воспользуемся выражением η и η'' согласно (3.2) и (3.3).

Мы уже показали, что функции Ω и λ должны быть меньше 1 при конечном изменении аргументов, а функции η°, $J_1(\xi)$, $J_2(\xi)$, $J_3(\xi)$, $J_4(\xi)$ непрерывны и дифференцируемы в том же интервале ξ. Пусть наибольший максимум этих функций будет m, так что

$$|\eta^\circ| < m, \qquad |J_\nu| < m \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

Тогда получим из (3.2) и (3.3)

$$\begin{gathered} |\eta| \leqslant m + m(|A_3| + |A_4|) + \lambda m \int_0^\xi (|\eta| + |\eta''|)\, dt \\ |\eta''| \leqslant \frac{m}{k}(1 + |A_3| + |A_4|) + \frac{4\lambda m}{k}\int_0^\xi (|\eta| + |\eta''|)\, dt \end{gathered} \tag{3.12}$$

где $k = \min(1 - \lambda\varphi)$ и не зависит от A_3 и A_4.

Выбирая максимальное число B из чисел m/k, $4m/k$, m, $4m$, получим

$$
\begin{aligned}
|\eta| &\leqslant B\left[1+|A_3|+|A_4|+\lambda\int_0^\xi(|\eta|+|\eta''|)\,dt\right] \\
|\eta''| &\leqslant B\left[1+|A_3|+|A_4|+\lambda\int_0^\xi(|\eta|+|\eta''|)\,dt\right]
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Промажорируем систему (3.11):

$$
|A_3|\leqslant\lambda C\int_0^\xi(|\eta|+|\eta''|)\,dt,\qquad |A_4|\leqslant\lambda C\int_0^\xi(|\eta|+|\eta''|)\,dt \tag{3.14}
$$

где C — наибольший из максимумов величин

$$
4\Omega e^{-t}\sin t,\qquad 2\varphi e^{-t}\cos t,\qquad 4\Omega(\sin t+\cos t)\,e^{-t},\qquad 2\varphi(\cos t-\sin t)\,e^{-t}
$$

Теперь будем последовательно подставлять в неравенство (3.14) выражения (3.13). Тогда для интервала $(0,\xi)$ получим

$$
\begin{aligned}
|A_3| &\leqslant 2\lambda CB\int_0^\xi dt+2\gamma CB\int_0^\xi(|A_3|+|A_4|)\,dt+2\lambda^2CB\int_0^\xi dt\int_0^\xi(|\eta|+|\eta''|)\,dt= \\
&=2\lambda CB\int_0^\xi dt+2\lambda CB\int_0^\xi(|A_3|+|A_4|)\,dt+2\lambda\, CB(2\lambda B)\int_0^\xi dt\int_0^\xi dt+ \\
&+2\lambda CB(2\lambda B)\int_0^\xi dt\int_0^\xi(|A_3|+|A_4|)\,dt+2\lambda CB(2\lambda^2B)\int_0^\xi dt\int_0^\xi dt\int_0^\xi(|\eta|+|\eta''|)\,dt= \\
&=\ldots=2\lambda CB(2\lambda B)^{n-1}\underbrace{\int_0^\xi dt\ldots\int_0^\xi}_{n\ \text{раз}} dt+2\lambda CB(2\lambda B)^{n-1}\underbrace{\int_0^\xi dt\ldots\int_0^\xi}_{n\ \text{раз}}(|\eta|+|\eta''|)\,dt
\end{aligned}
$$

Легко убедиться в справедливости последнего равенства для любого n методом полной индукции. Применяя формулу Коши, получим

$$
\begin{aligned}
|A_3| \leqslant 2\lambda CB\Big\{&1+\int_0^\xi(|A_3|+|A_4|)\,dt+\frac{2\lambda B}{2!}\xi^2+ \\
&+\frac{(2\lambda B)}{1!}\int_0^\xi(\xi-t)(|A_3|+|A_4|)\,dt+\frac{(2\lambda B)^2}{3!}\xi^3+ \\
&+\frac{(2\lambda B)^2}{2!}\int_0^\xi(\xi-t)^2(|A_3|+|A_4|)\,dt+\cdots+\frac{(2\lambda B)^{n-1}}{n!}\xi^n+ \\
&+\frac{(2\lambda B)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\xi(\xi-t)^{n-1}(|A_3|+|A_4|)\,dt+ \\
&+\frac{(2\lambda B)^{n-1}}{n!}\lambda\int_0^\xi(\xi-t)(|\eta|+|\eta''|)\,dt\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Аналогичная оценка имеет место для A_4.

Мы доказали уже, что функции $\eta(\xi, A_3, A_4)$, $\eta''(\xi, A_3, A_4)$ при любых конечных значениях ξ, A_3, A_4 конечны и непрерывны с частными производными первого порядка при непрерывном изменении аргументов. Поэтому последний член в неравенстве (3.15) при достаточно большом n может быть сделан меньше любого наперед заданного малого положительного числа δ (подинтегральное выражение конечно). Переходя к пределу $n \to \infty$, получим

$$|A_{3,4}| \leqslant 2\lambda CB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\lambda B)^{n-1}}{n!} \xi^n \left\{1 + \int_0^{\xi} (|A_3| + |A_4|)\, dt\right\} \tag{3.16}$$

Ряд в правой части неравенства (3.16) сходится и не зависит от A_3, A_4. Обозначая через S его сумму, получим

$$|A_3| \leqslant 2\lambda BCS \left(1 + \int_0^{\xi} (|A_3| + |A_4|)\, dt\right)$$

Следовательно, для системы интегральных уравнений (3.11) существует мажорирующее интегральное уравнение

$$u = 2\lambda BCS \left(1 + 2\int_{\xi}^{\xi} u dt\right)$$

которое имеет решение в любом конечном интервале изменения ξ.

Это решение не зависит от ξ, удовлетворяет неравенствам

$$|A_3| \leqslant |u|, \qquad |A_4| \leqslant |u|$$

Таким образом, задавая интервал изменения, можно указать границы изменения A_3, A_4, для которых последовательные приближения не выйдут из этих заранее указанных границ.

Далее, доказав равномерную сходимость последовательных приближений, легко показать, что предельная функция удовлетворяет системе первых двух интегральных уравнений (3.11) и является единственной. Доказательство вышеуказанных предложений совпадает с известным доказательством для системы уравнений вольтеровского типа. Итак, действительно, существуют значения

$$A_3 = A_3(\xi), \qquad A_4 = A_4(\xi) \tag{3.17}$$

непрерывные для любого конечного интервала изменения ξ, которые удовлетворяют двум первым уравнениям системы (3.11).

Подставляя (3.17) в третье уравнение системы (3.11), мы определяем максимальный по модулю корень $\xi = l$.

4. Доказательство конечности длины пластической области. Допустим, что конечного корня $\xi = l$ не существует. Тогда мы должны в (3.11) положить $\xi \to \infty$. При этом имеем

$$\begin{gathered} A_3 = \lambda \int_0^{\infty} [4\eta\Omega(\eta, \eta'')\sin t - 2\eta''\cos t]\, e^{-t}\, dt \\ A_4 = \lambda \int_0^{\infty} [4\eta\Omega(\eta, \eta'')(\sin t + \cos t) - 2\eta''(\cos t - \sin t)]\, e^{-t}\, dt \end{gathered} \tag{4.1}$$

если интеграл сходится. Мы доказали, что интегро-дифференциальное уравнение (4.1) имеет решение при произвольных A_3 и A_4 для произвольного интервала изменения ξ. Далее, мы показали, что система интегральных уравнений (3.11) относительно неизвестных функций $A_3(\xi)$, $A_4(\xi)$ имеет также решение в любом произвольно фиксированном интервале изменения ξ.

Напомним, что A_3 и A_4 согласно граничным условиям удовлетворяют равенствам (2.4):

$$[A_3 J_3(\xi) + A_4 J_4(\xi) + \Phi(\xi)]_{\xi \to \infty} = 0, \quad [A_3 J_3'(\xi) + A_4 J_4'(\xi) + \Phi'(\xi)]_{\xi \to \infty} = 0$$

где $\Phi(\xi)$ и $\Phi'(\xi)$ даны формулами (2.11). При этом аналогично (2.13) мы имеем

$$\begin{aligned} a_3 &= a_3^\circ + \lambda \lim_{\xi \to \infty} \int_0^\xi \left\{ 4\eta\Omega \frac{g_3(\xi, t)}{m(\xi)} + \eta''\varphi(\eta, \eta'') \frac{h_3(\xi, t)}{m(\xi)} \right\} dt \\ a_4 &= a_4^\circ + \lambda \lim_{\xi \to \infty} \int_0^\xi \left\{ 4\eta\Omega \frac{g_4(\xi, t)}{m(\xi)} + \eta''\varphi(\eta, \eta'') \frac{h_4(\xi, t)}{m(\xi)} \right\} dt \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_3(\xi, t) &= J_3(\xi - t) J_4(\xi) - J_4(\xi - t) J_3(t), \qquad g_4(\xi) = g^2(\xi) + {}^1/_2 h_3(\xi) \\ h_3(\xi, t) &= J_1(\xi - t) J_4(\xi) - J_2(\xi - t) J_3(t), \qquad h_4(\xi) = h_3(\xi) - 2g_3(\xi) \\ m(\xi) &= J_3^2(\xi) - J_4(\xi) J_2(\xi) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Напишем теперь следующие равенства;

$$\begin{aligned} A_3^* &= a_3^\circ + \lambda \int_0^{\xi^*} \left[4\eta\Omega(\eta, \eta'') \frac{g_3(l_0, t)}{m(l_0)} + \eta''\varphi(\eta, \eta'') \frac{h_3(l_0, t)}{m(l_0)} \right] dt \\ A_4^* &= a_4^\circ + \lambda \int_0^{\xi^*} \left[4\eta\Omega(\eta, \eta'') \frac{g_4(l_0, t)}{m(l_0)} + \eta''\varphi(\eta, \eta'') \frac{h_4(l. t)}{m(l_0)} \right] dt \end{aligned} \tag{4.4}$$

при этом $m(l_0) \neq 0$ и A_3^*, A_4^* удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \eta &= A_3^* J_3(l_0) + A_4^* J_4(l_0) + \Phi(l_0) = 0 \\ \eta' &= A_3^* J_3'(l_0) + A_4^* J_4'(l_0) + \Phi'(l_0) = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Если A_3^* и A_4^* определяются равенствами (4.4), то это означает, что мы рассматриваем цилиндрическую оболочку (трубу) конечной длины l_0 под действием сосредоточенного окружного давления p, где для $\xi^* = l_0$ удовлетворяются уравнения (4.5).

Аналогично доказательству существования решения системы интегральных уравнений (3.11) можно доказать, что система интегральных уравнений (4.4) имеет решение и единственное относительно неизвестных функций $A_3^*(\xi^*)$, $A_4^*(\xi^*)$ при заданном конечном давлении p. Подставляя $A_3^*(\xi^*)$, $A_4(\xi^*)$ в (3.11), мы получим, что или существует максимальный корень $\xi^* = l^*$, или он совпадает с абсциссой (заделки) трубы $\xi^* = l_0$.

Далее используем известные теоремы [1, 2].

I. Компоненты девиатора напряжений $\sigma_{xx}-\sigma_1, \ldots, \sigma_{xy}, \ldots$ имеют потенциал W, зависящий только от интенсивности деформации e_i:

$$\sigma_{xx}-\sigma_1=\frac{\partial W_1}{\partial e_{xx}}, \ldots \qquad \sigma_{xy}=\frac{\partial W_1}{\partial e_{xy}}, \ldots$$

где

$$W_1=\frac{3}{2} G \int_0^{e_i}[1-\omega(e_i)]\, d(e_i^2)$$

Следствие: при всяком активном упруго-пластическом процессе работа внутренних сил в единице объема тела является функцией только интенсивности деформаций и объемного расширения θ

$$\sigma_{xx}\delta e_{xx}+\sigma_{yy}\delta e_{yy}+\cdots=\delta W$$

где

$$W=\frac{3}{2} G \int_0^{e_i}[1-\omega(e_i)]\, d(e_i^2)+\frac{1}{2} K\theta^2$$

II. Если массовые силы отсутствуют, то для активной простой деформации из кинематически возможных деформированных состояний тела, имеющих заданное перемещение на границе, в действительности имеет место то, которое сообщает минимум работе внутренних сил.

Применим теорему II к нашей задаче для случая цилиндрической оболочки конечной длины l_0. Все условия теоремы удовлетворены. Решение краевой задачи для цилиндрической оболочки конечной длины l_0 существует и единственное (как уже доказано). Выберем длину цилиндрической оболочки l_0, достаточно большую и рассмотрим последовательность цилиндрических оболочек (поперечное сечение и материал тот же самый), длины которых $l_1<l_2<\ldots<l_n$ меньше длины l_0. Для оболочки длиной l_ν $(\nu=1, \ldots, n)$ решение той же краевой задачи при том же конечном сосредоточенном окружном давлении p существует и единственное.

Тогда за сравнимые, кинематически возможные состояния тела, имеющие заданное перемещение на границе, возьмем те состояния, которые определяются на интервале $0 \leqslant \xi^* \leqslant l_\nu$ решением η_ν^*, а на интервале $l_\nu \leqslant \xi^* \leqslant l_0$ полагаем

$$\eta_\nu^*=0, \qquad \eta_\nu^{*\prime}=0$$

Тогда работа внутренних сил для оболочки η_ν^* по теореме будет

$$V_\nu=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi(ah)^{3/2} \sigma_s e_s \int_0^{l_\nu} d\xi \int_0^1 \int_0^{e^*} e_i\,[1-\omega(e_i)]\, de_i\, d\zeta \tag{4.6}$$

где a — радиус оболочки, h — толщина, $e^*=e(\vartheta, \eta_\nu^*, \eta_\nu^{*\prime\prime})$.

Величина интеграла V_ν конечна и не зависит от длины l_0. В силу теоремы II

$$V_0<V_\nu=B \tag{4.7}$$

где V_0 — работа внутренних сил оболочки длины l_0 и B — величина конечная, не зависящая от l_0.

Предположим, что при заданном сосредоточенном давлении p для цилиндрической оболочки конечной длины l_γ корня ξ^* уравнения (2.11) (каково бы ни было $l_\gamma < l_0$) не существует, т. е. он равен значению ξ^* границы $\xi^* = l_\gamma$. Тогда, выполняется неравенство

$$\zeta^2 \eta''^2 + \frac{4}{3}\eta^2 \geqslant \frac{4}{3} \tag{4.8}$$

Оценим работу внутренних сил для оболочки длины l_0. Пользуясь (4.6), имеем

$$V_0 \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi (\mathrm{ah})^{3/2} \sigma_s e_s (1-\alpha) \int\limits_0^{l_0} d\xi \int\limits_0^1 \left(\zeta^2 \eta_0^{*''^2} + \frac{4}{3}\eta_0^{*^2}\right) d\zeta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi (\mathrm{ah})^{3/2} \sigma_s e_s (1-\alpha) \int\limits_0^{l_0} \left(\frac{1}{3}\eta_0^{*''^2} + \frac{4}{3}\eta_0^{*^2}\right) d\zeta \tag{4.9}$$

где $\alpha = \max \omega(e_i)$

Обозначим через β величину, которая не зависит от длины l_0 цилиндрической оболочки:

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi (ah)^{3/2} \sigma_s e_s (1-\alpha)$$

Тогда из (4.9), пользуясь (4.7), получим

$$V_0 \geqslant \int\limits_0^{l_0} \left[\frac{1}{3}\eta_0^{*''^2} + \frac{4}{3}\eta_0^{*2}\right] d\xi < B \tag{4.10}$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{l_0} \eta_0^{*''2} d\xi < \frac{3B}{\beta}, \qquad \int\limits_0^{l_0} \eta_0^{*2} d\xi < \frac{3}{4}\frac{B}{\beta} \tag{4.11}$$

Применим к левым частям неравенства (4.11) неравенство Шварца. Имеем

$$\int\limits_0^{l_0} \eta_0^{*''^2} d\xi < \sqrt{\frac{3B}{\ }} \sqrt{l_0}, \qquad \int\limits_0^{l_0} \eta_0^{*^2} d\xi < \sqrt{\frac{3B}{4\beta}} \sqrt{l_0} \tag{4.12}$$

Полученные неравенства (4.12) используем несколько позже.

Теперь же покажем, что предположение о несуществовании корня третьего уравнения (3.11) неверно. Действительно, по предположению корня не существует, и, следовательно,

$$\zeta^2 \eta''^2 + \frac{4}{3}\eta^2 > \frac{4}{3}$$

Из формулы (4.9) имеем

$$V_0 \geqslant \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi (ah)^{3/2} \sigma_s e_s (1-\alpha) l_0 \tag{4.13}$$

В то же время V_0 ограничено сверху $V_0 < B$, не зависящей от l_0, т. е. получается противоречие, и поэтому предположение, что не существует корня третьего уравнения (3.11), неверно. Таким образом, общая длина упруго-пластических участков конечна и зависит только от нагрузки при заданном поперечном сечении и материале.

Докажем, что для цилиндрической оболочки длины l_ν при достаточно большом ν не может быть упруго-пластического и пластического участка, примыкающих к границе l_ν, а только упругий участок, на котором интенсивность деформации с увеличением длины трубы l_ν уменьшается, т. е. уменьшаются η и η''. Действительно, предположим, что у конца цилиндрической оболочки длины l_ν мы имеем упруго-пластический участок, начало которого $\xi^* = l_\nu^-$. Тогда, если выбирать трубу длины l_ν достаточно большой, то мы должны иметь упругий участок, примыкающий к предполагаемому упруго-пластическому участку. Так как мы выбрали l_ν достаточно большим, то найдется такое сечение L, где $|e_s| < \delta$ и δ — любое выбранное положительное число (это следует из того, что V_0 ограничено).

Разрежем мысленно оболочку в этом сечении L. Тогда остальная часть оболочки ξ_ν^* должна быть в равновесии под действием малой перерезывающей силы и малого момента. Работа V этих внешних сил на малых перемещениях η и η'' будет малая порядка δ^2, т. е.

$$V < \delta^2 \tag{4.14}$$

Так как на границе упругого и упруго-пластического участка значение η и его любых производных конечно и ограничено снизу величиной, не зависящей от длины l_ν, то существует конечный участок, примыкающий к упруго-пластическому, который не зависит от длины l_ν (начало участка $\xi^* = l_\nu^-$) и в котором интенсивность деформации e_i также не зависит от l_ν и больше некоторого фиксированного γ. Тогда в силу равновесия работа внешних сил V должна быть больше или равна работе внутренних сил.

Пользуясь (4.6), имеем

$$V \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi (ah)^{3/2} \sigma_s e_s \int_L^{l_\nu} d\xi \int_0^1 \Big[\int_0^{e_i} e_i [1 - \omega(e_i)]\, de_i \Big] d\zeta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi (ah)^{3/2} \sigma_s e_s \int_L^{l_\nu^-} d\xi \int_0^1 e_i^2 d\zeta + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi (ah)^{3/2} \sigma_s e_s \int_{l_\nu}^{L} d\xi \tag{4.15}$$

$$\int_0^1 \Big\{ \int_0^{e_i} e_i [1 - \omega(e_i)]\, de_i \Big\} dz \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi (ah)^{3/2} \sigma_s e_s \gamma (l_\nu^- - L) = c$$

где c не зависит от длины l_ν. При достаточно большом ν на основании (4.14) можно выбрать δ так, что $\delta^2 < c$; поэтому, начиная с некоторой длины l_ν, будет $V \leqslant \delta^2 \leqslant c$, что противоречит неравенству (4.14); таким образом, предположение, что при достаточно большом l_ν все еще будет упруго-пластический участок, неверно. Следовательно, существует только упругий участок, примыкающий к l_ν, на котором интенсивность деформаций с увеличением длины l_ν убывает, и поэтому η и η'' могут быть меньше наперед заданного положительного числа $\varepsilon < 1/3$ при достаточно большом ν.

Перейдем теперь от конечной цилиндрической оболочки к полубесконечной. Из определения пределов (2.8) и (2.9) (которые, как уже доказано, существуют) следует, что для произвольно малого положительного числа ε всегда найдется такое положительное число Λ, что для $l_0 > \Lambda(\varepsilon)$ будет

$$\left| e^{-t}\sin t - \frac{g_3(l_0 t)}{m(l_0)} \right| < \varepsilon, \qquad \left| 2e^{-t}\cos t - \frac{h_3(l_0, t)}{m(l_0)} \right| < \varepsilon \tag{4.17}$$

где $g_3(\xi, t)$, $h_3(\xi, t)$ и $m(\xi)$ определяются согласно (4.3).

Более подробно

$$\left| e^{-t}\sin t - \frac{g_3(l_0, t)}{m(l_0, t)} \right| = \left| e^{-t}\sin t - (\sin t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t) - \right. \tag{4.18}$$

$$\left. - \frac{\sin^2 l_0 \sin t \operatorname{ch} t - \sin^2 l_0 \sin t \operatorname{sh} t - \operatorname{sh} t \sin t \sin l_0}{\operatorname{sh}^2 l_0 - \sin^2 l_0} \right| < \left| \frac{\operatorname{ch} t + 2\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}^2 \xi} \right| < \frac{3}{2} e^t e^{-2l_0}$$

Такая же оценка справедлива для второго неравенства (4.16) и для аналогичных неравенств, которые могут быть написаны для коэффициентов A_4. Подставляя в равенство (4.2) вместо дроби $g_3(l_0, t) / m(l_0)$ ее предельное значение, получим

$$A_3^* = a_3^\circ + \lambda \int_0^{l_0} \{4\eta\Omega(\eta, \eta'') \sin t - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'') \cos t\} e^{-t} dt \tag{4.19}$$

$$A_4^* = a_4^\circ + \lambda \int_0^{l_0} \{4\eta\Omega(\eta, \eta'')(\sin t + \cos t) - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')(\cos t - \sin t)\} e^{-t} dt$$

Оценивая разность $A_3^* - a_3$, примем во внимание неравенство (4.17). Имеем

$$\left| A_3^* - a_3 \right| < \frac{3}{2} \lambda e^{-2l_0} \left| \int_0^{l_0} 4\eta e^t dt \right| + \frac{3}{2} \lambda e^{-2l_0} \left| \int_0^{l_0} \eta'' e^t dt \right| <$$

$$< e^{-l_0} 6\lambda \left| \int_0^{l_0} \eta\, dt \right| + \frac{3}{2} \lambda e^{-l_0} \left| \int_0^{l_0} \eta'' dt \right|$$

Но в силу неравенств (4.11) имеем

$$| A_3^* - a_3 | < 15\, c e^{-l_0} \sqrt{l_0}, \qquad | A_4^* - a_4 | < 15\, c e^{-l_0} \sqrt{l_0}$$

(второе неравенство написано по аналогии).

Следовательно, при достаточно большом l_0 величины A_3^* и A_4^* как угодно мало отличаются соответственно от a_3 и a_4. Мы доказали, что для конечной длины оболочки при заданном давлении p можно найти такую длину l_0, что

$$\eta''^2 + \frac{4}{3}\eta^2 < \frac{4}{3} \qquad \text{для } \Lambda \leqslant \xi^* \leqslant l_0$$

т. е. что у места заделки l_0 имеется только упругий участок.

Воспользуемся теперь теоремой Пуанкаре о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий и параметров. Согласно этой теореме, если вместо коэффициентов a_3 и a_4 в уравнении краевой задачи для конечной длины оболочки подставить величины A_3^* и A_4^*, как угодно мало отличающиеся от a_3 и a_4, то и решения этих уравнений, а также и вторые производные решений будут как угодно мало отличаться одно от другого. Тем самым доказано, что и в случае бесконечной трубы пластический участок имеет конечную длины и, начиная с некоторого ξ^*, имеется только упругий участок.

Итак, если взять длину ξ^* достаточно большой, например $\xi^* > \Lambda$ (где Λ — произвольное большое число), то $|\eta| < \varepsilon$, $|\eta''| < \varepsilon$, где ε может быть как угодно малым. Но тогда

$$\eta''^2 + \frac{4}{3}\eta^2 < \alpha < \frac{4}{3}$$

По предположению, конечного корня ξ^* не существует. Поэтому в системе (3.12) для $\xi > L$ подинтегральные выражения отличны от нуля, а следовательно, отличны от нуля Ω и φ, а это означает, что $\eta''^2 + {}^4/_3\,\eta^2 \geqslant {}^4/_3$. С другой стороны, $\eta''^2 + {}^4/_3\eta^2 < {}^4/_3$, как показано (4.8). Следовательно, мы пришли к противоречию и поэтому корень ξ^* уравнения $\eta''^2 + {}^4/_3\,\eta^2 = {}^4/_3$ существует, т. е. пластический и упруго-пластический участки имеют конечную длину. Отметим также, что вышеизложенный метод доказательства существования решения краевой задачи (2.1), (2.2) и сходимости метода упругих решений может быть применен к другим краевым условиям для осесимметричной деформации цилиндрической оболочки. При доказательстве существования решения краевой задачи (2.1), (2.2) попутно доказано также существование решения и возможность применения метода упругих решений для случая цилиндрической оболочки конечной длины.

Все выводы остаются справедливыми для произвольно распределенной нагрузки на конечном участке оболочки. Метод доказательства можно распространить на случай изгиба балок и пластинок и вообще на те случаи, в которых основное нелинейное дифференциальное уравнение является обыкновенным. Числовые же расчеты показывают быструю сходимость последовательных приближений.

Поступила в редакцию
20 X 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. ПММ. 1944. Т. VIII. № 1.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Москва. Гостехиздат. 1948.
3. Гурса. Курс математического анализа.