

О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ ПРИ НАЛИЧИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ф. М. Диментберг

(Москва)

В данной заметке указывается простой способ учета сил сопротивления при определении собственных частот колебаний стержня с распределенной массой и при определении амплитуды перемещения (поворота) конца стержня при действии гармонического возбуждения. Попутно указывается на одно свойство спектра частот при внутреннем сопротивлении, а также дается геометрическая интерпретация изменения динамической жесткости стержня.

Дифференциальное уравнение колебания изгиба стержня (полагая сечение неизменным) при наличии внутреннего и внешнего сопротивлений как известно, будет (см. [1])

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + 2\xi \frac{d^2 y}{dx^2 dt} + 2\eta \frac{dy}{dt} + \rho F \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

где E, J, ρ, F имеют обычные значения, а 2ξ и 2η — коэффициенты внутреннего и внешнего сопротивлений, причем первый из них пропорционален скорости деформации изгиба, а второй — скорости поперечных перемещений отдельных точек стержня.

Полагая, что колебание совершается с комплексной частотой $\Omega = \omega + i\alpha$, где ω — собственно частота, а α — коэффициент затухания, будем иметь

$$y = u e^{i\Omega t} = u e^{i(\omega + i\alpha)t}$$

что после подстановки в (1) дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u^{IV} - \frac{\mu^2}{l^4} u = 0 \quad (2)$$

в котором u является функцией x и принято обозначение

$$\mu^2 = \frac{\rho F \Omega^2 - 2i\eta \Omega}{EJ + 2i\xi \Omega} l^4 \quad (3)$$

Уравнение (2) решается формально так же, как общеизвестное уравнение при отсутствии трения

$$u^{IV} - \frac{\mu'^2}{l^4} u = 0 \quad (2')$$

в котором

$$\mu'^2 = \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 \quad (3')$$

Уравнения (2) и (2') удовлетворяются при одних и тех же дискретных значениях μ и μ' , если условия на концах стержня одни и те же. Различие соотношений (3) и (3') приводит к различию собственных частот при наличии и отсутствии сопротивлений.

Пусть μ_k одно из собственных значений уравнения (2) (оно будет вещественно), тогда соответствующая комплексная частота найдется из уравнения (3), приводимого к квадратному уравнению

$$\Omega^2 - 2 \frac{\xi \mu_k^2 + \eta l^4}{\rho F l^4} i \Omega - \frac{E J \mu_k^2}{\rho F l^4} = 0$$

откуда

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \omega_k + i \alpha_k = \sqrt{\mu_k^2 \frac{E J}{\rho F l^4} - \left(\frac{\xi \mu_k^2 + \eta l^4}{\rho F l^4} \right)^2} + i \frac{\xi \mu_k^2 + \eta l^4}{\rho F l^4} = \\ &= \frac{\mu_k}{l^2} \left[\sqrt{\frac{E J}{\rho F} - \left(\frac{\xi \mu_k + \eta l^4 / \mu_k}{\rho F l^2} \right)^2} + i \frac{\xi \mu_k + \eta l^4 / \mu_k}{\rho F l^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что влияние внутреннего трения растет, а влияние внешнего трения падает с увеличением порядка k частоты, так как числа μ_k растут вместе с k . Если имеется внутреннее трение, то, начиная с некоторого значения коэффициента μ_k , собственные частоты становятся чисто мнимыми. Следовательно, при наличии внутреннего трения, несмотря на бесконечное число степеней свободы, реальный спектр частот ограничен. При отсутствии внутреннего трения сказанное не имеет места. Из формулы (4) видно также, что сопротивления не меняют модули частот спектра,

Пусть стержень с опертым левым и свободным правым концом находится под действием момента на левом конце

$$M = M(0) e^{i \Omega t} = M(0) e^{i(\omega + i \alpha) t}$$

и допустим, что имеется только внутреннее трение (т. е. $\eta = 0$)

Найдем „динамическую жесткость“ стержня, т. е. отношение K момента к углу поворота конца, равному $u'(0) e^{i \Omega t}$.

$$K = \frac{M(0) e^{i \Omega t}}{u'(0) e^{i \Omega t}} = \frac{M(0)}{u'(0)} = - \frac{E J u''(0)}{u'(0)}$$

Выражая прогиб известным образом

$$u(x) = A \operatorname{ch} \sqrt{\mu} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\mu} x + C \cos \sqrt{\mu} x + D \sin \sqrt{\mu} x$$

и учитывая условия на концах: $u(0) = 0$, $u''(l) = u'''(l) = 0$, найдем

$$K = - \frac{E J u''(0)}{u'(0)} = - \frac{E J \sqrt{\mu}}{l} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} - \operatorname{sh} \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu}}{1 + \operatorname{ch} \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu}} \quad (5)$$

Для значений μ вещественных и положительных K будет вещественно и форма колебаний совпадает с таковой при отсутствии сопротивлений. Это совпадение имеет место при определенных соотношениях вещественной и мнимой части частоты действующего момента.

Функции, стоящие в числителе и знаменателе (5), представим в виде рядов:

$$K = -\frac{EJ\mu}{l} \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(2k)!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mu^k}{(2k+1)!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(2k+1)!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mu^k}{(2k)!}\right)}{1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(2k)!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mu^k}{(2k)!}\right)} =$$

$$= -\frac{EJ\mu^2}{3l} \frac{1 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(4k+3)!} \mu^{2k}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(4k)!} \mu^{2k}} = -\frac{EJ\mu^2}{3l} \frac{1 - \frac{\mu^2}{210} + \frac{\mu^4}{831600} - \dots}{1 - \frac{\mu^2}{12} + \frac{\mu^4}{5040} - \dots} \quad (6)$$

Здесь, во второй строке формул, бесконечные суммы, а ниже бесконечные произведения берутся в пределах от $k = 1$ до $k = \infty$.

Так как разлагаемые функции — целые, то из рядов, стоящих в числителе и знаменателе (6), могут быть образованы бесконечные произведения; в последних заменим μ^2 его выражением из (3):

$$K = -\frac{EJ}{3} \frac{\rho F \Omega^2 l^3}{EJ + 2i\xi\Omega} \frac{\prod \left(1 - \frac{\Omega^2 l^4 \rho F / EJ}{1 + 2i\Omega\xi / EJ} C_k\right)}{\prod \left(1 - \frac{\Omega^2 l^4 \rho F / EJ}{1 + 2i\Omega\xi / EJ} *C_k\right)} =$$

$$= -\frac{\rho F l^3 \Omega^2}{3} \frac{\prod (1 + 2i\Omega\xi / EJ - \Omega^2 C_k l^4 \rho F / EJ)}{\prod (1 + 2i\Omega\xi / EJ - \Omega^2 *C_k l^4 \rho F / EJ)} \quad (7)$$

Трехчлены в числителе и знаменателе (7) имеют попарно сопряженные корни $\Omega_k, -\bar{\Omega}_k$ и $*\Omega_k, -*\bar{\Omega}_k$; величины C_k и $*C_k$ быстро убывают с возрастанием k ; кроме того, $1/3 \rho F l^3 = I$ есть момент инерции массы стержня относительно левой опоры, поэтому выражение динамической жесткости окончательно получается в следующем виде:

$$K = -I\Omega^2 \frac{\prod \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_k}\right) \left(1 + \frac{\Omega}{\Omega_k}\right)}{\prod \left(1 - \frac{\Omega}{*\Omega_k}\right) \left(1 + \frac{\Omega}{*\Omega_k}\right)} \quad (8)$$

Амплитуда колебаний стержня получается по формуле

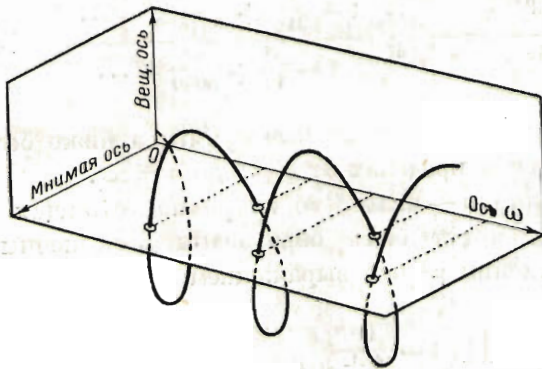
$$u'(0) = \frac{M(0)}{K} = \frac{M(0)}{-I\Omega^2} \frac{\prod \left(1 - \frac{\Omega}{*\Omega_k}\right) \left(1 + \frac{\Omega}{*\Omega_k}\right)}{\prod \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_k}\right) \left(1 + \frac{\Omega}{\Omega_k}\right)} \quad (9)$$

В формулах (8) и (9) величины Ω_k и $*\Omega_k$ суть комплексные собственные частоты стержня при левом опертом и правом свободном и соответственно при левом заземленном и правом свободном концах; $\bar{\Omega}_k$ и $*\bar{\Omega}_k$ — их сопряженные величины.

Величины Ω_k суть комплексные „резонансные“ частоты, $*\Omega_k$ — комплексные „антирезонансные“ частоты колебаний стержня. Первые представляют собой собственные частоты колебаний стержня при отсутствии момента на конце, вторые — частоты колебаний при отсутствии поворота на конце.

Пусть внутреннее сопротивление отсутствует и на конец стержня действует возбуждающий момент с вещественной частотой. Тогда $\xi = 0$, а Ω , Ω_k и $*\Omega_k$ вещественны и формула (8) получает известный вид (см. [1]):

$$K = -I\omega^2 \frac{\prod \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_k^2}\right)}{\prod \left(1 - \frac{\omega^2}{*\Omega_k^2}\right)}$$



Фиг. 1

Будем изображать динамическую жесткость K по формуле (8) вектором, параллельным комплексной плоскости Q и находящимся от нее на расстоянии, равном ω . При изменении ω (при постоянном α) конец вектора опишет пространственную кривую, имеющую характер винтовой линии (фиг. 1).

Кривая имеет ряд точек пересечения с плоскостью, проходящей через мнимую ось и ось ω ; эти точки соответствуют „резонансам“ и „антирезонансам“ в обычном понимании этих терминов (т. е. некомплексном) при заданном значении α . Соответствующие фазовые углы вектора динамической жесткости в этих точках будут равны $1/2 \pi$.

При изменении параметра α кривая будет меняться, описывая некоторую поверхность, представляющую геометрическое изображение динамической жесткости.

При изменении параметра α кривая будет меняться, описывая некоторую поверхность, представляющую геометрическое изображение динамической жесткости.

Подобная геометрическая интерпретация для крутильных систем дана в нашей статье [3].

Поступила в редакцию

20 VIII 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. Coupled Oscillations of Aircraft Engine—Propeller Systems. Journ. of Aeron. Sciences. 1940. N 9.
2. Muto K. Biegungsschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und äusseren und inneren Dämpfung. ZAMM. 1930. N. 4.
3. Диментберг Ф. М. Метод „динамической жесткости“ в применении к определению частот колебаний систем с сопротивлением. Изв. ОН АН СССР. 1948. № 10.