

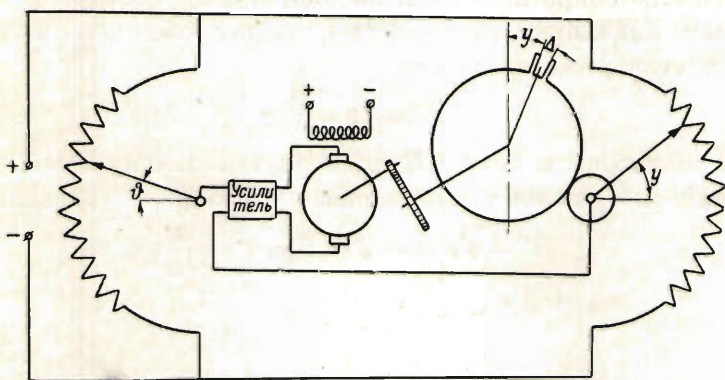
ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ СЛЕДЯЩЕГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА

В. М. Старжинский

(Москва)

Мы ставим целью учесть инерцию сервомотора и объекта, противоэлектродвижущую силу и самоиндукцию в цепи якоря сервомотора, а также трение сервомотора, и объекта и люфт в зубчатой передаче от сервомотора к объекту.

§ 1. Постановка задачи. Схема следящего электропривода изображена на фиг. 1. Объект (ось отработки) приводится во вращение сервомотором через редуктор. В реальной зубчатой передаче люфт имеется между каждой парой сцепляющихся зубчатых колес. С целью упрощения задачи в настоящей схеме введен суммарный люфт между по-



Фиг. 1

водком ведущего звена и упорами объекта; угол Δ между этими упорами равен полному угловому мертвому ходу редуктора. Для определенности примем, что в качестве сервомотора применен электрический мотор постоянного тока с независимым возбуждением. Ток в якоря сервомотора регулируется усилителем, с выхода которого снимается напряжение V , зависящее от угла $\vartheta - y$ рассогласования роторов задающего сельсина и сельсина, связанного с объектом (на схеме оба сельсина заменены потенциометрами), т. е.

$$V = V(\vartheta - y)$$

где y — угол поворота объекта, ϑ — угол поворота задающей оси, отнесенный к углу поворота объекта.

Уравнения движения системы, если пренебречь запаздыванием сигнала и принять для трения закон Кулона, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d^2 x}{dt^2} &= -M_1 \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + k_1 \Phi i - M \\ J_2 \frac{d^2 y}{dt^2} &= -M_2 \operatorname{sign} \frac{dy}{dt} + M \\ l \frac{di}{dt} + Ri + c_1 \frac{dx}{dt} &= V(\vartheta - y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x — угол поворота ведущего звена, отсчитываемый от одного начала с углом поворота объекта, J_1 — приведенный момент инерции якоря сервомотора и вращающихся частей редуктора относительно оси ведущего звена, J_2 — момент инерции объекта относительно его оси, M_1 — приведенный момент сил трения якоря сервомотора и вращающихся частей редуктора относительно оси ведущего звена, M_2 — момент сил трения объекта относительно его оси, i — ток в цепи якоря сервомотора, l — коэффициент самоиндукции цепи якоря, $c_1 dx/dt$ — противоэлектродвижущая сила, развиваемая якорем при его вращении, $k_1 \Phi i$ — момент пндермоторных сил, приведенный к оси ведущего звена, M — момент сил давления поводка ведущего звена на упор объекта, R — омическое сопротивление цепи якоря.

Примем линейную зависимость подводимого в цепь якоря напряжения от угла рассогласования

$$V = (\vartheta - y)v$$

и, вводя вместо силы тока i безразмерную величину $I = iR/v$, а также безразмерное время $\tau = pt$, запишем исходные уравнения в виде

$$\begin{aligned} x'' - JI &= -Jm_1 \operatorname{sign} x' - \frac{M}{J_1 p^2} \\ y'' &= -J^* m_2 \operatorname{sign} y' + \frac{M}{J_2 p^2} \\ 2\sigma x' + 2\lambda I' + I &= \vartheta - y \end{aligned} \quad (1.2)$$

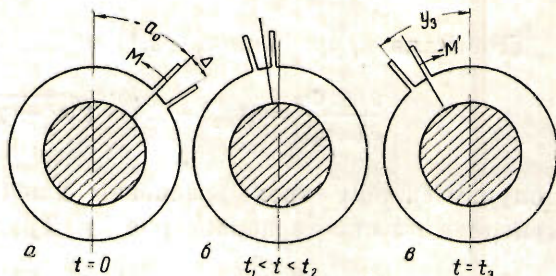
где

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{M_1}{k}, & m_2 &= \frac{M_2}{k}, & p^2 &= \frac{k}{J_1 + J_2}, & k &= \frac{k_1 \Phi v}{R} \\ J &= \frac{J_1 + J_2}{J_1}, & J^* &= \frac{J_1 + J_2}{J_2}, & 2\sigma &= \frac{c_1 p}{v}, & 2\lambda &= \frac{lp}{R} \end{aligned}$$

и штрих обозначает производную по τ . Пусть в дальнейшем τ_i означает безразмерную продолжительность i -го интервала движения, y_i и y_i' — угол поворота и безразмерная угловая скорость объекта в конце i -го интервала движения. Для случая собственных колебаний $\vartheta = \text{const}$ и, не нарушая общности, в уравнении (1.2) можно положить $\vartheta = 0$. В последующем изложении вместо ведущего звена мы будем говорить — якорь сервомотора или просто сервомотор, подразумевая под всеми величинами, относящимися к нему, соответствующие величины, вычисленные для ведущего звена.

Началом цикла будем считать момент времени, когда поводок сервомотора прижат к левому упору объекта (фиг. 2а) и объект занимает крайнее правое положение: $x = y = -a_0$. В течение 1-го интервала движения сервомотор и объект двигаются налево вместе и поводок сервомотора прижат к левому упору объекта. Первый интервал движения окончится тогда, когда момент сил давления M обратится в нуль. В течение следующего 2-го интервала движения сервомотор и объект будут двигаться

налево в расцепленном состоянии; объект будет «обгонять» сервомотор — система проходит люфт (фиг. 2б). В момент окончания 2-го интервала движения поводок сервомотора ударяет о правый упор объекта. Предполагаем, что удар неупругий,



Фиг. 2

т. е. объект и сервомотор обладают после удара одинаковой безразмерной угловой скоростью ω_2 и в течение 3-го интервала движения объект и сервомотор двигаются налево вместе, причем поводок сервомотора прижат к правому упору объекта. Третий интервал движения закончится в момент совместной остановки сервомотора и объекта, который мы назовем концом полуцикла (фиг. 2в). Если при этом момент активных сил больше момента сил трения, то в течение 2-го полуцикла система будет двигаться вправо, причем можно наметить три аналогичных интервала движения.

§ 2. Собственные колебания без учета противоэлектродвижущей силы и самоиндукции в цепи якоря. Если мы сначала пренебрежем противоэлектродвижущей силой и самоиндукцией, т. е. в системе уравнений (1.2) положим $\sigma = \lambda = 0$, то в результате интегрирования по интервалам получим

$$y_1 = (\chi - 1)m, \quad y_1' = \sqrt{z^2 - \chi^2} m$$

где

$$z = \frac{a_0 - m}{m} > \chi, \quad \chi = \frac{J^* m_2}{m}, \quad m = m_1 + m_2$$

$$y_2 = y_1 + y_1' \tau_2 - J^* m_2 \frac{\tau_2^2}{2}, \quad \omega_2 = y_1' - J^* m_2 \tau_2 - y_1' \frac{\tau_2^2}{2} + J^* m_2 \frac{\tau_2^3}{6}$$

причем τ_2 определяется из уравнения

$$F(z, \tau_2; \delta, \chi) \equiv \chi \tau_2^4 - 4 \sqrt{z^2 - \chi^2} \tau_2^3 + 24\delta = 0 \quad \left(\delta = \frac{\Delta}{Jm} \right) \quad (2.1)$$

Угол поворота объекта в конце полуцикла

$$y_3 = \sqrt{(y_2 + m)^2 + \omega_2^2} - m$$

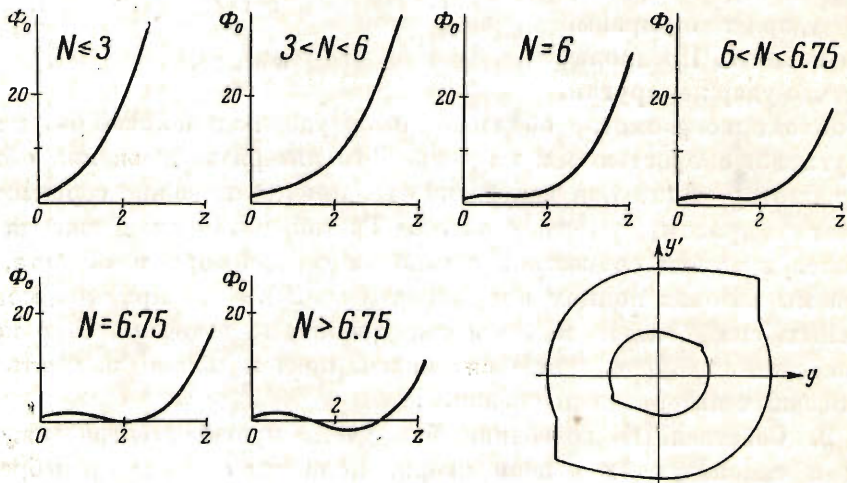
Можно показать, что необходимым и достаточным условием периодичности движения является условие периодичности по полуциклу, т. е. $y_3 = a_0$, что приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \Phi(z, \tau_2; \chi) \equiv z^2 \frac{\tau_2^4}{4} - 4(z+1) + \chi \sqrt{z^2 - \chi^2} \frac{\tau_2^3}{3} - \\ - \chi^2 \frac{\tau_2^4}{3} - \chi \sqrt{z^2 - \chi^2} \frac{\tau_2^5}{6} + \chi^2 \frac{\tau_2^6}{36} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Добавляя к уравнениям (2.1) и (2.2) условие бифуркации

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(z, \tau_2)} = (z\tau_2^4 - 24) \left(\sqrt{z^2 - \chi^2} - \frac{1}{3} \chi \tau_2 \right) = 0 \quad (2.3)$$

получим систему трех уравнений для определения бифуркационной кривой в плоскости параметров $\delta\chi$. Трудность разрешения этих урав-



Фиг. 3

нений в их точном виде привела нас к их приближенному решению при допущении, что величины

$$\frac{\chi}{z} = \frac{J^* m_2}{a_0 - m}$$

и τ_2 столь малы, что можно пренебречь квадратом первой из них и их произведением относительно единицы. Тогда из уравнения (2.1) получим

$$\tau_2 = \sqrt[3]{\frac{6\delta}{z}}$$

а уравнения (2.2) и (2.3) примут вид

$$\Phi_0(z; \delta) \equiv (z+1)^3 - Nz^2 = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 3(z+1)^2 - 2Nz = 0 \quad \left(N = \left[\frac{3}{4} \delta \right]^4 \right) \quad (2.5)$$

Вид функции Φ_0 при различных N изображен на фиг. 3. Значениям (z, δ) , при которых $\Phi_0(z; \delta) > 0$, соответствует затухание, а при $\Phi_0(z; \delta) < 0$ — раскачивание. Из уравнений (2.4) и (2.5) определится бифуркационное значение

$$\delta = \delta_0 = \sqrt[4]{\frac{64}{3}} \quad (N = 6.75)$$

при этом приведенная амплитуда неустойчивого периодического движения $z = z_0 = 2$. При $\delta > \delta_0$ уравнение $\Phi_0(z; \delta) = 0$ имеет два положительных корня и из вида функции Φ_0 заключаем, что меньшему корню z_1 соответствует неустойчивое периодическое движение, а большему корню z_2 — устойчивое периодическое движение, т. е. автоколебания. Так как $\Phi_0(2; \delta) = 27 - 4N$, то $\Phi_0(2; \delta) < 0$ при $\delta > \delta_0$. Отсюда следует, что $z_2 > 2$ и амплитуда автоколебаний $a_0^* > 3m$. На фиг. 3 приведены оба предельных цикла в фазовой плоскости yy' при $\delta > \delta_0$, вся картина фазовых траекторий для этого случая соответствует жесткому возникновению колебаний. При $\delta < \delta_0$ движение системы будет затухающим при любом начальном отклонении. Отсюда получаем условие отсутствия автоколебаний

$$\Delta < 2.149 \frac{J_1 + J_2}{J_1} \frac{M_1 + M_2}{k} \quad (2.6)$$

Найденное бифуркационное значение параметра δ используется нами для определения первого приближения бифуркационной кривой для общего случая собственных колебаний, когда учитываются параметры σ и λ , связанные с характеристикой цепи якоря.

§ 3. Общий случай собственных колебаний. Интегрирование уравнений (1.2) по указанным в § 2 интервалам движения проводится при допущении, что параметры $\varepsilon = \sigma - \lambda$ и χ/z таковы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с единицей. Практически величина σ порядка 0.1, а $\lambda < \sigma$, что касается величины χ/z , то для амплитуды автоколебаний § 2 она заведомо меньше величины

$$\frac{J_1 + J_2}{J_2} \frac{M_2}{2(M_1 + M_2)}$$

Для координат системы в конце 1-го интервала движения

$$y_1 = J^* m_2 - m - 2\varepsilon \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon\right) (a_0 - m)$$

$$y_1' = \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon\right) (a_0 - m), \quad I_2 = -J^* m_2 + m$$

. Сразу после удара (т. е. перед началом 3-го интервала движения)

$$y_2 = y_1 + y_1' \tau_2 - J^* m_2 \frac{\tau_2^2}{2} \quad \left(\tau_2 = \sqrt[3]{\frac{6\delta}{(1 - 1/2 \pi \varepsilon) z}}\right)$$

$$\omega_2 = y_1' - J^* m_2 \tau_2 - y_1' \frac{\tau_2^3}{2}, \quad I_2 = -J^* m_2 + m - y_1' \tau_2$$

При этом для «правильности» движения системы в расцепленном состоянии нужно потребовать, чтобы $y' > x' > 0$ в течение 2-го интер-

вала движения, что приводит к ограничению для величины люфта

$$\frac{\Delta}{a_0 - m} < \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{J}} \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon\right) - \frac{1}{J} \frac{\gamma}{z} \quad (3.1)$$

Мы будем считать величину люфта Δ столь малой относительно модуля начального отклонения a_0 , что условие (3.1) выполнено. В момент окончания полувала движения координаты системы принимают значения

$$y_3 = \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon\right) (a_0 - m) \sqrt{1 - 2\varepsilon\tau_2 - \varepsilon\tau_2^3 + \frac{\tau_2^4}{4}} e^{-\kappa z} - m, \quad y_3' = 0$$

$$I_3 = -y_3$$

где

$$\kappa = \operatorname{arctg} \left[\frac{\chi(1 - 1/2 \tau_2^2) + (1 - 1/2 \pi \varepsilon) z (\tau_2 - 2\varepsilon)}{(1 - 1/2 \pi \varepsilon) z (1 - 1/2 \tau_2^2) - \chi \tau_2} + \varepsilon \right] \quad \left(0 < \kappa < \frac{\pi}{2}\right)$$

Условие периодичности по полувалу $y_3 = a_0$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \Phi[z, \kappa(z; \delta, \varepsilon); \delta, \varepsilon] &\equiv (\pi + 2\kappa)^2 \varepsilon^3 z^6 + 12 \left\{ (\pi + 2\kappa)^2 (1 + 2\kappa\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon\right) \left[\frac{3}{2} (\pi + 2\kappa)^2 + 4(1 - 2\pi\varepsilon) \right] \varepsilon \delta \right\} \varepsilon^2 z^5 + \\ &\quad + 12 \left[4(\pi + 2\kappa) \left(1 + \frac{9}{2} \kappa\varepsilon + \frac{\pi}{4} \varepsilon\right) + 12(\pi + 2\kappa) \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon + 2\kappa\varepsilon\right) \varepsilon \delta - \right. \\ &\quad \left. - 9(1 - 3\pi\varepsilon - 2\kappa\varepsilon) \varepsilon \delta^2 \right] \varepsilon z^4 + 32 \left[2 \left(1 + \frac{3\pi}{2} \varepsilon + 9\kappa\varepsilon\right) + 9(1 + 5\kappa\varepsilon) \varepsilon \delta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{27}{2} (1 - \pi\varepsilon + 2\kappa\varepsilon) \varepsilon^2 \delta^2 + \frac{81}{2} \left(1 - \frac{3\pi}{2} \varepsilon\right) \varepsilon \delta^3 \right] z^3 + \\ &\quad + 48 \left[4 \left(1 + \frac{\pi}{4} \varepsilon + \frac{13}{2} \kappa\varepsilon\right) + 12 \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon + 4\kappa\varepsilon\right) \varepsilon \delta + \right. \\ &\quad \left. + 9(1 - \pi\varepsilon + 2\kappa\varepsilon) \varepsilon^2 \delta^2 - \frac{81}{192} (1 - \pi\varepsilon) \delta^4 \right] z^2 + \\ &\quad + 192(1 + 6\kappa\varepsilon) \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2} \varepsilon - 2\kappa\varepsilon\right) \varepsilon \delta \right] z + 64(1 + 6\kappa\varepsilon) = 0 \quad (3.2) \end{aligned}$$

Для определения бифуркационной кривой надо исключить z из уравнений (3.2) и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ (3.2) обращается в

$$(z + 1)^3 - \left(\frac{3}{4} \delta\right)^4 z^2 = 0$$

т. е. функция Φ переходит в Φ_0 , см. (2.4), а уравнение (3.3) в (2.5). Решение уравнений (3.2) и (3.3) при $\varepsilon = 0$ известно из § 2:

$$z = z_0 = 2, \quad \delta = \delta_0 = \sqrt[4]{\frac{64}{3}}$$

Следовательно, уравнения (3.2) и (3.3) имеют решение при $\varepsilon \neq 0$:

$$z = z(\varepsilon), \quad \delta = \delta(\varepsilon) = \delta_0 + \left(\frac{d\delta}{d\varepsilon}\right)_0 \varepsilon + \dots$$

если якобиан (индекс нуль означает, что положено $\varepsilon = 0$, $z = z_0$ и $\delta = \delta_0$)

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \delta}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \delta}\right)_0 \end{vmatrix} \neq 0$$

где

$$\Psi(z; \delta, \varepsilon) \equiv \Phi[z, \kappa(z; \delta, \varepsilon); \delta, \varepsilon]$$

Это условие выполнено, поскольку

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\right)_{\substack{z=z_0 \\ \delta=\delta_0}} = 0, & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \delta}\right)_0 &\neq 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \kappa \partial z}\right)_0 \left(\frac{\partial \kappa}{\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2}\right)_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Убедившись в возможности разрешения, подставим $z = z(\varepsilon)$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ в уравнение (3.2) и полученное тождество

$$\Phi\{z(\varepsilon), \kappa[z(\varepsilon); \delta(\varepsilon), \varepsilon]; \delta(\varepsilon), \varepsilon\} \equiv 0$$

продифференцируем по ε , положив затем $\varepsilon = 0$, $z = z_0$, $\delta = \delta_0$.

Однако в этом выражении отличны от нуля лишь два последних слагаемых, что определяет

$$\left(\frac{d\delta}{d\varepsilon}\right)_0 = - \frac{(\partial \Phi / \partial \varepsilon)_0}{(\partial \Phi / \partial \delta)_0}$$

Вычисление дает

$$\left(\frac{d\delta}{d\varepsilon}\right)_0 = \frac{72\pi + 288\kappa + (108 + 13.5\delta_0^2)\delta_0}{6.75\delta_0^3} = 8.84 + 4.30\kappa$$

Следовательно, в первом приближении уравнение бифуркационной кривой

$$\delta = 2.149 + (8.84 + 4.30\kappa)\varepsilon$$

и, полагая $\kappa = \kappa_{\min} = 0$, получаем условие отсутствия автоколебаний для рассматриваемого общего (в нашей постановке задачи) случая собственных колебаний

$$\Delta < \frac{J_1 + J_2}{J_1} [2.149 + 8.84(\sigma - \lambda)] \frac{M_1 + M_2}{k} \quad (3.4)$$

Неравенство (3.4) дает хотя и приближенную, но заведомо заниженную границу для величины люфта, при которой невозможно возникновение автоколебаний следящего электропривода.

§ 4. Случай равномерного вращения задающей оси. Рассмотрим вынужденные движения следящего электропривода при равномерном вращении задающей оси с угловой скоростью Ω (для определенности положим $\Omega > 0$): $\vartheta = \Omega t$. Введем относительные углы поворота ведущего звена и объекта $\xi = x - \Omega t$, $\eta = y - \Omega t$ и при линейном сигнале

$V = (\vartheta - y) v$ и без учета самоиндукции в цепи якоря ($l = 0$) запишем систему уравнений (1.1) в виде

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{2\sigma k}{p} \frac{d\xi}{dt} + k\eta &= -km_1 \operatorname{sign} \left(\Omega + \frac{d\xi}{dt} \right) - \frac{2\sigma k \Omega}{p} - M \\ J_2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -km_2 \operatorname{sign} \left(\Omega + \frac{d\eta}{dt} \right) + M \end{aligned} \quad (4.1)$$

Положим, что в начале цикла движения

$$\xi = \eta = -\alpha_0, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Можно показать, что при

$$\alpha_0 < J^* m_2 + \mu \quad \left(\mu = m + \frac{2\sigma \Omega}{p} \right)$$

относительное движение системы будет затухающим. Поэтому мы будем рассматривать такие начальные отклонения, для которых

$$\nu = \frac{J^* m_2}{\alpha_0 - \mu} < 1$$

Интегрирование уравнений (4.1) будем проводить по интервалам движения, определяемым взаимным расположением сервомотора и объекта. В этом случае в силу несимметрии движения приходится рассматривать все шесть интервалов движения, намеченных в § 2. Как и в § 3, сделаем допущение о малости параметров σ и ν в том смысле, что их квадратами и произведением можно пренебречь по сравнению с единицей. Кроме того, допустим, что скорость равномерного вращения задающей ось достаточно велика, именно,

$$\Omega + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_{\min} > 0$$

Для обозначения результатов интегрирования введем

$$f(w) = (1 - 1/2 \pi \sigma) w \sqrt{1 - 2\sigma \tau(w) - \sigma [\tau(w)]^3 + 1/4 [\tau(w)]^4} e^{-\kappa(w) \sigma}$$

где

$$\kappa(w) = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left[\frac{J^* m_2 \{1 - 1/2 [\tau(w)]^2\} + (1 - 1/2 \pi \sigma) w [\tau(w) - 2\sigma]}{(1 - 1/2 \pi \sigma) w \{1 - 1/2 [\tau(w)]^2\} - J^* m_2 \tau(w)} + \sigma \right]$$

$$\tau(w) = \sqrt[3]{\frac{6\Delta}{J(1 - 1/2 \pi \sigma) |w|}}$$

Тогда относительные углы поворота объекта в конце полуцикла и в конце цикла запишутся

$$\eta_3 = f(\alpha_0 - \mu) - \mu, \quad \eta_6 = f(-\eta_3 - \mu) - \mu$$

При $\sigma = 0$ функция $f(w)$ обращается в

$$f_0(w) = w \sqrt{1 + \frac{3\Delta}{2J|w|} \sqrt[3]{\frac{6\Delta}{J|w|}}}$$

и, как легко видеть:

$$f_0(-w) = -f_0(w), \quad |f_0(w)| > |w|$$

Итак, при условии пренебрежения затуханием имеем

$$\eta_3 = f_0(\alpha_0 - m) - m, \quad \eta_6 = -f_0(\eta_3 + m) - m = -f_0[f_0(\alpha_0 - m)] - m$$

Отсюда следует, что при $\nu < 1$, т. е. при $\alpha_0 > J^*m_2 + m$ будет:

$$|\eta_6| > \alpha_0$$

т. е. движение следящего электропривода при равномерном вращении задающей оси, рассматриваемое без учета противоэлектродвижущей силы или вообще вязкого трения, будет раскачивающимся, какова бы ни была величина люфта, если только скорость равномерного вращения задающей оси достаточно велика. Это существенное отличие от соответствующего случая собственных колебаний объясняется тем, что здесь момент трения сохраняет постоянное направление, именно, противоположное направлению задаваемого движения. Отсутствие автоколебаний для простейшего случая затрудняет нахождение их в общем случае, поскольку отсутствуют «порождающие» амплитуды.

Вернемся к рассматриваемому случаю $\sigma > 0$. В силу отсутствия симметрии в движении условие периодичности по полуциклу, имевшее место для случая собственных колебаний $\eta_3 = \alpha_0$, не удовлетворяет имеющему место теперь полному условию периодичности (по циклу)

$$f[-f(\alpha_0 - \mu)] = -(\alpha_0 - \mu)$$

Поскольку развертывание точного условия периодичности весьма громоздко, то рассмотрим приближенное условие $\eta_3 = \alpha_0 - 2\mu$. В развернутом виде оно приводит к уравнению

$$\begin{aligned} F(\zeta - \sigma\omega; \delta, \sigma) \equiv & (\pi + 2\kappa)^3 \sigma^3 (\zeta - \sigma\omega)^4 + \\ & + 18 \left(1 + \frac{\pi}{2} \sigma\right) \delta \sigma^3 \left[(\pi + 2\kappa)^2 + \frac{8}{3} \right] (\zeta - \sigma\omega)^3 - 108 (1 - 2\kappa\sigma) \delta^2 \sigma^2 (\zeta - \sigma\omega)^2 + \\ & + 81 \left(1 + \frac{3\pi}{2} \sigma\right) \delta^3 \sigma (\zeta - \sigma\omega) - \frac{81}{4} (1 + 2\pi\sigma) \delta^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\zeta = \frac{\alpha_0 - m}{m}, \quad \omega = \frac{2\Omega}{pm}, \quad \zeta - \sigma\omega = \frac{\alpha_0 - \mu}{m} > \frac{J^*m_2}{m} \quad \left(0 < \kappa < \frac{\pi}{2}\right)$$

В силу образования функции F значениям аргументов, для которых $F > 0$, соответствует затухание движения, а при $F < 0$ — раскачивание. Так как $F(0, \delta, \sigma) < 0$, то написанное уравнение имеет положительный корень и, если мы найдем условия, при которых этот корень единственный и удовлетворяет сделанному допущению о малости ν , то в силу сказанного о знаке F он будет соответствовать автоколебаниям. Положим

$$\zeta - \sigma\omega = \left(1 + \frac{\pi}{2} \sigma\right) \frac{\delta}{\sigma} S$$

и, подставляя в (4.2), получим уравнение для определения S :

$$\begin{aligned} \Phi(S; \sigma, \kappa) \equiv & \frac{(\pi + 2\kappa)^3}{\sigma} S^4 + 18 \left[(\pi + 2\kappa)^2 + \frac{8}{3} \right] S^3 - \\ & - 108 [1 - (\pi + 2\kappa) \sigma] S^2 + 81 S - \frac{81}{4} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Нас будут интересовать значения S , большие чем

$$JJ^* \left(1 - \frac{\pi}{2} \sigma\right) \frac{\sigma m_2}{\Delta}$$

так как

$$\zeta - \sigma\omega > \frac{J^* m_2}{m}$$

Нетрудно показать, что $\partial\Phi/\partial S > 0$ при $S > 0$. Следовательно, уравнение (4.3) имеет единственный положительный корень. Значения этого корня в зависимости от σ и χ приведены в таблице.

Таблица значений S (σ ; χ)

$\chi \backslash \sigma$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
0	0.2269	0.2446	0.2495	0.2504	0.2490	0.2468	0.2442	0.2412	0.2383	0.2352
0.1	0.2195	0.2375	0.2423	0.2436	0.2424	0.2406	0.2382	0.2351	0.2325	0.2297
0.2	0.2130	0.2290	0.2356	0.2371	0.2363	0.2345	0.2323	0.2299	0.2262	0.2233
0.4	0.2022	0.2162	0.2244	0.2259	0.2236	0.2224	0.2206	0.2185	0.2161	0.2138
0.6	0.1941	0.2064	0.2116	0.2141	0.2138	0.2130	0.2115	0.2097	0.2078	0.2057
0.8	0.1880	0.1986	0.2034	0.2054	0.2057	0.2051	0.2041	0.2024	0.2006	0.1989
1.0	0.1834	0.1922	0.1968	0.1985	0.1989	0.1985	0.1975	0.1961	0.1934	
1.2	0.1800	0.1872	0.1912	0.1928	0.1932	0.1930	0.1921	0.1910		
1.4	0.1772	0.1833	0.1865	0.1880	0.1884	0.1882	0.1874			

Однако из этого отнюдь не следует, что при любых значениях параметров δ и σ существуют автоколебания. Из условия

$$S > JJ^* \left(1 - \frac{\pi}{2} \sigma\right) \frac{\sigma m_2}{\Delta}$$

следует, что для наступления автоколебаний прежде всего должно выполняться неравенство

$$\Delta > JJ^* \left(1 - \frac{\pi}{2} \sigma\right) \frac{\sigma m_2}{S} > 4JJ^* \left(1 - \frac{\pi}{2} \sigma\right) \sigma m_2 \quad (4.4)$$

С другой стороны, степень точности сделанного приближения зависит от малости величины ν , так как σ практически порядка 0.1. Однако

$$\nu = \frac{J^* m_2}{\alpha_0 - \mu} = JJ^* \left(1 - \frac{\pi}{2} \sigma\right) \frac{\sigma m_2}{S \Delta}$$

поэтому для того, чтобы ν было, например, меньше $1/N$, параметры Δ и σ должны быть связаны неравенством

$$\Delta > 4JJ^* \left(1 - \frac{\pi}{2} \sigma\right) N m_2 \sigma$$

Поступила в редакцию

20 X 1948