Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Я. Л. Лунц

(Ленинград)

В работе рассматривается распространение сферических волн, возникающих в безграничном пространстве, заполненном упруго-пластической средой при приложении центральносимметричной нагрузки к поверхности сферической полости, вырезанной в этом пространстве. В разделах 1—5 рассматривается случай активного нагружения и определяются смещения в упругой и пластически деформированной части пространства[1]. Находится радиус распространения сильного разрыва пластической волны в зависимости от величины начального давления. В разделе 6 рассматривается простейшая задача о распространении волны разгрузки. Дается метод построения приближенного решения для области остаточных деформаций[2].

1. Основные уравнения. Пусть на границе сферической полости единичного радиуса возникает в некоторый момент равномерное давление $p(t)$, превосходящее предел упругости материала. Ниже будет показано, что в этом случае появляются две сферические волны, соответствующие упругим и пластическим деформациям, которые распространяются с различными скоростями.

Обозначим через σ_1, σ_2, σ_3 и e_1, e_2, e_3 соответственно главные напряжения и главные деформации по трем взаимно перпендикулярным площадкам. Как известно, интенсивность напряжений сдвига σ_i и интенсивность деформаций сдвига ε_i определяются формулами

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^3+(e_3-e_1)^2}$$

Теория пластичности приводит к следующим трем законам, связывающим напряжения с деформациями [5]

1. *Закон пластичности*:

$$\sigma_i = F(\varepsilon_i)$$

Здесь F — известная функция, удовлетворяющая условию $dF/d\varepsilon_i \geqslant 0$.

2. *Закон сжимаемости или закон пропорциональности среднего гидростатического напряжения средней деформации:*

$$\sigma = 3Ke \qquad \left(\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}, \quad e = \frac{e_1+e_2+e_3}{3}\right)$$

где K — модуль объемного сжатия.

---

[1] Эта задача иными методами рассматривалась в литературе [1,2]

[2] Для случая распространения плоских упруго-пластических волн эта задача рассматривалась в работах [3,4].

3. *Закон пропорциональности девиатора напряжений девиатору деформаций.* В скалярном виде он описывается шестью уравнениями вида

$$X_x - \sigma = 2G(e_{xx} - e), \quad X_y = Ge_{xy} \qquad (x, y, z)$$

Для случая симметричной деформации эти уравнения упрощаются. Введем сферические координаты r, φ, ϑ. Тогда напряжения $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\vartheta$ и деформации $e_r, e_\varphi, e_\vartheta$ будут главными, и имеют место равенства

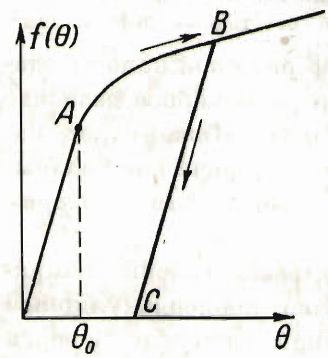
$$\sigma_\varphi = \sigma_\vartheta, \qquad e_\varphi = e_\vartheta, \qquad e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad e_\varphi = \frac{u}{r}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_\varphi - \sigma_r), \qquad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

где $u(r, t)$ — смещение в направлении радиуса. Соотношения между напряжениями и деформациями примут вид

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sqrt{3}F\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right], \qquad \sigma_r + 2\sigma_\varphi = 3K\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) \qquad (1.1)$$

Заметим, что мы будем рассматривать такие деформации, для которых легко установить, что



Фиг. 1

$$\sigma_\varphi - \sigma_r > 0, \qquad \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} > 0$$

К уравнениям (1.1) нужно присоединить уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.2)$$

где ρ — плотность среды, которую считаем постоянной. Для удобства введем функцию $f(x)$

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3\rho}F\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + \frac{K}{\rho}x \qquad (1.3)$$

Подставим (1.3) в первое равенство (1.1), тогда получим

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{3\rho}{2}\left[f\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{K}{\rho}\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] \qquad (1.4)$$

Второе равенство (1.1) и (1.4) дают

$$\sigma_r = -\rho f\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) + 3K\frac{u}{r} \qquad (1.5)$$

Введем обозначение

$$\theta = \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \qquad (1.6)$$

Подстановка (1.4) и (1.5) в (1.2) дает уравнение

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial r} + \frac{3f(\theta)}{r} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.7)$$

Введем обозначение $-\partial u / \partial t = v$. Система квазилинейных уравнений

$$\frac{df(\theta)}{dr} + \frac{3f(\theta)}{r} = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \qquad (1.8)$$

будет эквивалентна уравнению (1.7).

Заметим, что в области упругих деформаций, где

$$f(\theta) \equiv a_0^2\theta \qquad \left(a_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)$$

уравнение (1.7) принимает известный вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

Характеристическая система дифференциальных уравнений, соответствующая системе (1.8), имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} - a(\theta)\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \alpha} - a(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{3f(\theta)}{r}\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{v}{r}\frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} + a(\theta)\frac{\partial t}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \beta} + a(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{3f(\theta)}{r}\frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{v}{r}\frac{\partial r}{\partial \beta} = 0 \tag{1.11}$$

Здесь

$$a(\theta) = \sqrt{f'(\theta)}$$

Эту величину будем называть скоростью распространения волны. Линии $\beta = \mathrm{const}$ и $\alpha = \mathrm{const}$ назовем соответственно характеристическими проекциями положительного и отрицательного направлений.

В области упругих деформаций $a(\theta) = a_0$ и характеристические проекции на плоскости (r, t) суть два семейства прямых

$$dr / dt = \pm a_0$$

В общем случае характеристические проекции являются интегральными кривыми уравнений

$$dr / dt = \pm a[\theta(r, t)]$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие фунции $f(\theta)$, для которых имеют место неравенства

$$0 < a_1 \leqslant f'(\theta) \leqslant a_0, \qquad f'' \leqslant 0 \tag{1.12}$$

При $\theta \leqslant \theta_0$ деформации считаем упругими, т. е.

$$f(\theta) = a_0^2\theta$$

На фиг. 1 дан вид функции $f(\theta)$, точка A соответствует пределу упругости.

2. Начальные и граничные условия. Будем решать задачу, при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(r, t) = 0 \qquad \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_r = p(t) < 0 \qquad \text{при} \quad r = 1 \tag{2.2}$$

Воспользуемся формулой (1.5). Тогда (2.2) примет вид

$$-\rho f\left(u - \frac{\partial u}{\partial r}\right) + 3Ku = p(t) \qquad \text{при} \quad r = 1 \tag{2.3}$$

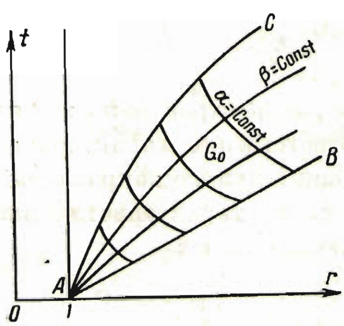
Относительно давления $p(t)$ по поверхности полости предполагаем, что оно по модулю монотонно возрастает $(dp / dt < 0)$.

Случай мгновенно включенного давления ($p(0) \neq 0$) следует рассматривать как предельный случай монотонно возрастающего от нуля давления. Повторяя при этом рассуждения Х. А. Рахматулина [3, 6], можно легко показать, что точка $r = 1$, $t = 0$ является точкой многозначности для функции $\theta(r, t)$, определенной в (1.6).

В этой точке функция θ принимает все значения, определяемые из неравенства

$$p(0) \leqslant -\rho f(\theta) \leqslant p_s, \qquad p_s = -\rho f(\theta_0) \tag{2.4}$$

Характеристические проекции, исходящие из особой точки, покрывают некоторую область G, ограниченную двумя «крайними» характеристиками AB и AC (фиг. 2). Прямая AB, уравнение которой $r - 1 = a_0 t$, является линией разрыва для функций $\partial u / \partial r$ и θ. На прямой AB и ниже ее $u = 0$. Внутренняя производная вдоль прямой AB будет



Фиг. 2

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dt} = 0$$

так как $u = 0$ вдоль AB. Отсюда

$$v + a_0\theta = 0 \tag{2.5}$$

так как $\partial u / \partial t = -v$, $\partial u / \partial r = -\theta$.

Положим $\alpha = r$ и перепишем второе из уравнений (1.10) при условии (2.5)

$$-2a_0\frac{d\theta}{dr} - 2a_0\frac{\theta}{r} = 0 \tag{2.6}$$

Мы здесь воспользовались тем, что $a(\theta) = a_0$ на AB и $f(\theta) = a_0^2\theta$. Легко видеть, что в особой точке на прямой AB следует положить $\theta = \theta_0$. Тогда из (2.6) получим

$$\theta = \frac{\theta_0}{r} \tag{2.7}$$

Отметим, что вдоль AB функция $\theta(r, t)$ убывает. Это свойство мы докажем в дальнейшем для любой характеристической проекции, исходящей из особой точки. Используя последнее из уравнений (1.11) и соотношение (2.5), можно установить связь между v и θ в особой точке. Последовательно имеем

$$v - v_0 = -\int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta)\,d\theta, \qquad v + a_0\theta_0 = -\int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta)\,d\theta \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_0\theta_0 + \int_{\theta_0}^{0} a(\theta)\,d\theta > 0$$

в особой точке, а тогда из (1.5) следует, что

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}\rho f'(\theta) = -\frac{dp}{dt} + 3K\frac{\partial u}{\partial t}$$

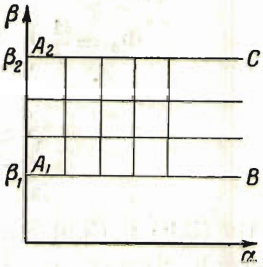
Условие $dp/dt < 0$ обеспечивает положительность $\partial\theta/\partial t$ в некоторой окрестности особой точки, т. е. активность деформации. Сформулируем теперь задачу о распространении активной деформации.

Требуется решить уравнение (1.7) при первом из условий (2.1), (2.7) и (2.3), считая деформацию активной.

3. Поведение функции θ вдоль характеристик в области G. Дифференцирование уравненений (1.10) по β и (1.11) по α приводит после преобразований к уравнениям

$$\Phi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{r}(\Phi_\alpha r_\beta + \Phi_\beta r_\alpha) + \frac{6f[\theta(\Phi)]\, r_\alpha r_\beta}{r^2 a} \qquad (3.1)$$

$$r_{\alpha\beta} = \frac{da}{d\theta}\frac{1}{2a^2}(\Phi_\alpha r_\beta + \Phi_\beta r_\alpha) \qquad (3.2)$$



Фиг. 3

Здесь введена новая функция

$$\Phi(\theta) = \int_0^\theta a(\theta)\, d\theta \qquad (3.3)$$

Изучим поведение $\Phi(\theta)$ вдоль характеристик в области G. Примем для определенности за параметр α величину $r_0 - 1$, где r_0 — абсцисса точки на характеристике AB, а за параметр β — значение θ в особой точке. Каждой точке в области G, кроме граничных точек, соответствует единственная точка на плоскости (α, β). Особой точке соответствует отрезок $[\beta_0, \beta_1]$ оси β, причем

$$\beta_0 = \theta_0, \qquad \beta_1 = \theta_1 = \max\theta$$

Функции Φ и r могут быть единственным образом определены как решения характеристической задачи Коши для системы уравнений (3.1) и (3.2) при известных значениях Φ и r на характеристиках A_1A_2 и A_1B (фиг. 3).

Покажем, что существует такая окрестность G_0 особой точки, что в ней $\Phi_\alpha < 0$ и $\theta > 0$, и оценим ее величину. Это позволит доказать существование решения задачи, сформулированной в следующем параграфе. Из (3.1) и (3.2) можно получить интегральные уравнения

$$\Phi_\alpha[\theta(\alpha,\beta)] = \frac{r_0}{r}\left[\Phi_\alpha(\theta)\Big|_{\beta=\beta_0} + \frac{1}{r_0}\int_{\beta_0}^{\beta}\left(-\Phi_\beta r_\alpha + \frac{6f(\theta)}{ra} r_\alpha r_\beta\right) d\beta\right] \qquad (3.4)$$

$$\Phi_\beta[\theta(\alpha,\beta)] = \frac{1}{r}\left[\Phi_\beta(\theta)\Big|_{\alpha=0} + \int_0^{\alpha}\left(-\Phi_\alpha r_\beta + \frac{6f(\theta)}{ra} r_\alpha r_\beta\right) d\alpha\right] \qquad (3.5)$$

$$r_\alpha(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{a(\theta)}{a_0}}\left[r_\alpha(\alpha,\beta_0) + \frac{\sqrt{a_0}}{2}\int_{\beta_0}^{\beta}\frac{\partial a(\theta)}{\partial\alpha}\, a^{-3/2}(\theta)\, r_\beta\, d\beta\right] \qquad (3.6)$$

$$r_\beta(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{a(\theta)}}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\partial a(\theta)}{\partial\beta}\, a^{-3/2}(\theta)\, r_\alpha d_\alpha \qquad (3.7)$$

Воспользуемся для дальнейших оценок соотношениями, вытекающими из (2.7) и из способа выбора параметров α и β:

$$r_\alpha > 0, \quad t_\alpha > 0, \quad r_\beta \leqslant 0, \quad t_\beta \geqslant 0, \quad r_\alpha(\alpha, \beta_0) = 1, \quad r_\beta(0, \beta) = 0 \quad (3.8)$$

$$\theta(0, \beta) = \beta, \quad \theta(\alpha, \beta_0) = \frac{\theta_0}{r_0} > 0, \quad \Phi_\alpha \Big|_{\beta=\beta_0} = -\frac{a_0\theta_0}{r_0^2} < 0, \quad \Phi_\beta \Big|_{\alpha=0} = a(\beta) \quad (3.9)$$

Из (3.4) и (3.5) имеем

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{r}\Big\{-\frac{a_0\theta_0}{r_0} + \int\limits_{\beta_0}^{\beta} \frac{6f(\theta)\, r_\alpha r_\beta}{ra(\theta)} d\beta - \int\limits_{\beta_0}^{\beta} \frac{r_\alpha}{r} a(\beta)\, d\beta -$$

$$- \int\limits_{\beta_0}^{\beta} \frac{r_\alpha}{r}\Big[\int\limits_0^{\alpha}\Big(-\Phi_\alpha + \frac{6f(\theta)\, r_\alpha}{ra(\theta)}\Big) r_\beta d\alpha\ \Big]\, d\beta\Big\} \quad (3.10)$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что положительным может быть только двойной интеграл, но если α_0 выберем малым, то его абсолютная величина будет также мала при всех $\alpha \leqslant \alpha_0$, а следовательно, $\Phi_\alpha < 0$. При этом мы пользуемся еще тем, что $\theta(\alpha, \beta) > 0$ в некоторой окрестности $\alpha = 0$, но это вытекает просто из непрерывности функции $\theta(\alpha, \beta)$ в области G и на границе $\alpha = 0$. Итак, существование G_0 доказано.

Оценим эту окрестность. В области G_0, пользуясь (3.10), получим

$$\Phi_\alpha \geqslant \frac{1}{r}\Big[-\frac{a_0\theta_0}{r_0} + \frac{6f(\theta_1)}{a_1}\log\frac{r}{r_0} + \frac{1}{r}a_0(\theta_0 - \theta_1)\Big] \quad (3.11)$$

Здесь мы использовали неравенство $r_\alpha \leqslant 1$, справедливое в G_0 в силу (3.6) и (3.8). Вдоль характеристик имеем $a_1 \leqslant |dr/dt| \leqslant a_0$. Отсюда следует геометрически очевидное неравенство: $r > 2a_1 r_0/(a_0 + a_1)$, где, как и везде выше, принято: $r = r(\alpha, \beta)$ и $r_0 = r(\alpha, \beta_0)$. Пользуясь этим неравенством, получим

$$\Phi_\alpha > -\frac{\theta_1 a_0}{r}\Big[1 + 3\frac{a_0}{a_1^2}(a_0 - a_1)\Big], \qquad \Phi_\alpha > -\frac{M_1\theta_1}{r_0} \quad (3.12)$$

где

$$M_1 = a_0\Big[1 + 3\frac{a_0}{a_1^2}(a_0 - a_1)\Big]\frac{a_0 + a_1}{2a_1}$$

Проинтегрируем (3.12) по α и, вспомнив, что $\alpha = r_0 - 1$, получим

$$\Phi[\theta(\alpha, \beta)] - \Phi[\theta(0, \beta)] > -M_1\theta_1 \log r_0$$

Чтобы функция θ была положительной, потребуем, чтобы

$$r_0 \leqslant \exp\Big\{\frac{a_0\theta_0}{M_1\theta_1}\Big\} \quad (3.13)$$

Оценим Φ_α сверху в G_0. Из (3.10) получим

$$\Phi_\alpha \leqslant \frac{1}{r}\Big[-\frac{a_0\theta_0}{r_0} - \frac{1}{r}\int\limits_0^{\alpha}\Big[\frac{2M_1\theta_1 a_1}{a_0 + a_1} + \frac{6f(\theta_1)}{a_1}\Big]\log\frac{r}{r_0}\, d\alpha\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r}\Big\{-\frac{a_0\theta_0}{r_0} + \theta_1\delta\,\frac{a_0 - a_1}{2a_1}\Big[M_1 + \frac{3a_0^2(a_0 + a_1)}{a_1^2}\Big]\frac{r_0 - 1}{r_0}\Big\} \quad (3.14)$$

В неравенстве (3.14) через δ обозначено следующее отношение

$$\delta = \left(\log \frac{a_0 + a_1}{2a_1}\right) : \left(\frac{a_0 - a_1}{2a_1}\right) < 1$$

Тогда, чтобы функция $\partial\theta / \partial\alpha$ была отрицательной, потребуем, чтобы

$$r_0 \leqslant 1 + \frac{a_0\theta_0}{M_2\theta_1} \qquad \left(M_2 = \frac{a_0 - a_1}{2a_1}\left[M_1 + \frac{3a_0^2(a_0 + a_1)}{a_1^2}\right]\right)$$

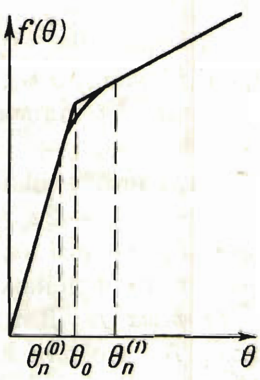
Очевидно, что при

$$r_0 \leqslant \min\left[\exp\left\{\frac{a_0\theta_0}{M_1\theta_1}\right\},\ 1 + \frac{a_0\theta_0}{M_2\theta_1}\right] \tag{3.15}$$

выполняются одновременно неравенства $\theta > 0$ и $\partial\theta / \partial\alpha < 0$, следовательно, эта окрестность должна принадлежать G_0. Заметим, что правая часть (3.15) зависит только от отношений θ_0 / θ_1 и a_0 / a_1.

4. Схема Прандтля.[1] Пусть функция $f(\theta)$ задана в следующем виде:

$$f(\theta) = \begin{cases} a_0^2\theta & \text{при } \theta \leqslant \theta_0 \\ a_1^2\theta + (a_0^2 - a_1^2)\theta_0 & \text{при } \theta \geqslant \theta_0 \end{cases} \tag{4.1}$$



Фиг. 4

где

$$a_0 = \sqrt{\frac{4G_e + 3K}{3\rho}}, \qquad a_1 = \sqrt{\frac{4G_p + 3K}{3\rho}}$$

Здесь G_e и G_p — упругий и пластический модули сдвига. Это так называемая «схема Прандтля», представленная на фиг. 4.

В точке $\theta = \theta_0$ производная $f(\theta)$ терпит разрыв. Поэтому нужно особо определить, что мы будем называть решением уравнения (1.7) или системы (1.8).

Рассмотрим последовательность достаточно гладких функций $f_n(\theta)$ таких, что $f_n(\theta) = f(\theta)$ при $\theta \leqslant \theta_n^{(0)} < \theta_0$ и $\theta \geqslant \theta_n^{(1)} > \theta_0$, а при $\theta_n^{(0)} < \theta < \theta_n^{(1)}$ все $f_n(\theta)$ имеют отрицательные вторые производные (фиг. 4)

Пусть, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n^{(0)} = \lim_{n\to\infty} \theta_n^{(1)} = \theta_0, \qquad f_n(\theta) \to f(\theta), \qquad \theta_n^{(1)} < \theta_1$$

Обозначим через $u_n(r, t)$ решение задачи, соответствующее функции $f_n(\theta)$. Решением поставленной задачи в некоторой области G будем называть такую непрерывную функцию $u_0(r, t)$, которая является

---

[1] Случай идеальной пластичности ($G_p = 0$) рассматривал Альтшулер [1]. Парадоксальность его результатов объясняется противоречивостью граничного условия (1) с законом сжимаемости. Из последнего и условия пластичности имеем

$$\sigma_r = E_n\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) - \frac{2|\sigma_0|}{3}$$

а из (1) на фронте волны ($u = 0$) следует

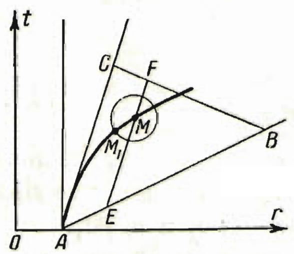
$$\sigma_r = E_n \frac{\partial u}{\partial r}$$

Оба равенства возможны только при $\sigma_0 = 0$, что абсурдно.

пределом в среднем для последовательности функций $u_n(r, t)$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(G)} (u_0 - u_n)^2 d\sigma = 0$$

Выберем положительное число θ^* так, что $\theta^* < \theta_n^{(0)}$ при любом n и определим окрестность G_0 неравенством



Фиг. 5

$$r_0 \leqslant \min \left[\exp \frac{a_0 \theta^*}{M_1 \theta_1}, \ 1 + \frac{a_0 \theta^*}{M_2 \theta_1} \right]$$

Заметим, что определенная этим неравенством окрестность не зависит от n и в ней имеет место неравенство для всех n:

$$k \leqslant \frac{\partial \theta_n}{\partial \alpha} \leqslant K < 0 \tag{4.2}$$

которое следует из (3.12) и (3.14).

Так как $\theta_1 > \theta_n^{(1)}$, то можно указать такую окрестность $\alpha \leqslant \alpha_0$, принадлежащую G_0, в которой $\theta_n(\alpha, \beta_1) \geqslant \theta_n^{(1)}$ при любом n.

Тогда на плоскости r, t она будет заключена между прямыми $r - 1 = a_0 t$ и $r - 1 = a_1 t$ и характеристикой $\alpha = \alpha_0$. Мы эту окрестность не увеличим, если вместо характеристики $\alpha = \alpha_0$ ограничим ее прямой $r - 1 = -a_0 t + 2\alpha_0$. Тогда мы получим треугольник ABC (фиг. 5), принадлежащий области G_0 при любом n. Проведем прямую EF параллельно AC и докажем две теоремы.

Теорема 1. Для каждого отрезка EF (фиг. 5) найдется такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ и всех точек отрезка EF будет иметь место неравенство $\theta_n(M) < \theta_n^{(0)}$.

Доказательство. Опишем из любой точки M отрезка EF окружность радиуса ρ, не пересекающую прямой AC. Пусть M_1 (фиг. 5) точка пересечения этой окружности с характеристикой AM. Тогда при помощи (4.2) и неравенства $r_\alpha \leqslant 1$ получим

$$\theta_n(M) = \theta_n(M_1) + \int_{\alpha(M_1)}^{\alpha(M)} \frac{\partial \theta_n}{\partial \alpha} d\alpha \leqslant \theta_n(M_1) + \rho K$$

Но $\theta_n(M_1) < \theta_n^{(1)}$, так как в противном случае характеристика в точке M_1 была бы параллельна AC и, следовательно, она не могла бы выходить из A. Поэтому

$$\theta_n(M) < \theta_n^{(1)} + \rho K$$

Но $\theta_n^{(1)} = \theta_n^{(0)} + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, найдется такое N, что при $n \geqslant N$ будет $\varepsilon_n + \rho K \leqslant 0$ и тогда $\theta_n(M) < \theta_n^{(0)}$ для всех M, что и требовалось доказать.

Следствие. При $n \geqslant N$ в $\triangle EBF$ будет $\theta_n(M) < \theta_n^{(0)}$, так как $\partial \theta_n / \partial \alpha < 0$ в $\triangle EBF$. Это означает, что деформации здесь упругие и что в EBF функции $u_n(r, t)$ удовлетворяют линейному уравнению (1.9).

Теорема 2. Как бы мало ни было положительное число ε, всегда найдется такое N, что для всех $n \geqslant N$ и всех точек M отрезка EF будет иметь место неравенство $0 < \theta_0 - \theta_n(M) \leqslant \varepsilon$, если только прямая EF достаточно близка к AC.

Доказательство. Из теоремы 1 имеем: $\theta_n(M) < \theta_n^{(0)}$ при $n \geqslant N$ для всех M на EF. Следовательно, характеристика в точке M должна быть параллельна AB. Двигаясь по ней к точке A, мы должны достичь точки M_1, где $\theta_n(M_1) = \theta_n^{(0)}$. Тогда получим

$$\theta_n(M) = \theta_n^{(0)} + \int\limits_{\alpha(M_1)}^{\alpha(M)} \frac{\partial \theta_n}{\partial \alpha} d\alpha \geqslant \theta_n^{(0)} + k[r(M) - r(M_1)] \geqslant \theta_n^{(0)} + kAE$$

Но $\theta_n^{(0)} = \theta_0 - \varepsilon_n'$, поэтому $\theta_0 - \theta_n(M) \leqslant \varepsilon_n' - kAE$, что и доказывает теорему, так как ε_n' и AE могут быть сколь угодно малыми, если n достаточно велико и прямая EF достаточно близка к AC.

Следствие. При условиях теоремы 2 неравенство $|\theta_0 - \theta_n(P)| \leqslant \varepsilon$ имеет место во всей замкнутой области $AEFC$, если определить $\theta_n(P)$ на отрезке AC через ее предельные значения изнутри области.

Легко видеть, что предельные значения для функций $\theta_n(P)$ на отрезке AC равны $\theta_n^{(1)}$. Если M — точка пересечения характеристики, проходящей через точку P с прямой EF, то в силу доказанного ранее $\theta_n^{(1)} > \theta_n(P) > \theta_n(M) > \theta_0 - \varepsilon$; отсюда вытекает наше следствие.

После этого можно установить сходимость в среднем последовательности функций $u_n(r, t)$ в треугольнике ABC. Пусть $u_0(r, t)$ есть решение уравнения (1.9) в треугольнике ABC при условиях

$$u_0(r, t) = 0 \quad \text{на } AB, \qquad \frac{u_0(r, t)}{r} - \frac{\partial u_0(r, t)}{\partial r} = \theta_0 \quad \text{на } AC$$

Это решение единственно. Рассмотрим разность

$$w_n(r, t) = u_0(r, t) - u_n(r, t)$$

Функция $w_n(r, t)$ обращается в нуль на AB. Составим выражение

$$\frac{w_n(r, t)}{r} - \frac{\partial w_n(r, t)}{\partial r} = \varepsilon_n(r, t)$$

В силу непрерывности $u_0(r, t)$ вместе с $\partial u_0(r, t)/\partial r$ в замкнутой области ABC и следствия из теоремы 2 можно утверждать, что $\max|\varepsilon_n(r, t)|$ может быть сколь угодно мал в замкнутой области $AEFC$, если только n достаточно велико и прямая EF достаточно близка к AC.

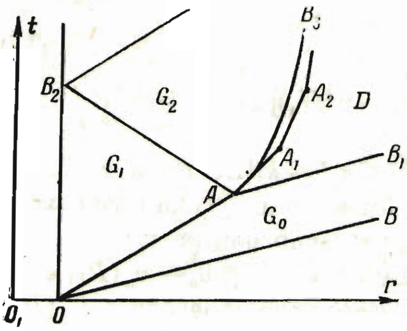
Далее, из малости $\varepsilon_n(r, t)$ на отрезке EF, следствия из теоремы 1 и обращения $w_n(r, t)$ в нуль на EB следует малость в среднем функции $\varepsilon_n(r, t)$ и ее производных в треугольнике EBF (корректность линейной задачи), т. е.

$$\iint\limits_{(\Delta EBF)} \left[w_n^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial t}\right)^2\right] dr dt \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty$$

В этом легко убедиться, производя обычные оценки с помощью «интеграла энергии» для уравнения (1.9), которому удовлетворяет $w_n(r, t)$. Отсюда вытекает малость в среднем $\varepsilon_n(r, t)$ во всем треугольника ABC.

а тогда, опять воспользовавшись обращением $w_n(r, t)$ в нуль на прямой AB, можно показать сходимость в среднем последовательности функций $u_n(r, t)$ к $u_0(r, t)$ во всем треугольнике ABC. Таким образом, доказано, что в ABC решение задачи дается функцией $u_0(r, t)$.

5. Построение решения. Построим решение $u_0(r, t)$ для области упругих деформаций G_0 (фиг. 6) в окрестности особой точки. Согласно предыдущему в области G_0 нужно найти решение уравнения



Фиг. 6

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{2u_0}{r^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{5.1}$$

при условиях:

на прямой $r - 1 = a_0 t$

$$u_0(r, t) = 0 \tag{5.2}$$

на прямой $r - 1 = a_1 t$

$$\frac{u_0(r, t)}{r} - \frac{\partial u_0(r, t)}{\partial r} = \theta_0 \tag{5.3}$$

где a_0 и a_1 имеют значения (4.1).

Уравнение (5.1) и условие (5.2) тождественно удовлетворяются, если положить

$$u_0(r, t) = \frac{\Psi'(r - a_0 t - 1]}{r} - \frac{\Psi(r - a_0 t - 1)}{r^2} \tag{5.4}$$

$$\Psi'(0) = \Psi(0) = 0 \tag{5.5}$$

Здесь и везде в дальнейшем штрихи обозначают дифференцирование по всему аргументу.

Остается удовлетворить условию (5.3). Пользуясь (5.4), получим

$$\frac{\Psi''(x)}{\lambda x + 1} - \frac{3\Psi'(x)}{(\lambda x + 1)^2} + \frac{3\Psi(x)}{(\lambda x + 1)^3} = -\theta_0 \qquad \left(\lambda = \frac{a_1}{a_1 - a_0} < 0\right) \tag{5.6}$$

Решение уравнения (5.6) ищем в виде

$$\Psi(x) = -\frac{\theta_0(\lambda x + 1)^3}{(\lambda - 1)(6\lambda - 3)} + C(\lambda x + 1)^\alpha$$

Для определения α получаем квадратное уравнение

$$\alpha^2\lambda^2 - \alpha(\lambda^2 + 3\lambda) + 3 = 0 \tag{5.7}$$

Корни будут комплексными при условии $(\lambda + 3)^2 - 12 < 0$, или, учитывая отрицательность λ, при $\lambda > -2\sqrt{3} - 3$, или согласно (5.6), когда $a_0^2 / a_1^2 > 4/3$. Введем обозначения

$$\mu = \frac{\lambda + 3}{2\lambda}, \qquad \nu = \frac{-\sqrt{12 - (\lambda + 3)^2}}{2\lambda}$$

Все дальнейшие результаты пригодны как для ν вещественного, так и для ν чисто мнимого. Нужно только иметь в виду, что в последнем случае следует перейти от функций мнимого аргумента к функциям вещественного аргумента. После определения произвольных постоянных из условия (5.5) решение уравнения (5.4) получим в виде

$$\Psi(x)=\frac{\theta_0}{(\lambda-1)(6\lambda-3)}\Big\{-(\lambda x+1)^3+(\lambda x+1)^\mu\Big]\cos(\nu\log(\lambda x+1))+$$
$$+\frac{3-\mu}{\nu}\sin(\nu\log(\lambda x+1))\Big\}$$

Тогда смещение $u_0(r,t)$ в области G_0 выразится формулой

$$u_0(r,t)=\frac{\theta_0}{(\lambda-1)(6\lambda-3)}\Big\{\frac{\lambda}{r}\Big[-3\xi^2+\xi^{\mu-1}\Big(3\cos(\nu\log\xi)+$$
$$+\frac{3\mu-\nu^2-\mu^2}{\nu}\sin(\nu\log\xi)\Big)\Big]-$$
$$-\frac{1}{r^2}\Big[-\xi^3+\xi^\mu\Big(\cos(\nu\log\xi)+\frac{3-\mu}{\nu}\sin(\nu\log\xi)\Big)\Big]\Big\} \tag{5.8}$$

Здесь

$$\xi=\lambda x+1,\qquad x=r-a_0t-1$$

Для того чтобы продолжить решение в пластическую область G_1 (фиг. 6), необходимо знать значение $u_0(r,t)$ на прямой $r-1=a_1t$, которая вблизи особой точки является границей между областями G_0 и G_1. При $r-1=a_1t$ имеем $\lambda x+1=r$ и

$$g(r)\equiv u_0\Big(r,\frac{r-1}{a_1}\Big)=\qquad\qquad\Big(\sigma=\frac{-3\lambda^2-4\lambda+3}{2\nu\lambda}\Big) \tag{5.9}$$
$$=\frac{\theta_0}{(\lambda-1)(6\lambda-3)}\Big\{(-3\lambda+1)r+r^{\mu-2}[(3\lambda-1)\cos(\nu\log r)-\sigma\sin(\nu\log r)]\Big\}$$

Перейдем к определению $u(r,t)$ в области G_1. Из (1.7) и (4.1) имеем

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2u}{r^2}-\frac{3(a_0^2-a_1^2)\theta_0}{a_1^2r}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2} \tag{5.10}$$

Из (1.5) следует

$$\sigma_r=\rho a_1^2\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}(3K-\rho a_1^2)-\rho\theta_0(a_0^2-a_1^2)$$

На поверхности полости $r=1$ задано давление $p(t)$. Чтобы найти $u(r,t)$, к уравнению (5.10) необходимо присоединить условия

$$\rho a_1^2\frac{\partial u}{\partial r}+(3K-\rho a_1^2)u-\rho\theta_0(a_0^2-a_1^2)=p(t)\quad\text{при}\quad r=1$$
$$u(r,t)=g(r)\quad\text{при}\quad r-1=a_1t$$

Последнее условие есть условие непрерывности смещений на прямой $r-1=a_1t$. Положим

$$u(r,t)=u_1(r,t)-hr\log r\qquad\Big(h=-\frac{a_0^2-a_1^2}{a_1^2}\theta_0\Big)$$

где $u_1(r,t)$ — новая искомая функция. Для ее определения имеем

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{2u_1}{r^2}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2} \tag{5.11}$$

При этом

$$u_1(r,t)=g(r)+hr\log r\quad\text{при}\quad r-1=a_1t \tag{5.12}$$

$$\rho a_1^2\frac{\partial u_1}{\partial r}+u_1(3K-\rho a_1^2)=p(t)\quad\text{при}\quad r=1 \tag{5.13}$$

Решение $u_1(r, t)$ ищем в виде

$$u_1(r, t) = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\Phi_1(r + a_1 t - 1) + \Psi_1(r - a_1 t - 1)}{r}\right\}$$

Уравнение (5.11) при этом удовлетворяется тождественно. Подставляя $u_1(r, t)$ в (5.12), получим

$$\frac{\Phi_1'(2r-2) + \Psi_1'(0)}{r} - \frac{\Phi_1(2r-2) + \Psi_1(0)}{r^2} = g(r) + hr\log(r)$$

Решая это уравнение при условии $\Phi_1(0) = \Psi_1(0) = \Psi_1'(0) = 0$, найдем

$$\Phi_1(x) = \frac{(x+2)^2}{2}\int_0^x \frac{g_1(\tau)\, d\tau}{\tau + 2}$$

где

$$g_1(x) = g\left(\frac{x}{2} + 1\right) + h\left(\frac{x}{2} + 1\right)\log\left(\frac{x}{2} + 1\right) \tag{5.14}$$

Для определения $\Psi_1(x)$ воспользуемся условием (5.13). Это дает

$$\Psi_1''(x) - \varkappa\Psi_1'(x) + \varkappa\Psi_1(x) = p_1(x) - \left[\frac{d^2\Phi_1(-x)}{dx^2} + \varkappa\frac{d\Phi_1(-x)}{dx} + \varkappa\Phi_1(-x)\right] \tag{5.15}$$

где

$$\varkappa = 3\left(1 - \frac{K}{\rho a_1^2}\right) = \frac{4G_p}{\rho a_1^2}, \qquad p_1(x) = \frac{1}{\rho a_1^2}\, p\left(-\frac{x}{a_1}\right)$$

Решение уравнения (5.15) имеет вид

$$\Psi_1(x) = -\Phi_1(-x) + \frac{1}{\gamma}\int_0^x \Big\{[p_1(\tau) - \varkappa^2\Phi_1(-\tau)]\sin\gamma(x-\tau) -$$

$$- 2\varkappa\gamma\Phi_1(-\tau)\cos\gamma(x-\tau)\Big\}\exp\frac{\varkappa(x-\tau)}{2}\, d\tau \tag{5.16}$$

где $\gamma = {}^1/_2\sqrt{4\varkappa - \varkappa^2}$ есть вещественное число, так как $0 \leqslant \varkappa < 3$.

Таким образом, функция $u(r, t)$ найдена:

$$u(r, t) = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r\gamma}\int_0^x \left[-\varkappa\gamma(-\tau+2)^2\cos\gamma(x-\tau)\int_0^{-\tau}\frac{g_1(\sigma)\, d\sigma}{\sigma+2} + \right.\right.$$

$$\left. + \sin\gamma(x-\tau)\left[p_1(\tau) - \frac{\varkappa^2(-\tau+2)^2}{2}\int_0^{-\tau}\frac{g_1(\sigma)\, d\sigma}{\sigma+2}\right]\right]\exp\frac{\varkappa(x-\tau)}{2}\, d\tau -$$

$$\left. - \frac{(-x+2)^2}{2r}\int_0^{-x}\frac{g_1(\sigma)\, d\sigma}{\sigma+2} + \frac{(y+2)^2}{2r}\int_0^{y}\frac{g_1(\sigma)\, d\sigma}{\sigma+2}\right\} - hr\log r \tag{5.17}$$

Здесь $x = r - a_1 t - 1$, $y = r + a_1 t - 1$. Для того чтобы определить область G_1, для которой выведена формула (5.17), необходимо потребовать, чтобы на прямой $r - 1 = a_1 t$ выполнялось неравенство

$$\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \geqslant \theta_0 \tag{5.18}$$

В противном случае продолжать решение (5.8) через прямую $r-1=a_1 t$ нельзя. Решив неравенство (5.18) и определив точку A (фиг. 6), мы определим и область, которая ограничена прямыми $r-1=a_1 t$ и характеристикой отрицательного направления, исходящей из A. Для решения неравенства (5.18) воспользуемся (5.17).

После некоторых преобразований получим

$$\frac{1}{r}\left[\int_0^{2r-2}\frac{g_1(x)\,dx}{x+2}-\frac{3}{2}g_1(2r-2)+rg_1'(2r-2)+p_1(0)-g_1'(0)\right]-h\geqslant 0_0$$

Возьмем для функции $g_1(x)$ выражение (5.14). Тогда для определения абсциссы точки A (обозначим ее через $r_{\max}$) получим уравнение

$$\varphi(r,\lambda)\equiv b_0+b_1 r+r^{\mu-2}\left[b_2\cos(\nu\log r)+b_3\sin(\nu\log r)\right]=\frac{p(0)}{p_s} \tag{5.19}$$

Здесь p_s — критическое давление, соответствующее пределу упругости, коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 выражаются через λ:

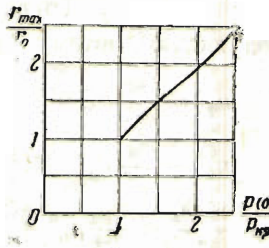
$$b_0=\frac{10\lambda^3-22\lambda^2+15\lambda-3}{2(\lambda-1)^2(2\lambda^2-6\lambda+3)},\qquad b_1=\frac{2\lambda^2-6\lambda+3}{2(\lambda-1)^2}$$

$$b_2=\frac{-(6\lambda^2-8\lambda+3)\lambda}{2(\lambda-1)^2(2\lambda^2-6\lambda+3)},\qquad b_3=\frac{-(6\lambda^3+2\lambda^2-9\lambda+3)}{4\nu(2\lambda^2-6\lambda+3)(\lambda-1)^2}$$

Можно проверить, что $r=1$ есть корень уравнения (5.19) при $p(0)=p_s$. Для $p(0)/p_s<1$ предлагаемый метод непригоден, так как граница $r-1=a_1 t$ не будет линией сильного разрыва. Для вещественных корней уравнения (5.7) уравнение (5.19) будет

$$b_0+b_1 r+\frac{b_2+b_3}{2}r^{\mu+\nu_1-2}+\frac{b_2-b_3}{2}r^{\mu-\nu_1-2}=\frac{p(0)}{p_s}$$

$$\left(\nu_1=-\frac{\sqrt{(\lambda+3)^2-12}}{2\lambda}\right) \tag{5.20}$$



Фиг. 7

Решим уравнение (5.19) и определим зону распространения скачка пластических деформаций для одного конкретного случая. Известно, что для большинства металлов коэффициент Пуассона σ лежит между 0.25 и 0.35. Для случая идеальной пластичности имеем

$$G_p=0,\qquad \frac{a_0}{a_1}=\sqrt{1+\frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma}}$$

Следовательно, ν есть мнимое число при $\sigma>{}^5/_{13}\approx 0.385$.

Приводим результаты вычислений для $\sigma=0.25$ и $\sigma=0.35$:

σ	$\frac{a_0}{a_1}$	λ	b_0	b_1	b_2	b_3	μ	ν
0.35	1.20	−5	−0.314	1.15	0.161	0.191	0.21	0.282
0.25	1.34	−2.94	−0.420	1.22	0.198	0.08	−0.01	0.590

Подстановка этих значений в (5.19) для $\sigma=0.25$ дает

$r=$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\varphi(r,0.5)=$	1	1.09	1.18	1.29	1.40	1.50	1.61	1.72	1.85	1.96	2.07

График, построенный на фиг. 7 по этим значениям r и φ, показывает, что для практически интересного интервала отношения $p(0)/p_s$ левая часть (5.19) мало отличается от линейной функции, так что $p(0)/p_s \approx r_{\max}/r_0$, где r_0 — радиус полости. Изменение величины σ мало сказывается на функции $\varphi(r;\lambda)$ при $r \geqslant 1$.

Перейдем к определению решения задачи в областях G_2 и D, граница между которыми неизвестна.

Решение для этих областей в конечном виде найти не удается. Мы будем пользоваться некоторым процессом последовательных приближений, сущность которого в том, что криволинейная граница между G_2 и D будет заменяться некоторой полигональной кривой.

Из условия исчезновения скачка первых производных в точке A и на всей границе AB_3, а также из условия сопряжений смещений на границе упругой и пластической зоны следует

$$u_1 = u_2, \qquad \frac{u_1}{r} - \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{u_2}{r} - \frac{\partial u_2}{\partial r} = \theta_0$$

Здесь $u_1(r, t)$ — решение уравнения (5.1) в области D, а $u_2(r, t)$ — решение уравнения (5.10) в области G_2. Образуем внутренние производные $u_1'' = d^2u_1/dt^2$ на прямой AB_1 и $u_2'' = d^2u_2/dt^2$ на прямой AB_2, а также выражения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_1}{r} - \frac{\partial u_1}{\partial r}\right), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{u_2}{r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right)$$

на кривой AB_3. Тогда получим, принимая во внимание (5.1) и (5.10), следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&u_1'' = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} a_0^2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial t} a_0 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, && \frac{d}{dt}\left(\frac{u_0}{r}\right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial t}\\
&u_2'' = \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} a_1^2 - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial t} a_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, && \frac{d}{dt}\left(\frac{u_0}{r}\right) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial t}\\
&\frac{2a_0^2\theta_0}{r} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} a_0^2 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, && \left(1 - \frac{3}{2}h\right)\frac{2a_1^2\theta_0}{r} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} a_1^2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Здесь $u_0(t)$ — значение функций $u_1(r, t)$ и $u_2(r, t)$ на AB_3.

Выразим d^2u_0/dt^2 через вторые производные в области D и в области G_2, а затем приравняем эти выражения. Таким образом получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial t}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial t}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tag{5.22}$$

Из системы уравнений (5.21) и (5.22) определим dr/dt. Имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_0 a_1 \left[r u_2'' - r u_1'' + 2(a_0 + a_1)\,\partial u/\partial t - (a_0^2 - a_1^2)\,\theta_0\right]}{a_1 r u_1'' + a_0 r u_2'' + a_0(a_0 + a_1)(3a_0 + a_1)\,\theta_0} \tag{5.23}$$

Здесь $\partial u/\partial t = \partial u_1/\partial t = \partial u_2/\partial t$ — частная производная на AB_3.

В точке A все входящие в правую часть (5.23) величины известны, так как $\partial u/\partial t$, u_1'', u_2'' могут быть найдены из (5.8) и (5.17). Следовательно, будет определено направление касательной к искомой кривой в точке A.

Заменяя дугу кривой AB_3 отрезком AA_1 (фиг. 6), мы найдем $u_1(r, t)$ и $u_2(r, t)$ в области влияния этого отрезка слева и справа. Для этого нужно будет решить два обыкновенных дифференциальных уравнения вида (5.6) для $\Phi_2(x)$ и $\Psi(x)$, функция $\Psi_2(x)$ для G_2 совпадает с $\Psi_1(x)$ для G_1. Тогда, пользуясь (5.23), можно будет определить dr/dt в точке A_1, а затем в точке A_2 и т. д.

Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока $dr/dt \geqslant 0$. При $dr/dt = 0$ наступает стадия разгрузки, для которой уравнение (5.10) не имеет места. Значение r, для которого $dr/dt = 0$, определяет границу распространения пластической волны.

Изложенный метод применим для нахождения приближенного решения задачи в случае $p(0) \geqslant p_s$, т. е. при отсутствии сильного разрыва.

6. Случай разгрузки. При разгрузке принимается, что деформации и напряжения связаны между собой линейной зависимостью, изображенной на фиг. 1 прямой BC, что аналитически можно выразить так:

$$f(\theta) = a_0^2\theta + (a_1^2 - a_0^2)(\theta_1 - \theta_0) \qquad (6.1)$$

Здесь $\theta_1(r)$ — значение $\theta(r, t)$ в момент начала разгрузки, т. е. абсцисса точки B на фиг. 1.

Напряжение σ_r получим из (1.6) и (6.1). Обозначив $(a_1^2 - a_0^2)/a_0^2 = h_0$, имеем

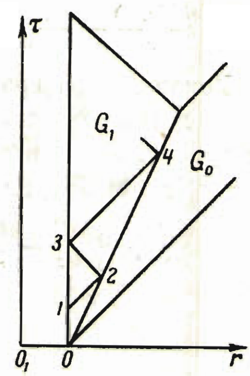
$$\sigma_r = \rho a_0^2\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{3K}{\rho a_0^2} - 1\right)\frac{u}{r} + h_0(\theta_0 - \theta_1)\right] \qquad (6.2)$$

Уравнение (1.3) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h_0\left[\frac{d\theta_1}{dr} + \frac{3(\theta_1 - \theta_0)}{r}\right]$$

Введем безразмерные функции (6.3)

$$u^* = \frac{u}{\theta_0}, \qquad \theta^* = \frac{\theta}{\theta_0}, \qquad \theta_1^* = \frac{\theta_1}{\theta_0}$$



Фиг. 8

и координаты $r = r$, $\tau = a_0 t$. Тогда уравнение (6.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} - \frac{2u^*}{r^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} + h_0\left[\frac{d\theta_1^*}{dr} + \frac{3(\theta_1^* - 1)}{r}\right] \qquad (6.4)$$

Мы будем рассматривать простейший случай разгрузки, соответствующий монотонной разгрузке после мгновенного нагружения.

Как показано было выше, при сильном мгновенном нагружении, независимо от последующего способа приложения давления, образуется область упругих деформаций G_0 (фиг. 8), ограниченная прямыми $r - 1 = \tau$ и $r - 1 = a_1\tau / a_0$. На последней прямой функция $\theta^*(r, \tau)$ со стороны области G_0 принимает значение $\theta^* = 1$.

Мы будем искать решение уравнения (6.4), для которого прямая $r - 1 = a_1\tau / a_0$ является линией сильного разрыва. Прежде всего избавимся от неоднородности в уравнении (6.4), для этого введем функцию $v(r)$ и функцию $U(r, \tau)$, определяя их равенствами

$$\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = h_0(\theta_1^* - 1), \qquad v(1) = 0; \qquad u^*(r, \tau) = U(r, \tau) + v(r) \qquad (6.5)$$

Тогда уравнение (6.4) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{2U}{r^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \tag{6.6}$$

На прямой разгрузки должны выполняться следующие условия:

1) условие непрерывности смещений

$$u^*(r,\tau)=\frac{u_0(r)}{\theta_0}$$

где $u_0(r)$ — значение смещения на прямой со стороны упругой стадии, определяемое формулой (5.9);

2) условие начала разгрузки, т. е.

$$\frac{u^*}{r}-\frac{\partial u^*}{\partial r}=\theta_1^*(r)$$

Переходя к функциям $U(r,\tau)$ и $v(r)$, получим

$$U(r,\tau)+v(r)=\frac{u_0(r)}{\theta_0} \tag{6.7}$$

$$\frac{U(r,\tau)}{r}-\frac{\partial U(r,\tau)}{\partial r}=1+\frac{a_1^2}{a_1^2-a_0^2}\left(\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right)\quad \text{на}\quad r-1=\frac{a_1}{a_0}\tau \tag{6.8}$$

Исключим из граничных условий неизвестную функцию $v(r)$. Для этого достаточно продифференцировать уравнение (6.7) вдоль прямой разгрузки, а затем из трех уравнений исключить v и dv/dr. Определив $u_0(r)$ и du_0/dr из (5.9), получим условие на линии разрыва:

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U}{\partial \tau}-\frac{U}{r}=h_0\left\{1+ar^{\mu-3}[\cos(\nu\log r)+b\sin(\nu\log r)]\right\} \tag{6.9}$$

где

$$a=\frac{\lambda}{1-2\lambda},\qquad b=\frac{2\lambda^2+\lambda-1}{2\lambda\nu(2\lambda-1)}$$

Второе условие мы получим, задавая давление на поверхности сферической полости $r=1$:

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\left(\frac{3K}{\rho a_0^2}-1\right)U=\frac{p(\tau/a_0)}{\rho a_0^2\theta_0} \tag{6.10}$$

Перейдем к построению решения задачи (6.6), (6.9), (6.10). Если удалось каким-либо методом определить решение задачи в какой-нибудь сколь угодно малой окрестности точки 0 в области G_1 (фиг. 8), то можно показать, что решение в остальной части области G_1 находится в квадратурах.

Предварительно сделаем несколько замечаний. Легко показать, что всякое решение уравнения (6.6) представимо в следующем виде:

$$U(r,\tau)=\frac{\Phi'(r+\tau-1)+\Psi'(r-\tau-1)}{r}-\frac{\Phi(r+\tau-1)+\Psi(r-\tau-1)}{r^2} \tag{6.11}$$

и обратно, для любой пары трижды дифференцируемых функций Φ и Ψ выражение (6.10) представляет собой решение уравнения (6.6).

Докажем, что функции Φ и Ψ определяются не единственным образом, а именно в начальной точке можно трем величинам из четырех Φ', Ψ', Φ, Ψ задавать произвольные значения.

В самом деле, пусть $U(r, \tau)$ решение уравнения (6.6). Проведем через точку M_0 в области решения две характеристики $r+\tau = r_0+\tau_0$ и $r-\tau = r_0-\tau_0$. Обозначим через $U_1(r)$ и $U_2(r)$ значения $U(r, \tau)$ на соответствующих характеристиках. На характеристиках должны удовлетворяться следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

на $r+\tau = r_0+\tau_0$

$$\frac{\Phi'(r_0+\tau_0-1)+\Psi'[2r-(r_0+\tau_0+1)]}{r} - \frac{\Phi(r+\tau_0-1)+\Psi[2r-(r_0+\tau_0+1)]}{r^2} = U_2(r)$$

на $r-\tau = r_0-\tau_0$

$$\frac{\Phi'[2r-(r_0-\tau_0-1)]+\Psi'(r_0-\tau_0-1)}{r} - \frac{\Phi[2r-(r_0-\tau_0-1)]+\Psi(r_0-\tau_0-1)}{r^2} = U_1(r)$$

Начальные условия должны удовлетворять, следовательно, двум уравнениям:

$$\frac{\Phi'(M_0)+\Psi'(M_0)}{r} - \frac{\Phi(M_0)+\Psi(M_0)}{r^2} = U_1(r_0)$$

$$\frac{\Phi'(M_0)+\Psi'(M_0)]}{r} - \frac{\Phi(M_0)+\Psi(M_0)}{r^2} = U_2(r_0)$$

Но $U_1(r_0) = U_2(r_0)$, следовательно, из этих четырех величин три могут быть заданы произвольно. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (6.6) в окрестности точки M_0 решение (6.1) не зависит от выбора этих начальных значений, которые принимаем равными нулю. Будем предполагать, что функция $p(t)$ настолько гладкая, насколько это потребуется для существования решения задачи. Заметим также, что правая часть уравнения (6.9) есть аналитическая функция от r в рассматриваемой области.

Перейдем к построению решения. Область G_1 характеристиками *12, 23, 34* и т. д. разделится на ряд треугольников. Достаточно построить решение задачи в треугольниках *123* и *234*, — в следующих треугольниках решение построится аналогично. Пусть $U_1(r)$ значение функции $U(r, \tau)$ на прямой *12*.

1°. Решение для треугольника *123* ищем в виде (6.11). Тогда на прямых *12* и *13* имеем соответственно

$$\frac{\Phi'[2(r-1)+\tau_1]}{r} - \frac{\Phi[2(r-1)+\tau_1]}{r^2} = U_1(r)$$

$$\Phi(\tau_1) = 0 \tag{6.12}$$

$$\Phi''(\tau)+\Psi''(-\tau)-\varkappa_1[\Phi'(\tau)+\Psi'(-\tau)]+\varkappa_1[\Phi(\tau)+\Psi(-\tau)] = p_1(\tau)$$

$$\Psi_1'(-\tau_1) = \Psi_1(-\tau_1) = 0 \tag{6.13}$$

Здесь

$$\varkappa_1 = 3\left(1-\frac{K}{\rho a_0^2}\right), \qquad p_1(\tau) = \frac{p(-\tau/a_0)}{\rho a_0^2\theta_0}$$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (6.12), (6.13) в треугольнике *123* существует, будет единственным и имеет вид

$$\Phi(x) = \left(\frac{x-\tau_1}{2}+1\right)^2 \int\limits_{\tau_1}^{x} \frac{U_1[{}^1/_2(x-\tau_1)+1]}{{}^1/_2(x-\tau_1)+1}\,dx$$

$$\Psi(x) = -\Phi(-x) - \frac{U_1(1)}{\gamma_1}\exp\frac{\varkappa_1(x+\tau_1)}{2}\sin\gamma_1(x+\tau_1) + \frac{1}{\gamma_1}\int\limits_{-\tau_1}^{x}\{[p_1(\tau)-$$

$$-\varkappa_1^2\Phi(-\tau)]\sin\gamma_1(x-\tau) - 2\varkappa_1\gamma_1\Phi(-\tau)\cos\gamma_1(x-\tau)\}\exp\frac{\varkappa_1(x-\tau)}{2}\,d\tau$$

Следовательно, решение уравнения (6.6) в треугольнике *123* согласно (6.11) имеет вид

$$U(r,\tau) = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\left[\Phi(x)-\Phi(-y)-\frac{U_1(1)}{\gamma_1}\exp\frac{\varkappa_1(y+\tau_1)}{2}\sin\gamma_1(y+\tau_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\gamma_1}\int\limits_{-\tau_1}^{y}[(p_1(\tau)-\varkappa_1^2\Phi\sin\gamma_1(y-\tau)-2\varkappa_1\gamma_1\Phi\cos\gamma_1(y-\tau)]\exp\frac{\varkappa_1(y-\tau)}{2}d\tau\right]\right\}$$

где под знаком интеграла $\Phi = \Phi(-\tau)$ и (6.14)

$$x = r+\tau-1,\qquad y = r-\tau-1,\qquad \gamma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4\varkappa_1-\varkappa_1^2}$$

В силу единственности решения уравнений (6.12), (6.13) и сказанного выше о представимости решений уравнения (6.6) в виде (6.11) решение (6.14) в треугольнике *123* единственно.

2°. Продолжим найденное решение в треугольник *234*. На прямой *23* функция U известна из (6.14); обозначим ее на этой прямой через $U_2(r)$. Тогда, полагая

$$\Psi(r_2-\tau_2-1) = \Phi(r_2+\tau_2-1) = \Phi'(r_2+\tau_2-1) = 0$$

получим для определения функции Ψ уравнение

$$\frac{\Psi'[2(r-1)-(r_2+\tau_2-1)]}{r} - \frac{\Psi[2(r-1)-(r_2+\tau_2-1)]}{r^2} = U_2(r) \qquad (6.15)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi(x) = \left[\frac{x+(r_2+\tau_2-1)}{2}+1\right]^2 \int\limits_{r_2-\tau_2-1}^{x} \frac{U_2[{}^1/_2(x+r_2+\tau_2-1)+1]}{{}^1/_2(x+r_2+\tau_2-1)+1}\,dx$$

Если теперь воспользоваться условием (6.9), то на отрезке *24* мы должны удовлетворить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r}\left[\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)\Phi''(x)+\left(1-\frac{a_1}{a_0}\right)\Psi''(y)\right]-$$

$$-\frac{1}{r^2}\left[\left(3+\frac{a_1}{a_0}\right)\Phi'(x)+\left(3-\frac{a_1}{a_0}\right)\Psi'(y)\right]+\frac{3}{r^3}[\Phi(x)+\Psi(y)] = f(r)$$

Здесь функция $f(r)$ есть правая часть уравнения (6.9) и

$$x=(r-1)\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right), \qquad y=(r-1)\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)$$

Введем две функции:

$$\Phi_1(r)=\Phi\left[(r-1)\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)\right], \qquad \Psi_1(r)=\Psi\left[(r-1)\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)\right]$$

Тогда уравнение примет вид

$$r^2\Phi_1''(r)-\left(1+3\frac{a_0}{a_1}\right)r\Phi_1'(r)+3\frac{a_0}{a_1}\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)\Phi_1(r)= \tag{6.16}$$

$$=\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)\left[\frac{a_0}{a_1}r^3f(r)+\frac{r^2}{1-a_0/a_1}\Psi_1''(r)+r\frac{3a_0/a_1-1}{1-a_0/a_1}\Psi_1'(r)-3\frac{a_0}{a_1}\Psi_1(r)\right]$$

Если правую часть обозначить через $F(r)$, то решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi_1(r)=\frac{1}{\nu}\int\limits_{r_2}^{r}\left(\frac{r}{z}\right)^{\varepsilon}\frac{1}{z}\sin\left(\nu\log\frac{r}{z}\right)F(z)\,dz$$

где

$$\nu=\frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2-4}, \qquad \varepsilon=\frac{1}{2}\left(3\frac{a_0}{a_1}+2\right)$$

После интегрирования по частям решение можно представить в виде

$$\Phi_1(r)=\frac{1+a_0/a_1}{1-a_0/a_1}\Psi_1(r)-\frac{1}{\nu}\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)r_2^2U_2(r_2)\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\varepsilon}\sin\left(\nu\log\frac{r}{r_2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\nu}\frac{a_0}{a_1}\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)\int\limits_{r_2}^{r}\left(\frac{r}{z}\right)^{\varepsilon}z^2f(z)\sin\left(\nu\log\frac{r}{z}\right)dz+ \tag{6.17}$$

$$+\frac{1}{\nu}\frac{1+a_0/a_1}{1-a_0/a_1}\int\limits_{r_2}^{r}\left(\frac{r}{z}\right)^{\varepsilon}\frac{\Psi_1(z)}{z}\left[9\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2\sin\left(\nu\log\frac{r}{z}\right)+6\frac{a_0}{a_1}\nu\cos\left(\nu\log\frac{r}{z}\right)\right]dz$$

Таким образом, решение в треугольнике *234* найдено и имеет вид

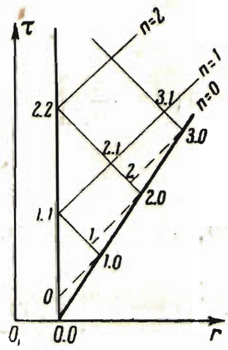
$$U(r,\tau)=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\left[\Phi_1\left(\frac{x}{1+a_0/a_1}+1\right)+\Psi(y)\right]\right\} \tag{6.18}$$

Здесь, как и выше,

$$x=r+\tau-1, \qquad y=r-\tau-1$$

В силу единственности решения уравнений (6.15) и (6.16) при указанных выше условиях решение (6.18) в треугольнике *234* также единственно.

Ниже приводится решение уравнения (6.6) в треугольнике *012* с помощью численного метода интегрирования для случая линейной зависимости давления от времени $p_1(\tau)=a\tau+b$. Выбирая достаточно малую окрестность точки 0, можно всегда ограничиться таким представлением функции $p_1(\tau)$. Находятся три решения уравнения (6.6) при следующих условиях:



Фиг. 9

1) $$\frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \frac{U_1}{r} = f(r) \quad \text{на} \quad r - 1 = \frac{a_1}{a_0}\tau$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} + \left(\frac{3K}{\rho a_0^2} - 1\right)U_1 = -1 \quad \text{на} \quad r = 1$$

2) $$\frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U_2}{\partial \tau} - \frac{U_2}{r} = 0 \quad \text{на} \quad r - 1 = \frac{a_1}{a_0}\tau$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial r} + \left(\frac{3K}{\rho a_0^2} - 1\right)U_2 = -1 \quad \text{на} \quad r = 1$$

3) $$\frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U_3}{\partial \tau} - \frac{U_3}{r} = 0 \quad \text{на} \quad r - 1 = \frac{a_1}{a_0}\tau$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial r} + \left(\frac{3K}{\rho a_0^2} - 1\right)U_3 = -\tau \quad \text{на} \quad r = 1$$

Очевидно, что для случая линейной зависимости $p_1(\tau) = a\tau + b$ решение найдется в виде

$$U = U_1 - (b+1)U_2 - aU_3$$

При вычислениях материал считался идеально пластичным, причем было принято $\sigma = 0.25$ и $a_0 / a_1 = 1.34$.

При этих данных выражение для функции $f(r)$ согласно (6.9) будет

$$f(r) = -0.445\left\{1 - \frac{0.425}{r^{3.01}}\left[0.55\sin(0.59\log r) + \cos(0.59\log r)\right]\right\}$$

Приводим значения функции $f(r)$ в интервале $1 \leqslant r \leqslant 2$:

$r =$	1	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.12	1.14
$-f(r) =$	0.256	0.266	0.275	0.284	0.292	0.299	0.306	0.312
$r =$	1.16	1.18	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70
$-f(r) =$	0.318	0.324	0.330	0.353	0.370	0.383	0.393	0.402

Для интегрирования уравнения (6.6) мы пользовались уравнениями характеристик

$$dU_\tau = dU_r + 2\left(\frac{U_r}{r} - \frac{U}{r^2}\right)d\tau, \qquad d\tau = dr$$

$$dU_\tau = -dU_r + 2\left(\frac{U_r}{r} - \frac{U}{r^2}\right)d\tau, \qquad d\tau = -dr$$

Уравнения эти заменялись уравнениями в конечных разностях, которые решались методом сеток. В табл. 1,2 и 3 приводятся значения функций U_1, U_2, U_3, вычисленные в треугольнике *023* (фиг. 8), причем $r_2 = 1.2$ и $a_0 / a_1 = 1.34$. При вычислениях принималось

$$r_{m,0} - r_{m-1,0} = 0{,}02 \qquad \tau_{m,0} - \tau_{m-1,0} = 0.02\frac{a_0}{a_1} = 0.0268$$

$$r_{m,n} - r_{m-1,n} = \tau_{m,n} - \tau_{m-1,n} = 0.01\left(1 + \frac{a_0}{a_1}\right) = 0.0234 \quad (n \neq 0)$$

Построение сеток пояснено на фиг. 9. В точках 1, 2, 3, ... значения функции и ее производных U_r и U_τ интерполировались линейно по значениям в соседних точках (1.0) и (1.1), (2.0) и (2.1) и т. д.

Заметим, что в качестве первого приближения вблизи точки $r = 1$, $\tau = 0$ для функции $U(r, \tau)$ можно пользоваться представлением

$$U(r, \tau) \approx \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 (r-1) + \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)_0 \tau + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_0 \frac{(r-1)^2}{2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \tau}\right)_0 \tau (r-1) + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}\right)_0$$

Эта формула была использована при вычислении значений функций U в точках (0.0), (1.0), (1.1). Постоянные

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \tau}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}\right)_0$$

Таблица 1

Значения функции $U_1(r, \tau)$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	0	0.006	0.012	0.018	0.024	0.030	0.035	0.040	0.044	0.048	0.052	U
0	1	0.985	0.970	0.955	0.941	0.926	0.914	0.902	0.889	0.877	0.864	$-U_r$
	1	0.976	0.901	0.927	0.902	0.878	0.857	0.836	0.815	0.796	0.778	U_τ
		0.045	0.044	0.043	0.043	0.042	0.041	—	—	—	—	U
1		1.031	1.010	0.988	0.966	0.944	0.923	—	—	—	—	$-U_r$
		0.979	0.952	0.928	0.904	0.880	0.857	—	—	—	—	U_τ
			0.090	0.087	0.085	0.082	0.079	0.076	0.073	0.070	0.068	U
2			1.060	1.036	1.012	0.989	0.975	0.951	0.928	0.905	0.882	$-U_r$
			0.956	0.931	0.907	0.882	0.858	0.837	0.816	0.796	0.777	U_τ
				0.132	0.128	0.124	0.121	0.117	0.114	0.111	0.108	U
3				1.089	1.062	1.036	1.011	0.987	0.963	0.940	0.917	$-U_r$
				0.933	0.907	0.882	0.859	0.837	0.815	0.794	0.773	U_τ
					0.175	0.170	0.165	0.161	0.157	0.152	0.148	U
4					1.116	1.086	1.048	1.021	0.696	0.973	0.952	$-U_r$
					0.905	0.880	0.856	0.833	0.810	0.788	0.765	U_τ
						0.218	0.212	0.206	0.200	0.194	0.189	U
5						1.145	1.112	1.080	1.048	1.019	0.989	$-U_r$
						0.877	0.851	0.825	0.801	0.780	0.758	U_τ
							0.256	0.249	0.242	.2360	0.230	U
6							1.170	1.162	1.153	1.145	1.087	$-U_r$
							0.849	0.824	0.800	0.775	1.745	U_τ
								0.295	0.287	0.279	0.272	U
7								1.196	1.159	1.122	1.085	$-U_r$
								0.821	0.795	0.770	0.745	U_τ
									0.333	0.324	0.315	U
8									1.221	1.180	1.140	$-U_r$
									0.792	0.765	0.740	U_τ
										0.370	0.360	U
9										1.245	1.204	$-U$
										0.762	0.735	U_τ
											0.406	U
10											1.270	$-U_r$
											0.731	U_τ

легко находятся при последовательном определении в точке 0 производных первого и второго порядка из (6.6), (6.9) (6.10).

Укажем теперь, что для того, чтобы решение давало в окрестности точки 0 разгрузку, необходимо и достаточно выполнение условия $\partial\theta^* / \partial\tau < 0$ или $U_\tau / r - U_{r\tau} < 0$, что в свою очередь после несложных преобразований с использованием (6.9), (6.10) приводит к условию:

$$\left.\frac{dp_1}{d\tau}\right|_{\tau=0} > \frac{3K}{\rho a_0^2}\,\frac{a_0}{a_1}\,[f(1) - p_1(0)] \qquad \left(f(1) = \frac{1}{\lambda - 1}\right) \tag{6.19}$$

Конечно, предполагается, что $p(0) < p_s$ или $p_1(0) < -1$. После того как функция $U(r, \tau)$ построена, можно определить границу распространения волны разгрузки — $r_{\max}$. Условие исчезновения скачка де-

Таблица 2

Значения функции $U_2(r, \tau)$

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	m / n
	0.000	0.016	0.032	0.048	0.064	0.080	0.096	0.113	0.131	0.148	0.166	U
0	1.000	0.979	0.958	0.937	0.916	0.895	0.874	0.854	0.833	0.812	0.792	$-U_r$
	1.340	1.330	1.320	1.310	1.300	1.290	1.280	1.271	1.263	1.256	1.249	U_τ
		0.063	0.071	0.079	0.087	0.095	0.104	—	—	—	—	U
1		1.042	0.989	0.951	0.921	0.898	0.876	—	—	—	—	$-U_\tau$
		1.345	1.333	1.321	1.308	1.296	1.283	—	—	—	—	U_r
			0.126	0.135	0.144	0.153	0.162	0.172	0.182	0.192	0.202	U
2			1.084	1.018	0.969	0.929	0.898	0.874	0.852	0.832	0.815	$-U_r$
			1.349	1.338	1.327	1.315	1.303	1.291	1.279	1.267	1.255	U_τ
				0.189	0.197	0.205	0.214	0.282	0.231	0.240	0.250	U
3				1.126	1.057	1.002	0.960	0.928	0.903	0.880	0.860	$-U_r$
				1.352	1.340	1.328	1.316	1.304	1.292	1.280	1.268	U_τ
					0.252	0.260	0.268	0.276	0.284	0.292	0.298	U
4					1.168	1.095	1.042	0.999	0.965	0.939	0.915	$-U_r$
					1.354	1.341	1.329	1.317	1.305	1.292	1.280	U_τ
						0.316	0.321	0.326	0.332	0.337	0.342	U
5						1.209	1.151	1.100	1.053	1.012	0.981	$-U_r$
						1.355	1.392	1.329	1.316	1.304	1.292	U_τ
							0.379	0.382	0.385	0.388	0.390	U
6							1.252	1.194	1.144	1.099	1.060	$-U_r$
							1.355	1.343	1.330	1.317	1.304	U_τ
								0.442	0.443	0.444	0.445	U
7								1.294	1.230	1.175	1.130	$-U_r$
								1.355	1.342	1.329	1.316	U_τ
									0.506	0.506	0.505	U
8									1.336	1.273	1.230	$-U_r$
									1.354	1.341	1.328	U_τ
										0.570	0.570	U
9										1.378	1.320	$-U_r$
										1.353	1.341	U_r
											0.633	U
10											1.421	$-U_r$
											1.352	U_τ

формации будет $\theta_1^*(r) = 1$, что, как это следует из (6.8) и (6.5), эквивалентно равенству

$$\frac{U}{r} - \frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_{r-1=a_1\tau/a_0} = 1$$

Решая это уравнение относительно r, мы определим искомую величину $r_{\max}$. Отсюда видно, что важно знать решение задачи на прямой $r - 1 = a_1\tau/a_0$.

Для того чтобы знать решение, реализуемое формулой (6.18), на этой прямой (например, в рассмотренном случае при $a_0/a_1 = 1.34$ на отрезке $1 \leqslant r \leqslant 2.4$) достаточно иметь приближенное решение в малом в треугольнике 023 (фиг. 8), (у нас, например, $r_2 = 1.2$)

Таблица 3

Значения функции $U_3(r,\tau)$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	U
0	0.000	0.006	0.092	0.018	0.034	0.028	0.033	0.038	0.042	0.046	0.049	$-U_r$
	0.000	0.008	0.036	0.024	0.031	0.039	0.045	0.052	0.058	0.065	0.071	U_τ
		0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	—	—	—	—	U
1		0.048	0,046	0.044	0.043	0.041	0.039	—	—	—	—	$-U_r$
		0.048	0.049	0.050	0.050	0.051	0.051	—	—	—	—	U_τ
			0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.007	U
2			0.097	0.094	0.090	0.087	0.083	0.080	0.077	0.074	0.070	$-U_r$
			0.096	0.095	0.095	0.094	0.093	0.092	0.092	0.091	0.091	U_τ
				0.010	0.010	0.010	0.011	0.011	0.011	0.012	0.012	U
3				0.148	0.144	0.139	0.135	0.031	0.127	0.123	0.119	$-U_r$
				0.143	0.141	0.140	0.139	0.137	0.136	0.134	0.133	U_τ
					0.018	0.018	0.018	0.019	0.019	0.019	0.020	U
4					0.200	0.195	0.189	0.184	0.178	0.173	0.168	$-U_r$
					0.189	0.182	0.184	0.182	0.179	0.177	0.175	U_τ
						0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	U
5						0.253	0.244	0.236	0.229	0.223	0.216	$-U_r$
						0.235	0.232	0.229	0.225	0.221	0.217	U_τ
							0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	U
6							0.298	0.293	0.288	0.283	0.277	$-U_r$
							0.280	0.276	0.272	0.268	0.265	U_τ
								0.055	0.055	0.055	0.055	U
7								0.355	0.350	0.345	0.339	$-U_r$
								0.324	0.320	0.315	0.311	U_τ
									0.072	0.071	0.071	U
8									0.414	0.412	0.409	$-U_r$
									0.367	0.361	0.355	U_τ
										0.091	0.089	U
9										0.476	0.473	$-U_r$
										0.409	0.378	U_τ
											0.110	U
10											0.543	$-U_r$
											0.447	U_τ

Величина интенсивности максимальных пластических деформаций сдвига $\theta_2^*(r)$ определяется, если известно значение $\theta_1^*(r)$ на указанной прямой. Можно показать, что

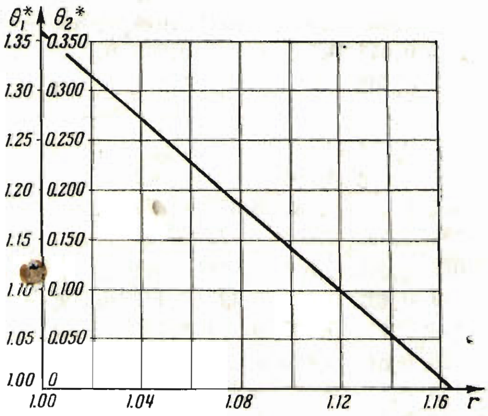
$$\theta_2^*(r) = h_2[\theta_1^*(r) - 1] \qquad \left(h_2 = \frac{G_e - G_p}{G_e}\right) \tag{6.20}$$

Остаточные напряжения $\tilde{\sigma}$ и остаточные смещения $\tilde{u}$ находятся также без труда и в пластической зоне они выражаются формулами

$$\tilde{\sigma}_r(r) = 3Kh_0\left[\frac{1}{r^3}\int_1^R \frac{\theta_1(t) - \theta_0}{t}\,dt - \int_r^R \frac{\theta_1(t) - \theta_0}{t}\,dt\right]$$

$$\tilde{u}(r) = -h_0\left[\int_r^R \frac{\theta_1(t) - \theta_0}{t}\,dt + \frac{3K}{4r^2G_e}\int_1^R \frac{\theta_1(t) - \theta_0}{t}\,dt\right] \qquad (R = r_{\max})$$

Рассмотрим численный пример. Пусть $p_1(\tau) = 1.2(-1 + 2\tau)$. Материал считаем идеально пластичным с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.25$. Тогда $a_0 / a_1 = 1.34$.



Фиг. 10

Пользуясь табл. 1,2, 3, вычисляем значения функции

$$U = U_1 + 0.2U_2 - 2.4U_3$$

и подставляем их в условие

$$\frac{U}{r} - \frac{dU}{dr} = 1$$

Полученное уравнение решаем графически. Оказывается, что $r_{\max} = 1.17$. Максимальные безразмерные пластические деформации получаются при $r = 1$ и определяются из (6.20). Оказывается

$$\theta_2^*(1) = (1.36 - 1) = 0.36$$

Графики функций $\theta_1^*(r)$ и $\theta_2^*(r)$ даны на фиг. 10. Необходимое условие пассивности деформаций (6.19) здесь выполняется. В самом деле,

$$\frac{dp_1}{d\tau} = 2.4, \qquad p_1(0) = -1.2, \qquad 2.4 > \frac{3}{1.34}(-0.256 + 1.2) = 2.12$$

Расчет при больших начальных нагрузках требует значительных вычислений с использованием не только таблиц, но и формул (6.14) и (6.18), расширяющих сколь угодно область решения.

Поступила в редакцию
12 VI 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшулер Л. В. ДАН. 1946, т. X, № 3.
2. Бахшиян Ф. А. ПММ. 1948, т. XII, № 3.
3. Рахматулин Х. А. ПММ. 1946, т. X, № 2
4. Шапиро Г. С. ПММ. 1946, т. X, № 5—6.
5. Ильюшин А. А. ПММ. 1943, т. VII, № 4.
6. Рахматулин Х. А. ПММ. 1945, т. IX, № 1.