

МЕТОД ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОСЦИЛЛЯТОРА С «КОМБИНИРОВАННЫМ» ТРЕНИЕМ

Н. А. Железцов
 (Горький)

Рассмотрим систему с одной степенью свободы (координата системы x), состоящую из массы m , на которую действуют упругая сила kx , сила трения F — комбинация кулоновского и вязкого трения и внешняя периодическая сила $G(t)$ (фиг. 1). При этом мы не будем ограничиваться обычным случаем вязкого трения, пропорционального скорости осциллятора v , а будем предполагать, что сила вязкого трения является некоторой нелинейной функцией v , абсолютная величина которой растет с увеличением $|v|$.

Уравнение движения этой системы, очевидно, запишется в следующем виде:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F + G(t) \quad (0.1)$$

где F — полная сила трения есть монотонно убывающей функцией скорости v , т. е.

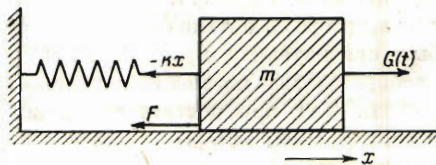
$$F_{v=v_1} < F_{v=v_2}, \quad \text{если } v_1 > v_2 \quad (0.2)$$

Такая система в дальнейшем будет называться, ради краткости, осциллятором с комбинированным трением.

Нас будут интересовать вынужденные колебания, т. е. те периодические движения, которые устанавливаются в таком осцилляторе под действием внешней периодической силы при $t \rightarrow +\infty$, и их свойства (главным образом устойчивость «в большом»).

Рассмотрение вынужденных колебаний в таком осцилляторе (при учете не только сил вязкого, но и сил кулоновского трения) представляет значительный интерес для теории различных механических вибрографов, регуляторов и т. п.

Впервые задачу о вынужденных колебаниях осциллятора с кулоновским трением решал Экольт¹. Он рассматривал вынужденные колебания одного частного типа именно движения с одной длительной остановкой¹ за полупериод внешней силы), которые вызываются синусоидальной внешней силой при наличии одного кулоновского трения (силы вязкого трения не учитывались). Более полное решение для случая синусоидальной внешней силы и при учете не только кулоновского, но

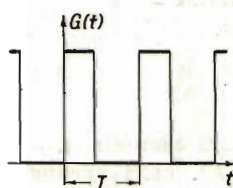


Фиг. 1

¹ Условимся в следующей терминологии: «длительными остановками» будем называть остановки осциллятора (скорость $v = 0$), продолжающиеся конечный интервал времени, в отличие от «мгновенных остановок», при которых скорость движения обращается в нуль только на один момент времени; наконец, будем называть «состояниями покоя» осциллятора остановки, начинающиеся в некоторый момент времени и продолжающиеся бесконечно долго.

и вязкого трения дал Ден-Хартог^[2]. В работе Ден-Хартога рассмотрены два главных и наиболее простых типа вынужденных колебаний: периодические движения без длительных остановок (но с одной мгновенной — за каждый полупериод внешней силы) и движения с одной длительной остановкой за полупериод (но без мгновенных остановок). Для этих типов движений построены резонансные кривые, дающие зависимость размаха вынужденных колебаний от частоты внешней синусоидальной силы (при заданных параметрах трения и амплитуде внешней силы)¹.

Далее, в 1935 г. Майснер^[4] поставил задачу о вынужденных колебаниях осциллятора, на который действуют силы кулоновского трения и внешняя периодическая ступенчатая сила (фиг. 2). Пользуясь специальным графическим методом, Майснер решил вопрос об ограниченности размаха вынужденных колебаний при



Фиг. 2

основном резонансе, т. е. при совпадении частоты первой гармоники внешней силы с частотой собственных колебаний осциллятора. Впоследствии Циглер^[5] решил тот же вопрос об ограниченности размаха колебаний при резонансе для любой внешней силы, ограниченной и разлагаемой в ряд Фурье. Однако в этих работах^[4,5] не был дан расчет величин амплитуд вынужденных колебаний. Далее, метод графического интегрирования, примененный Майснером и Циглером, не позволяет перейти к задаче о вынужденных колебаниях осцилля-

тора с комбинированным трением.

Наконец, всем работам, указанным выше^[1-5], свойствен один общий недостаток: все эти работы не решали вопроса об устойчивости и единственности найденных в них периодических движений осциллятора.

Между тем решение этого вопроса, не лишено теоретического и практического интереса, а также вопроса о существовании периодических движений может быть сравнительно просто дано путем сведения задачи к некоторому точечному преобразованию плоскости в плоскость². Этому посвящен первый раздел настоящей работы. Там при достаточно общих предположениях о характере внешней силы и силы трения, которым удовлетворяют обычные идеализации этих сил, доказывается, что:

1) если полный размах внешней силы $G_{\max} - G_{\min}$ меньше интервала изменения силы трения покоя $F_{v=-0} - F_{v=+0}$, то существуют состояния покоя и каждое движение осциллятора заканчивается одним из состояний покоя;

2) если $G_{\max} - G_{\min} > F_{v=-0} - F_{v=+0}$, то существует единственное периодическое движение (с периодом, равным периоду внешней силы), к которому стремятся при $t \rightarrow +\infty$ все остальные движения осциллятора.

Далее, для «симметричного» осциллятора (т. е. при силе трения, являющейся нечетной функцией скорости, и симметричной внешней силе³) показано, что периодическое движение, существующее при амплитуде внешней силы G_0 , большей максимальной силы трения покоя F_0 , единственное и устойчивое «в большом», обязательно является симметричным (его период, конечно, совпадает с периодом внешней силы).

¹ Рассмотренные Ден-Хартогом два типа вынужденных колебаний, конечно, не исчерпывают всех типов периодических движений осциллятора. Остальные типы периодических движений не рассматривались Ден-Хартогом из-за большой сложности вычислений. Эту же задачу в несколько другом аспекте решал позже Дубровский^[3].

² Заметим, что Левинсон^[6] рассмотрел задачу о существовании, единственности и устойчивости периодических движений осциллятора при условии, что на осциллятор не действуют силы кулоновского трения.

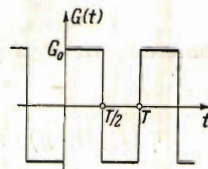
³ Мы будем называть периодическую функцию $\psi(t)$ симметричной, если $\psi(t \pm 1/2 T) \equiv -\psi(t)$, где T — период функции.

Практическое значение этих теорем состоит, очевидно, в следующем:

1) они позволяют при изучении движения осциллятора с комбинированным диссипативным трением по истечении достаточно большого промежутка времени после начала движения ограничиться (как и в случае обычного осциллятора с линейным уравнением движения) рассмотрением только вынужденных колебаний — периодического движения или состояний покоя;

2) в силу этих теорем отпадает необходимость при решении конкретных задач проверять каждый раз единственность и устойчивость найденных периодических движений.

Второй раздел работы является иллюстрацией применения метода точечного преобразования к решению конкретных задач о вынужденных колебаниях осциллятора с комбинированным трением; именно, там дано решение этой задачи для случая «знакопеременной» внешней силы (фиг. 3) в предположении, что «вязкая составляющая» силы трения пропорциональна скорости движения осциллятора. Выбранный вид внешней силы делает уравнение осциллятора (0.1) автономным в пределах каждого полупериода внешней силы в отдельности, и это обстоятельство, как увидим ниже, дает возможность решить задачу до конца, выяснить все возможные типы вынужденных колебаний и условия их существования и найти размах (амплитуду) этих колебаний как функцию параметров осциллятора.



Фиг. 3

I. Общие теоремы о существовании и устойчивости „в большом“ периодических движений осциллятора

1. Формулировка теорем. Уравнение движения осциллятора

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F + G(t) \tag{1.1}$$

после введения безразмерного времени

$$\tau = \omega_0 t \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \tag{1.2}$$

где ω_0 — собственная частота соответствующего гармонического осциллятора, приводится к системе уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varphi + g(\tau) \tag{1.3}$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по τ и

$$\varphi = \frac{1}{k} F, \quad g(\tau) = \frac{1}{k} G\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right) \tag{1.4}$$

приведенные силы трения и внешняя сила. Сделаем следующие предположения о виде внешней силы и силы трения.

А. Внешняя сила $G(t)$ (или $g(\tau)$) является периодической, ограниченной и кусочно-непрерывной функцией времени. Если T есть период внешней силы (в единицах безразмерного времени) то

$$g(\tau + T) \equiv g(\tau), \quad g_{\min} \leq g(\tau) \leq g_{\max} \tag{1.5}$$

В. Функция $\varphi = \varphi(x, y, g)$ — приведенная сила трения — удовлетворяет условиям:

1) при скорости осциллятора, отличной от нуля, сила трения зависит только от скорости и притом однозначно и непрерывно:

$$\varphi = f(y) \quad \text{при } y \neq 0 \quad (1.6)$$

Кроме того, полагаем, что $f(y)$ удовлетворяет на каждом конечном интервале изменения y , не содержащем $y = 0$, условию Липшица

2) при остановке осциллятора, т. е. при $y = 0$, приведенная сила трения

$$f(+0) \leq \varphi(x, 0, g) \leq f(-0) \quad (1.7)$$

и зависит от x и $g(\tau)$ следующим образом:

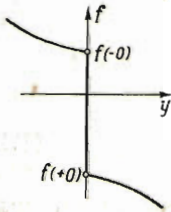
$$\varphi(x, 0, g) = \begin{cases} f(+0) & \text{для } x - g(\tau) \leq f(+0) \\ x - g(\tau) & \text{для } f(+0) \leq x - g(\tau) \leq f(-0) \\ f(-0) & \text{для } f(-0) \leq x - g(\tau) \end{cases} \quad (1.8)$$

3) сила трения является монотонно убывающей функцией скорости движения осциллятора

$$(y_2 - y_1) [\varphi(x_2, y_2, g_2) - \varphi(x_1, y_1, g_1)] < 0 \quad (1.9)$$

при любых $x_1, x_2, g_1 = g(\tau_1), g_2 = g(\tau_2)$ и $y_1 \neq y_2$ (фиг. 4)¹

Условие (1.8), очевидно, выражает известное физическое свойство сухого трения: при прохождении скорости движения через нуль устанавливается такая величина силы трения F , что происходит полная компенсация „ведущей силы“ $-kx + G(t)$ и осциллятор остается неподвижным во всех тех случаях, когда эта ведущая сила заключена в интервале между минимальной и максимальной силой „трения покоя“ ($F(+0) = kf(+0)$ и $F(-0) = kf(-0)$). Это состояние остановки будет продолжаться до тех пор, пока ведущая сила за счет изменения $G(t)$ не выйдет за пределы этого интервала. Условие (1.9) является аналитическим выражением диссипативности трения в осцилляторе.



Фиг. 4

Далее, так как правая часть второго уравнения системы (1.3) прерывна (при $y = 0$ прерывна функция φ и, кроме того, функция $g(\tau)$ может иметь точки разрыва первого рода), то следует специально указать, что нас будут интересовать только непрерывные решения системы (3) x и y — непрерывные функции τ всегда и, в частности, при тех значениях τ и y , когда прерывна правая часть второго уравнения (1.3). Это требование непрерывности решения системы (1.3) физически обосновано тем, что при массе осциллятора, отличной от нуля, ни координата, ни скорость осциллятора не могут меняться скачкообразно.

На основании условий (А) и (В) ниже будут доказаны следующие две теоремы о движениях осциллятора.

¹ Условие Липшица и условие (1.9) можно заменить более узким, но более удобным условием: при $y \neq 0$ производная $f'(y)$ существует и $|f'(y)| < 0$ всюду, кроме отдельных точек.

Теорема 1. Если условия (А) и (В) выполнены и

$$g_{\max} - g_{\min} \leq f(-0) - f(+0) \quad (1.10)$$

то существуют состояния покоя, абсциссы которых составляют „отрезок покоя“.

$$g_{\max} + f(+0) \leq x \leq g_{\min} + f(-0)$$

и каждое движение осциллятора стремится при $t \rightarrow +\infty$ к одному из состояний покоя.

Теорема 2. Если условия (А) и (В) выполнены,

$$g_{\max} - g_{\min} > f(-0) - f(+0) \quad (1.11)$$

и существует хотя бы одно ограниченное движение осциллятора, то последний имеет периодическое движение (с периодом, равным периоду внешней силы), к которому при $\tau \rightarrow +\infty$ стремятся все движения осциллятора.

Это периодическое движение, очевидно, будет единственным и устойчивым „в большом“ (область устойчивости — вся плоскость начальных условий). Таким образом, характер движения осциллятора при достаточно большом размахе внешней силы [выполнено условие (1.11)] определяется наличием хотя бы одного ограниченного движения: если последнее существует, то все движения ограничены и стремятся к единственному периодическому движению; если же существует хотя бы одно неограниченное движение, то и все другие движения осциллятора не будут ограниченными.

Однако для существования хотя бы одного ограниченного решения системы (1.3) сделанных выше предположений (А) и (В) о внешней силе и силе трения недостаточно, так как нетрудно указать примеры таких осцилляторов, которые удовлетворяют этим предположениям, но тем не менее имеют неограниченные движения¹. Поэтому для доказательства существования хотя бы одного ограниченного решения системы (1.3) необходимы дальнейшие ограничения на функции $f(y)$ и $g(\tau)$. Оказывается, для такого доказательства достаточно дополнительно предположить, что сила трения $f(y)$ не есть ограниченная функция скорости y . Следовательно, справедлива следующая теорема.

¹ Рассмотрим например осциллятор, удовлетворяющий условиям (А) и (В), характеристика трения которого ограничена $|f(x, y, g)| < a$, и внешняя сила $g(\tau)$ имеет период 2π (т. е. период внешней силы совпадает с периодом собственных колебаний осциллятора без трения). Сравнивая систему (1.3) с системой уравнений для осциллятора с одним сухим трением ($= a$)

$$\ddot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\xi - a \operatorname{sgn} \eta + g(\tau) \quad (\eta \neq 0)$$

которая, как показал Циглер^[5], при достаточно большой амплитуде внешней силы $g(\tau)$ имеет неограниченные решения, нетрудно убедиться, что и система (1.3) будет иметь неограниченные решения.

Теорема 3. Если выполнены условия (А) и (В),

$$g_{\max} - g_{\min} > f(-0) - f(+0) \quad (1.11)^1$$

и сила трения не является ограниченной функцией скорости, т. е.

$$f(+\infty) = -\infty \quad \text{или} \quad f(-\infty) = +\infty \quad (1.12)$$

то существуют периодическое движение осциллятора (единственное и с периодом, совпадающим с периодом внешней силы), к которому стремятся при $t \rightarrow +\infty$ все остальные движения осциллятора².

2. Фазовое пространство и фазовые траектории. Точечное преобразование. Каждому движению осциллятора взаимно и однозначно соответствует некоторая непрерывная фазовая траектория $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ в фазовом пространстве $xy\tau$. Последнее распадается на две области:

1) пространство вне плоскости $y = 0$, где система имеет вид (1.3)

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + f(y) + g(\tau) \quad (2.1)$$

2) плоскость $y = 0$.

На плоскости $y = 0$ имеет смысл выделить „полосу застоя“

$$f(+0) + g(\tau) \leq x \leq f(-0) + g(\tau) \quad (2.2)$$

в которой согласно (1.8) $\dot{y} = 0$, и, следовательно, уравнение фазовых траекторий имеет вид $x = \text{const}$, т. е., иначе говоря, вся полоса застоя заполнена фазовыми траекториями $x = \text{const}$.

Фазовые траектории, приходящие на плоскость $y = 0$ вне полосы застоя, пересекают эту плоскость, совершая переход из полупространства $y > 0$ в полупространство $y < 0$ при $x > f(-0) + g(\tau)$, т. е. справа от полосы застоя (фиг. 5), и обратный переход при $x < f(+0) + g(\tau)$.

Фазовые траектории, приходящие из пространства $y \neq 0$ на полосу застоя, будут переходить в соответствующую траекторию $x = \text{const}$ внутри этой полосы.

Фазовые траектории, лежащие в полосе застоя и приходящие на ее (правую или левую) границу, очевидно, уходят с плоскости $y = 0$ (соответственно в полупространство $y < 0$ или $y > 0$).

Очевидно, фазовые траектории, не лежащие хотя бы частично в полосе застоя, соответствуют движениям осциллятора без длительных остановок, фазовые траектории, лежащие, но только частично, в полосе застоя, — движениям с длительными остановками. В том случае, если прямая $x = \text{const}$ лежит целиком внутри полосы застоя, эта прямая будет фазовой траекторией, соответствующей состоянию покоя. Оче-

¹ Очевидно, условие (1.1) эквивалентно условию $G_{\max} - G_{\min} > F(-0) - F(+0)$, где $F(-0)$ и $F(+0)$ — максимальная сила трения покоя.

² Теоремы, сформулированные выше, справедливы, в частности, и для осциллятора с одним вязким, вообще говоря, нелинейным трением [нужно положить $f(+0) = f(-0)$]. Тем самым мы получаем теоремы Левинсона^[6] о существовании и единственности периодических движений осциллятора с вязким трением, но с менее жесткими ограничениями для $f(y)$ и $g(\tau)$, чем у Левинсона.

видно, такие фазовые прямые существуют только при выполнении условия

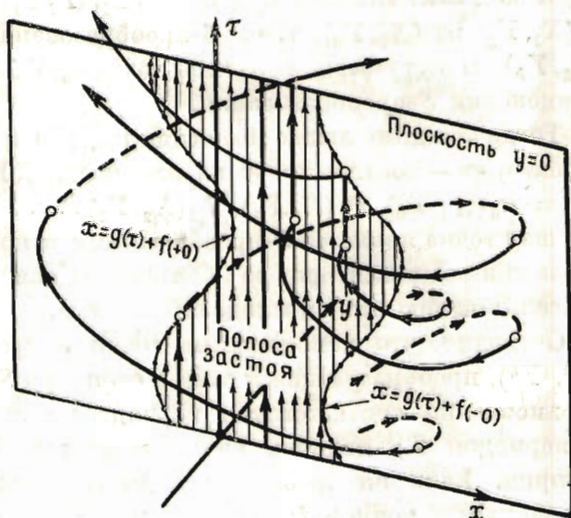
$$f(+0) + g_{\max} \leq f(-0) + g_{\min}$$

или, иначе говоря, условия (1.10), абсциссы этих прямых (координаты состояний равновесия) принадлежат отрезку

$$f(+0) + g_{\max} \leq x \leq f(-0) + g_{\min} \quad (2.3)$$

названному ранее отрезком покоя.

Условия (А) и (В) обеспечивают применимость теоремы Коши о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений к системе (2.1) в пространстве $y \neq 0$. Наличие точек разрыва первого рода у функции $g(\tau)$ не имеет значения, так как фазовые траектории в этих точках доопределены требованием непрерывности. Далее, поведение фазовой траектории, проходящей на плоскость $y=0$, также однозначно определяется точкой прихода этой траектории на плоскость $y=0$ (речь идет о ходе фазовой траектории после момента прихода ее на плоскость $y=0$).



Фиг. 5

Поэтому фазовые траектории системы уравнений (1.3), доопределенные требованием непрерывности x и y по τ , являются непрерывными кривыми и для $\tau > \tau_0$ однозначно и непрерывно¹ определяются значениями x и y при $\tau = \tau_0$.

Выберем в качестве начальных точек (X_0, Y_0) плоскости $\tau = 0$. Тогда уравнения семейства непрерывных фазовых траекторий системы (1.3)

$$x = x(\tau, X_0, Y_0), \quad y = y(\tau, X_0, Y_0) \quad (2.4)$$

будут выражаться для $\tau > 0$ однозначными и непрерывными функциями τ, X_0, Y_0 . В частности,

$$X_1 = x(T, X_0, Y_0), \quad Y_1 = y(T, X_0, Y_0) \quad (2.5)$$

т. е. абсцисса и ордината точки пересечения данной фазовой траектории с плоскостью $\tau = T$ [T — период функции $g(\tau)$] будут однозначными и непрерывными функциями от X_0, Y_0 .

¹ Но для $\tau < \tau_0$ такой однозначной и непрерывной зависимости $x(\tau), y(\tau)$ от $x(\tau_0)$ и $y(\tau_0)$ уже не будет из-за наличия сухого трения.

Это преобразование точек плоскости $\tau = 0$ в точки плоскости $\tau = T$ фазовыми траекториями осциллятора [т. е. преобразование точек (X_0, Y_0) в (X_1, Y_1) согласно (2.5)] мы будем в дальнейшем интерпретировать как точечное преобразование S некоторой плоскости XU самой в себя. Это S -преобразование, очевидно, будет однозначным и непрерывным¹.

Так как внешняя сила $g(\tau)$ — периодическая функция с периодом T , то, очевидно,

$$X_k = x(kT, X_0, Y_0), \quad Y_k = y(kT, X_0, Y_0) \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

т. е. координаты точки пересечения данной фазовой траектории с плоскостью $\tau = kT$ получаются из (X_{k-1}, Y_{k-1}) по тому же закону, что и (X_1, Y_1) из (X_0, Y_0) , т. е. S -преобразованием. Следовательно, точки (X_k, Y_k) могут быть получены из (X_0, Y_0) с помощью k -кратного применения S -преобразования.

Тогда каждому движению осциллятора (при $\tau > 0$) — каждой фазовой траектории — соответствует на плоскости XU последовательность (P_n) точек $P_0(X_0, Y_0), P_1(X_1, Y_1), P_2(X_2, Y_2), \dots$, в которой каждая последующая точка является S -преобразованием предыдущей, и исследование движения осциллятора за большие промежутки времени сводится к исследованию этой последовательности.

Очевидно, что неподвижные точки S -преобразования, т. е. точки (X^*, Y^*) , преобразующиеся сами в себя при S -преобразовании, взаимно и однозначно соответствуют периодическим движениям осциллятора (с периодом T), являясь начальными точками соответствующей траектории. Если же любая последовательность точек P_0, P_1, P_2, \dots с начальной точкой P_0 внутри некоторой области (G) имеет своим пределом одну и ту же точку, то последняя, являясь в силу непрерывности S -преобразования неподвижной точкой, соответствует периодическому движению с периодом T , устойчивому в большом (область устойчивости — область начальных точек G)². Таким образом, задача нахождения периодических движений осциллятора (с периодом, равным периоду внешней силы) и исследование их устойчивости сводится к нахождению и исследованию устойчивости неподвижных точек S -преобразования.

Докажем одно важное свойство S -преобразования. Рассмотрим какие-либо две фазовые траектории

$$x = x_1(\tau), \quad y = y_1(\tau); \quad x = x_2(\tau), \quad y = y_2(\tau)$$

¹ Обратное преобразование (X_1, Y_1) в (X_0, Y_0) уже не является однозначным.

² Эта устойчивость будет не только орбитной, но и устойчивостью по обеим координатам. Именно, в силу непрерывности (2.4) по X_0, Y_0 для любого движения $\epsilon \in (X_0, Y_0) \subset (G)$ имеет место

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} x(\tau) = x^*(\tau), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} y(\tau) = y^*(\tau)$$

где $x = x^*(\tau), y = y^*(\tau)$ — уравнение периодического движения. Очевидно, это периодическое движение будет устойчивым и по Ляпунову^[7].

начинающиеся соответственно в точках $(X_0^{(1)}, Y_0^{(1)})$, $(X_0^{(2)}, Y_0^{(2)})$ плоскости (X, Y) . Расстояние между их точками в момент времени τ

$$z(\tau) = \sqrt{[x_2(\tau) - x_1(\tau)]^2 + [y_2(\tau) - y_1(\tau)]^2} \quad (2.7)$$

является непрерывной и кусочно-дифференцируемой функцией времени (производная от z имеет разрывы в те моменты, когда разрывна правая часть второго уравнения (1.3) для какой-либо из этих траекторий: в эти моменты времени производные от y_1 и y_2 , а следовательно, и от z имеют левые и правые пределы, но не равные друг другу). В те моменты времени, когда производная от z существует, имеем

$$\dot{z} = (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

или на основании уравнений (1.3)

$$\dot{z} = (y_2 - y_1) [\varphi(x_2, y_2, g) - \varphi(x_1, y_1, g)]$$

и, следовательно, в силу условия диссипативности осциллятора (1.9)

$$\dot{z} \leq 0 \quad (2.8)$$

причем знак равенства имеет место только при $y_1 = y_2$

Так как неравенство (2.8) справедливо и для левых и правых пределов производной от z в точках разрыва непрерывности, то расстояние между одновременными точками двух любых фазовых траекторий является невозрастающей непрерывной функцией времени¹.

Обозначим через Z_0 расстояние между точками $(X_0^{(1)}, Y_0^{(1)})$ и $(X_0^{(2)}, Y_0^{(2)})$ плоскости XU и через Z_n расстояние между точками $(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)})$ и $(X_n^{(2)}, Y_n^{(2)})$, получающимися n -кратным S -преобразованием начальных точек. Очевидно, что

$$Z_n \leq Z_0, \quad \text{или} \quad \frac{Z_n}{Z_0} \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

причем знак равенства в (2.9) имеет место только для тех траекторий, у которых $y_1 \equiv y_2$ при $0 < \tau < nT$. Заметив, что из $y_1 \equiv y_2$ вне плоскости $y = 0$ следует в силу второго уравнения (2.1) $x_1 \equiv x_2$, мы можем утверждать, что знак равенства в (2.9) для разных траекторий имеет место

¹ Из соотношения (2.8) сразу вытекает устойчивость в смысле Ляпунова [7] любого движения осциллятора. Действительно, рассмотрим какое-либо движение осциллятора $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ с начальными условиями $x = x_0^*$, $y = y_0^*$ при $\tau = \tau_0$. Зададимся произвольным (сколь угодно малым) положительным числом ϵ . В силу (2.8) для любого движения $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, начальная точка которого $(x_0 = x(\tau_0), y_0 = y(\tau_0))$ лежит внутри круга радиуса ϵ с центром (x_0^*, y_0^*) , при любом $\tau > \tau_0$ имеют место неравенства

$$|x(\tau) - x^*(\tau)| < \epsilon, \quad |y(\tau) - y^*(\tau)| < \epsilon$$

Эти неравенства, в частности, справедливы и для тех фазовых траекторий для которых

$$|x_0 - x_0^*| < \delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_0 - y_0^*| < \delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

т. е. движение $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ устойчиво в смысле Ляпунова при $\tau > \tau_0$

только в том случае, если обе эти траектории лежат целиком внутри полосы застоя, т. е. если обе начальных точки $(X_0^{(1)}, Y_0^{(1)})$ и $(X_0^{(2)}, Y_0^{(2)})$ принадлежат отрезку покоя на плоскости XU :

$$Y = 0, \quad f(+0) + g_{\max} \leq X \leq f(-0) + g_{\min} \quad (2.10)$$

3. Доказательство теорем 1 и 2. Неравенство (2.9) позволит нам доказать теоремы 1 и 2. Для доказательства первой теоремы рассмотрим какую-либо фазовую траекторию:

$$x = x^*(\tau), \quad y = y^*(\tau) \quad (3.1)$$

которая, хотя бы частично, лежит вне полосы застоя. Ей на плоскости XU соответствует последовательность точек P_n^* :

$$P_0^*(X_0^*, Y_0^*), \quad P_1^*(X_1^*, Y_1^*), \quad P_2^*(X_2^*, Y_2^*), \dots \quad (3.2)$$

Так как теорема 1 предполагает выполнение условия (1.10), то S -преобразование имеет своими неподвижными точками все точки отрезка покоя (2.10).

Покажем, что последовательность точек (3.2) сходится к некоторой точке отрезка покоя.

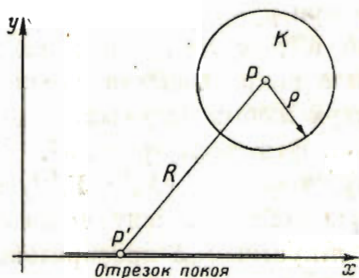
Так как расстояние точек P_n^* последовательности (3.2) до любой из точек отрезка покоя, являющейся неподвижной точкой S -преобразования, не может возрастать согласно (2.9), то эта последовательность — ограниченная и имеет согласно известной теореме Больцано-Вейерштрасса по крайней мере одну предельную точку (обозначим ее через P_*). Эта предельная точка принадлежит отрезку покоя (2.10), так как ни одна точка вне него не может являться предельной точкой последовательности (3.2). В самом деле, рассмотрим какую-либо точку P плоскости XU , лежащую вне отрезка неподвижности (фиг. 6). Вокруг нее мы можем провести окружности (C) настолько малого радиуса ρ , что эта окружность не имеет общих точек с отрезком покоя и не охватывает его.

Обозначим через Z_n' расстояние точек последовательности (3.2) до какой-либо точки отрезка покоя P' (она является неподвижной точкой) и через R — расстояние между P и P' .

В замкнутой области — круге (K), ограниченном окружностью (C) непрерывная функция

$$\frac{Z_1'}{Z_0'} = U(X_0, Y_0) \geq 0$$

где Z_0' и Z_1' — расстояния до P' какой-либо точки (X_0, Y_0) и ее S -преобразования, согласно теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях



Фиг. 6

достигает своей верхней границы (обозначим ее через δ). Так как в круге (K) имеем $Z_1'/Z_0' < 1$, то и $\delta < 1$, т. е. в круге (K)

$$0 \leq \frac{Z_1'}{Z_0'} \leq \delta < 1 \quad (3.3)$$

Тогда, если даже в круге (K) есть точка последовательности (3.2) $P_m^* (Z_m' < R + \rho)$, то для точек P_n^* с номерами¹

$$n > m + E\left(\frac{1}{\log(1/\delta)} \log \frac{R + \rho}{R - \rho}\right)$$

имеем $Z_n' < R - \rho$, т. е. все эти точки P_n^* лежат вне круга (K).

Таким образом, в достаточно малой окрестности любой точки P плоскости XU , лежащей вне отрезка покоя находится конечное число точек последовательности (3.2), точка P не может быть предельной для этой последовательности и, следовательно, предельная точка P_* принадлежит отрезку покоя и является неподвижной точкой S -преобразования.

Нетрудно убедиться, что точка P_* является единственной предельной точкой последовательности (3.2), т. е. ее пределом. Действительно, поскольку точка P_* — предельная точка последовательности (3.2), в любой сколь угодно малой ее окрестности, — круге сколь угодно малого радиуса ϵ с центром в P_* , содержится хотя бы одна точка последовательности (3.2) P_m^* , где $m = m(\epsilon)$. Так как расстояния точек P_n^* до P_* — неподвижной точки S -преобразования — не могут возрастать с ростом n , то в этом круге содержатся все точки P_n^* номера $n > m$, т. е. P_* является пределом последовательности точек P_n^* (3.2), а соответствующая фазовая траектория (3.1) стремится при $t \rightarrow +\infty$ к одной из прямых „покоя“ — прямым, лежащим целиком в полосе застоя. Тем самым доказана теорема 1.

Рассмотрим случай (1.11), когда

$$g_{\max} - g_{\min} > f(-0) - f(+0)$$

В этом случае не существует отрезка покоя и осциллятор при любых начальных условиях совершает движение. Теперь знак равенства в (2.9) не может иметь места и при S -преобразовании любой пары различных точек плоскости XU

$$Z_n/Z_0 < 1 \quad (3.4)$$

Вторую теорему о движении осциллятора мы докажем на основании следующей леммы: при выполнении условия (1.11) для конечной области (G) плоскости XU по любому (сколь угодно малому) положительному числу ϵ можно найти такое число δ ($0 < \delta = \delta(\epsilon) < 1$), что для любой пары точек $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}$ этой области (G), расстояние между которыми $Z_0 \geq \epsilon$, имеет место неравенство

$$Z_1/Z_0 \leq \delta < 1 \quad (3.5)$$

¹ Через $E(u)$ обозначено наибольшее целое число, не превышающее u .

Доказательство леммы элементарно. Так как область (G) конечна, то существует такое число M , что для любой пары точек этой области $|X| < M$, $|Y| < M$. Отношение Z_1/Z_0 является непрерывной функцией координат $X_0^{(1)}$, $Y_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(2)}$ пары точек $P_0^{(1)}$, $P_0^{(2)}$:

$$\frac{Z_1}{Z_0} = U(X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) \quad (*)$$

Выделим из замкнутой четырехмерной области (Q) , определенной неравенствами

$$|X_0^{(1)}| \leq M, \quad |X_0^{(2)}| \leq M, \quad |Y_0^{(1)}| \leq M, \quad |Y_0^{(2)}| \leq M$$

четырёхмерный слой (q)

$$|X_0^{(1)} - X_0^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |Y_0^{(1)} - Y_0^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

где ε — выбранное положительное число. В слое (q)

$$Z_0 = \sqrt{(X_0^{(2)} - X_0^{(1)})^2 + (Y_0^{(2)} - Y_0^{(1)})^2} < \varepsilon$$

В оставшейся замкнутой области $(Q') = (Q) - (q)$ непрерывная функция $(*)$ достигает своей верхней границы. Обозначим ее через δ . Так как в (Q') будет в силу (3.4) $Z_1/Z_0 < 1$, то и $\delta < 1$. Поэтому для всех пар точек области (G) , расстояние между которыми $Z_0 \geq \varepsilon$, соответствующие четырехмерные точки $(X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)})$ лежат в области (Q') ; отсюда следует (3.5).

Пусть $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ — ограниченная фазовая траектория осциллятора, существование которой предполагается условиями второй теоремы. Этой фазовой траектории соответствует на плоскости XU бесконечная ограниченная последовательность точек (P_n^*)

$$P_0^*(X_0^*, Y_0^*), \quad P_1^*(X_1^*, Y_1^*), \quad P_2^*(X_2^*, Y_2^*) \quad (3.6)$$

в которой каждая точка получается S -преобразованием предыдущей.

Покажем, что последовательность (3.6) сходится, доказав выполнение критерия Коши. Так как последовательность (3.6) — ограниченная, то существует такой круг (G^*) радиуса R^* с центром в P_0^* , который содержит все точки этой последовательности. Зададимся сколь угодно малым положительным числом ε . Согласно сформулированной выше лемме можно найти такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) < 1$, что для любой пары точек этого круга и, в частности, для любой пары точек последовательности (3.6), расстояние между которыми $\geq \varepsilon$, имеет место неравенство (3.5).

Рассмотрим пару точек P_0^* , P_p^* последовательности (3.6) и их последовательные S -преобразования: P_1^* , P_{p+1}^* ; P_2^* , P_{p+2}^* ; ...; P_n^* , P_{p+n}^* . Обозначим расстояние между точками P_λ^* и P_μ^* через $Z_{\lambda\mu}^*$. Тогда, очевидно, в силу (3.4)

$$Z_{n, n+p}^* < \varepsilon, \quad \text{если } Z_{0, p}^* < \varepsilon$$

Если же $Z_{0, p}^* \geq \varepsilon$, то

$$Z_{n, n+p}^* \leq \delta^n Z_{0, p}^* < \delta^n R^*$$

и

$$Z_{n, n+p}^* < \varepsilon \quad \text{при } n > N = E\left(\frac{1}{\log(1/\delta)} \log \frac{R^*}{\varepsilon}\right)$$

Итак, по каждому сколько угодно малому положительному числу ε можно найти такое число

$$N = E \left(\frac{\log(R^* / \varepsilon)}{\log(1 / \delta)} \right)$$

что при $n > N$ и любом $p = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $Z_n^* \cdot \delta^{n+p} < \varepsilon$, т. е. для последовательности (3.6) выполняется критерий Коши и она имеет предел P_* .

Эта точка будет неподвижной точкой S -преобразования в силу непрерывности последнего. Действительно, если бы точка P_* не была неподвижной точкой S -преобразования, а преобразовывалась бы в другую точку P_{1*} , то в силу непрерывности S -преобразования для каждого сколь угодно малого круга (K_1) с центром в P_{1*} существовал бы такой круг (K) с центром в P_* , все точки которого переходили бы при S -преобразовании внутрь круга (K_1) , причем радиус круга (K_1) мог бы быть выбран настолько малым, чтобы круги (K) и (K_1) не перекрывались. Тогда в окрестностях обеих точек P_* и P_{1*} — кругах (K) и (K_1) — содержались бы бесконечные множества точек (3.6), что противоречит тому, что точка P_* является пределом последовательности (3.6).

Таким образом, точка P_* — неподвижная точка S -преобразования. Тем самым доказано существование периодического движения (с периодом T); к этому периодическому движению стремится при $\tau \rightarrow +\infty$ рассматриваемое ограниченное движение: $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$. Но теперь мы можем утверждать, что каждое движение осциллятора — ограниченное, ибо точки соответствующей последовательности P_0, P_1, P_2, \dots согласно (3.4) не могут быть удалены от неподвижной точки S -преобразования P_* далее, чем начальная точка P_0 . Поэтому каждая последовательность (P_n) сходится к своему пределу (иначе говоря, каждое движение осциллятора стремится к некоторому периодическому). Поскольку существование нескольких неподвижных точек S -преобразования противоречит неравенству (3.4), то S -преобразование имеет своей единственной неподвижной точкой точку P_* , в которой сходятся все последовательности (P_n) , и, следовательно, при выполнении условий второй теоремы существует единственное периодическое движение осциллятора (с периодом, равным периоду внешней силы T), к которому стремятся при $\tau \rightarrow +\infty$ все остальные движения. Вторая теорема доказана.

4. О существовании ограниченного движения. Перейдем теперь к доказательству третьей теоремы.

Покажем, что при выполнении условий теоремы 3 на плоскости xu существует такая простая замкнутая кривая (Γ) , что все непрерывные интегральные кривые системы (1.3), которые пересекают (Γ) , не могут переходить из области, внутренней по отношению (Γ) , в область, внешнюю при возрастающем τ .

Тогда, очевидно, все решения системы уравнений (1.3), начальные точки которых лежат в области, внутренней по отношению к (Γ) ,

будут ограниченными и третья теорема будет следствием второй. Таким образом, доказательство третьей теоремы о движении осциллятора сводится к доказательству существования замкнутой кривой (Γ) с указанными выше свойствами.

Допустим, для определенности, что $f(y) \rightarrow -\infty$ при $y \rightarrow +\infty$ (если $f(+\infty)$ — ограничено, то по условиям третьей теоремы $f(-\infty) = +\infty$ и этот случай сводится к рассматриваемому заменой x, y на $-x, -y$).

Нанесем на плоскость xy произвольную интегральную кривую $x = x(\tau), y = y(\tau)$ системы уравнений (1.3) и обозначим через D квадрат

расстояния точек этой кривой до точки $(\alpha, 0)$:

$$D(\tau) = [x(\tau) - \alpha]^2 + [y(\tau)]^2 \quad (4.1)$$

где

$$\alpha = f(-\infty) + g_{\min} \quad (4.2)$$

Производная этой непрерывной и кусочно-дифференцируемой функции согласно уравнению (1.3) и условию (4.2)

$$\dot{D} = 2y[f(y) + g(\tau) - \alpha] \leq 0 \quad \text{при } y \leq 0$$

где $D = 0$ только при $y = 0$, т. е. интегральные кривые системы

уравнений (1.3) в нижней полуплоскости ($y \leq 0$), проходящие через точки полуокружности

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \text{const} \quad (4.3)$$

не могут удаляться при возрастающем τ от ее центра $(\alpha, 0)$. Поэтому в качестве той части кривой (Γ) , которая лежит в нижней полуплоскости, может быть взята любая из полуокружностей (4.3) (фиг. 7).

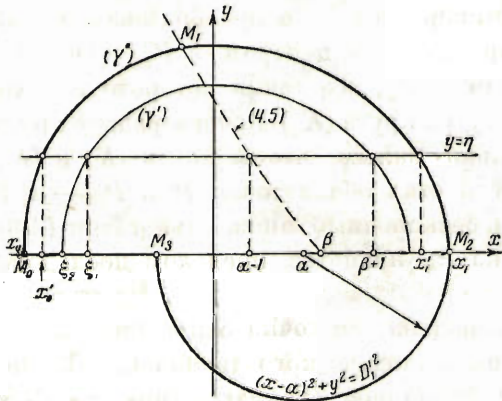
В качестве кривой (Γ) для верхней полуплоскости ($y > 0$) может быть использована интегральная кривая другой, уже автономной системы уравнений¹

$$\dot{x}' = y', \quad \dot{y}' = -x' + f(y') + g_{\max} + 1 \quad (y' > 0) \quad (4.4)$$

Действительно, интегральные кривые системы (1.3) $x = x(\tau), y = y(\tau)$ в точках их пересечения с интегральной кривой (γ') системы (4.4) $x' = x'(\tau), y' = y'(\tau)$ переходят из области над кривой (γ') в область, расположенную под ней, так как

$$\dot{x} = \dot{x}', \quad \dot{y} - \dot{y}' = g(\tau) - g_{\max} - 1 \leq -1 \quad \text{при } x = x', y = y'$$

¹ Мы пишем знак "при" x и y только для того, чтобы различать интегральные кривые систем уравнений (1.3) и (4.4).



Фиг. 7

Система уравнений (4.4) удовлетворяет в верхней полуплоскости условиям теоремы Коши, поэтому ее интегральные кривые (γ) будут непрерывными гладкими кривыми (x' и y' — дифференцируемые функции τ) и через каждую точку полуплоскости $y > 0$ проходит единственная интегральная кривая (γ). Эти интегральные кривые имеют максимальное значение y' на непрерывной кривой

$$x = f(y) + g_{\max} + 1 \quad (4.5)$$

так как $\dot{y}' > 0$ слева и $\dot{y}' < 0$ справа от этой кривой, а $\dot{x}' > 0$ на всей полуплоскости $y > 0$. Отметим, что кривая (4.5) пересекает ось $y = 0$ в точке

$$x = \beta = f(+0) + g_{\max} + 1 \quad (4.6)$$

где $\beta > \alpha$ в силу условия (1.11).

Рассмотрим интегральную кривую (γ) системы (4.4), выходящую из точки $(x_0, 0)$, причем $x_0 < \alpha$. Так как $f(+\infty) = -\infty$, то (γ) обязательно пересечет кривую (4.5) и вернется обратно на ось $y = 0$ в некоторой точке $(x_1, 0)$, причем $x_1 > \beta$.

Обозначим через D' квадрат расстояния точек этой кривой до точки $(\alpha, 0)$. Очевидно, в силу (4.4),

$$\dot{D}' = 2y' [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] \quad \text{или} \quad \frac{dD'}{dx'} = 2[f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha]$$

Интегрируя по x' от x_0 до x_1 , получим

$$D_1' - D_0' = 2 \int_{x_0}^{x_1} [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] dx' \quad (4.7)$$

где D_1' и D_0' — квадраты расстояний конечной и начальной точек интегральной кривой (γ), т. е. точек $(x_1, 0)$ и $(x_0, 0)$, до точки $(\alpha, 0)$ — центра полуокружностей (4.3).

Если существует такая интегральная кривая (γ^*) системы (4.4), для которой $D_1' < D_0'$, то замкнутый контур (Γ), существование которого нам надо доказать, очевидно, может быть составлен из (γ^*), — кривая $M_0M_1M_2$ на фиг. 7, полуокружности M_2M_3 , ее уравнение $(x - \alpha)^2 + y^2 = D_1'$, $y \leq 0$ и отрезка M_3M_0 оси $y = 0$. Ни на одном из участков этого контура (Γ) интегральные кривые системы (1.3) не могут выходить из области, внутренней по отношению к (Γ), в область внешнюю¹. Таким образом, нам осталось доказать существование кривой (γ^*) с $D_1' < D_0'$.

Пусть η корень уравнения $f(\eta) = \alpha - 2 - g_{\max}$ (4.8). Такой корень существует, притом единственный и положительный, так как

$$\alpha - 2 - g_{\max} = f(-0) + g_{\min} - g_{\max} - 2 < f(+0)$$

¹ Если бы $D_1' > D_0'$, то точка M_3 лежала бы слева от M_0 , с отрезка M_3M_0 был бы возможен выход интегральных кривых системы (1.3) из внутренней области и замкнутая кривая $M_0M_1M_2M_3M_0$ не обладала бы свойствами кривой (Γ).

в силу условия (1.11), а $f(y)$ — непрерывная, монотонно убывающая функция, меняющаяся от $f(+0)$ при $y = +0$ до $-\infty$ при $y \rightarrow +\infty$.

Тогда подинтегральное выражение в равенстве (4.7)

$$\begin{aligned} f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha &\leq -1 && \text{при } y' \geq \eta \\ -1 < f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha &\leq \beta - \alpha && \text{при } 0 < y' < \eta \end{aligned} \quad (4.9)$$

Заметим, что прямая $y = \eta$ пересекает кривую (4.5) в точке $(\alpha - 1, \eta)$.

Пусть (γ') та интегральная кривая системы (4.4), которая проходит через точку $(\beta + 1, \eta)$; обозначим через ξ_1 и ξ_2 абсциссы левых точек пересечения этой кривой с прямой $y = \eta$ и осью $y = 0$ (фиг. 7). Очевидно, что $\xi_2 < \xi_1 < \alpha - 1$.

Рассмотрим интегральную кривую (γ) системы (4.4), проходящую через точку $(x_0, 0)$, причем $x_0 < \xi_2$. Эта кривая пересекает прямую $y = \eta$ в двух точках с абсциссами x_0' и x_1' ($x_0 < x_0' < \xi_1$, $\beta + 1 < x_1' < x_1$). Представим интеграл (4.7) в виде

$$\begin{aligned} D_1' - D_0' &= 2 \int_{x_0}^{x_0'} [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] dx' + \\ &+ 2 \int_{x_0'}^{x_1'} [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] dx' + 2 \int_{x_1'}^{x_1} [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] dx' \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из этих трех интегралов только первый и третий могут быть больше нуля, в то время как второй интеграл

$$J_2 = 2 \int_{x_0'}^{x_1'} [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] dx' < 2(x_0' - x_1') < 2(x_0' - \alpha) < 0 \quad (4.11)$$

в силу (4.9) и неравенства $x_1' > \beta + 1 > \alpha$. Оценим первый и третий интегралы в (4.10). Очевидно, в силу (4.9)

$$\begin{aligned} J_1 &= 2 \int_{x_0}^{x_0'} [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] dx' < 2(\beta - \alpha)(x_0' - x_0) \\ J_3 &= 2 \int_{x_1'}^{x_1} [f(y') + g_{\max} + 1 - \alpha] dx' < 2(\beta - \alpha)(x_1 - x_1') \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из уравнений (4.4) имеем, что для интегральной кривой (γ)

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{-x' + f(y') + g_{\max} + 1} \quad (4.13)$$

и, следовательно,

$$0 < \frac{dx'}{dy'} < \frac{\eta}{\alpha - 1 - \xi_1} \quad \text{при } x_0 < x' \leq x_0'$$

так как при этом

$$0 < y' \leq \eta, \quad f(y') + g_{\max} + 1 \geq \alpha - 1 > \xi_1 > x_1$$

Аналогично

$$0 > \frac{dx'}{dy'} > -\eta \quad \text{при } x_1' \leq x' < x_1$$

так как при этом

$$0 < y' \leq \eta, \quad f(y') + g_{\max} + 1 < \beta < \beta + 1 < x'$$

Отсюда

$$x_0' - x_0 < \frac{\eta^2}{\alpha - 1 - \xi_1}, \quad x_1 - x_1' < \eta^2 \quad \text{при } x_0 < \xi_2$$

Следовательно, при $x_0 \rightarrow -\infty$ интегралы J_1 и J_2 остаются ограниченными сверху:

$$J_1 + J_3 < 2(\beta - \alpha) \eta^2 \left[1 + \frac{1}{\alpha - 1 - \xi_1} \right]$$

и так как $J_2 \rightarrow -\infty$ при $x_0 \rightarrow -\infty$, то $D_1' - D_0' = J_1 + J_2 + J_3 \rightarrow -\infty$, т. е. можно выбрать x_0 ($x_0 < \xi < \xi_2$) таким образом, что для соответствующих интегральных кривых (γ) будет $D_1' - D_0' < 0$.

Любая из таких кривых может быть взята в качестве кривой (γ^*) для построения контура (Γ). Теперь существование замкнутой кривой (Γ) и справедливость третьей теоремы доказаны¹.

5. Теоремы о движении „симметричного“ осциллятора. Особый интерес представляет рассмотрение так называемого симметричного осциллятора, т. е. осциллятора, характеристика трения которого является нечетной функцией скорости

$$\varphi(x, -y, g) \equiv -\varphi(x, y, g) \quad (5.1)$$

и, в частности, $f(-0) = -f(+0)$ для случая „симметричной“ внешней силы, — силы, удовлетворяющей условию

$$g\left(\tau \pm \frac{T}{2}\right) \equiv -g(\tau) \quad (5.2)$$

Ниже мы будем обозначать максимальную „силу трения покоя“ $f(-0)$ через f_0 ; тогда $f(+0) = -f_0$; а амплитуду внешней силы через g_0 , т. е. $g_{\max} = g_0$, $g_{\min} = -g_0$. Очевидно, симметричный осциллятор имеет состояния покоя только при выполнении условия

$$g_0 \leq f_0 \quad (5.3)$$

причем состояниями покоя будут состояния, для которых

$$|x| \leq f_0 - g_0 \quad (5.4)$$

Условие (5.3) будет условием применимости первой теоремы.

¹ При доказательстве существования замкнутой кривой (Γ) мы нигде не использовали условия $f(-0) \geq f(+0)$. Поэтому такая кривая (Γ) для системы уравнения (1.3) существует и в случае $f(-0) < f(+0)$, т. е. в случае „подталкивающего“ твердого трения. Тогда на основании известной теоремы Брауэра о неподвижных точках точечного преобразования мы можем утверждать, что и в этом случае система уравнений (1.3) имеет периодическое решение (с периодом внешней силы). Однако вопрос об устойчивости этого решения остается открытым. Физическим примером системы с „подталкивающим твердым трением“ может служить ламповый генератор с ломаной характеристикой [1].

В силу условий симметричности (5.1) и (5.2) система уравнений (1.3) является инвариантной относительно преобразования переменных:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad \tau' = \tau - \frac{T}{2} \quad (5.5)$$

(система уравнений (1.3) имеет в переменных x', y', τ' тот же вид, что и в переменных x, y, τ). Пусть

$$x = \Phi_1(\tau, X_0, Y_0), \quad y = \Phi_2(\tau, X_0, Y_0) \quad (5.6)$$

уравнение фазовой траектории, выходящей из точки (X_0, Y_0) , плоскости $\tau = 0$, системы (1.3) при $\tau \geq 0$; очевидно, функции Φ_1 и Φ_2 таковы, что

$$\Phi_1(0, u, v) \equiv u, \quad \Phi_2(0, u, v) \equiv v \quad (5.7)$$

Обозначим через $-X'$ и $-Y'$ координаты точки пересечения этой фазовой траектории с плоскостью $\tau = 1/2T$:

$$X' = -\Phi_1(1/2T, X_0, Y_0), \quad Y' = -\Phi_2(1/2T, X_0, Y_0) \quad (5.8)$$

Это преобразование точек (X_0, Y_0) в (X', Y') (оно является непрерывным и однозначным) мы назовем в дальнейшем „полупериодным“ преобразованием S_1 .

Согласно инвариантности системы (1.3) относительно преобразования переменных (5.5), фазовой траекторией системы (1.3) при $\tau \geq 1/2T$ будет также

$$x = -\Phi_1(\tau - 1/2T, X', Y'), \quad y = -\Phi_2(\tau - 1/2T, X', Y') \quad (5.9)$$

Она в силу (5.7) проходит через ту же точку фазового пространства $(-X', -Y', 1/2T)$, что и траектория (5.6). Поскольку, как это указывалось раньше, из каждой точки фазового пространства (x, y, τ) выходит единственная фазовая траектория, то при $\tau \geq 1/2T$

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\tau, X_0, Y_0) \equiv -\Phi_1(\tau - 1/2T, X', Y') \\ y &= \Phi_2(\tau, X_0, Y_0) \equiv -\Phi_2(\tau - 1/2T, X', Y') \end{aligned} \quad (5.10)$$

и, в частности, координаты точки пересечения фазовой траектории (5.6) с плоскостью $\tau = T$ равны

$$X_1 = -\Phi_1(1/2T, X', Y'), \quad Y_1 = -\Phi_2(1/2T, X', Y') \quad (5.11)$$

Таким образом, (X_1, Y_1) получается из (X', Y') тем же S_1 -преобразованием, что и (X', Y') из (X_0, Y_0) , и S -преобразование (преобразование плоскости $\tau = 0$ в плоскость $\tau = T$) в случае симметричного осциллятора является двукратнопримененным полупериодным S_1 -преобразованием.

Неподвижная точка S_1 -преобразования (она будет неподвижной точкой и S -преобразования), очевидно, является начальной точкой симметричного периодического движения (с периодом T), т. е. такого периодического движения $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$, для которого

$$x^*(\tau \pm 1/2T) \equiv -x^*(\tau), \quad y^*(\tau \pm 1/2T) \equiv -y^*(\tau) \quad (5.12)$$

Для симметричного осциллятора можно повторить все доказательства второй и третьей теорем, заменив S -преобразование полупериодным преобразованием S_1 , а последовательность точек

$$P_0(X_0, Y_0), P_1(X_1, Y_1), P_2(X_2, Y_2), \dots$$

последовательностью

$$P_0(X_0, Y_0), P'(X', Y'), P_1(X_1, Y_1), P_1'(X_1'Y_1'), P_2(X_2, Y_2), \dots$$

в которой каждая последующая точка получается S_1 -преобразованием предыдущей.

Поэтому для симметричного осциллятора выполнены условия (5.1), (5.2) и справедливо следующее предложение.

Теорема 4. Если выполнены условия (A), (B), (5.1), (5.2)

$$g_0 > f_0 \tag{5.13}$$

и существует хотя бы одно ограниченное движение осциллятора, или если выполнены условия (A), (B), (5.1), (5.2), (5.13) и

$$f(y) \rightarrow -\infty \text{ при } y \rightarrow +\infty \tag{5.14}$$

то существует периодическое движение осциллятора (единственное, симметричное и с периодом внешней силы), к которому стремятся при $t \rightarrow +\infty$ все остальные движения.

Таким образом, симметричный осциллятор (т. е. осциллятор с нечетной характеристикой трения при симметричной внешней силе) не может иметь несимметричных периодических движений, но имеет при $g_0 < f_0$ несимметричные состояния покоя.

В заключение первого раздела мы рассмотрим применение общих теорем, доказанных выше, к задаче о вынужденных колебаниях осциллятора с комбинированным трением в случае гармонической внешней силы и линейной вязкой компоненты трения^[1,2,3].

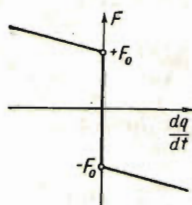
Осциллятор в этой задаче является симметричным и удовлетворяет всем условиям теорем 1 и 4. Поэтому можно утверждать, что при $G_0 \leq F_0$ каждое движение осциллятора заканчивается одним из состояний покоя ($|x| \leq (F_0 - G_0)/k$) и при $G_0 > F_0$ существует единственное (при заданных параметрах системы) периодическое движение осциллятора.¹

Таким образом, доказанные выше теоремы, в особенности теорема 4, полностью доказывают те исходные предположения Ден-Хартога о характере периодического движения при $G_0 > F_0$ (периодическое движение симметрично и его период совпадает с периодом внешней силы), которые сделаны в его работах^[2] и доказывают единственность и устойчивость „в большом“ периодических движений² найденных Ден-Хартогом.

¹ Заметим, что в работах^[2, 3, 4] случай $G_0 \leq F_0$ не рассматривался.

II. Вынужденные колебания осциллятора в случае знакопеременной внешней силы

7. **Постановка задачи.** Во втором разделе будет рассмотрена задача о вынужденных колебаниях осциллятора с комбинированным трением для знакопеременной внешней силы (фиг. 3)



Фиг. 8

$$G(t) = G_0 \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{2\pi t}{T} \right] \quad (7.1)$$

где G_0 — амплитуда внешней силы и T — ее период, $\operatorname{sgn} z = 1$ при $z > 0$, $\operatorname{sgn} z = 0$ при $z = 0$ и $\operatorname{sgn} z = -1$ при $z < 0$. Силы трения F идеализируются в виде комбинации силы вязкого трения, пропорциональной скорости осциллятора, и силы сухого трения F_c (фиг. 8). Обозначим координату осциллятора через q , коэффициент вязкого трения через b и максимальную силу трения покоя через F_0 .

Тогда уравнения осциллятора запишется в виде

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} + kq = F_c \left(q, \frac{dq}{dt}, G(t) \right) + G_0 \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{2\pi t}{T} \right] \quad (7.2)$$

где $m, b, k, G_0 > 0$ и согласно обычной идеализации свойств сил сухого трения

$$F_c \left[q, \frac{dq}{dt}, G(t) \right] = \begin{cases} -F_0 \operatorname{sgn} \frac{dq}{dt} & \text{при } \frac{dq}{dt} \neq 0 \\ -F_0 & \text{при } \frac{dq}{dt} = 0, \quad kq - G(t) < -F_0 \\ kq - G(t) & \text{при } \frac{dq}{dt} = 0, \quad |kq - G(t)| \leq F_0 \\ +F_0 & \text{при } \frac{dq}{dt} = 0, \quad kq - G(t) > F_0 \end{cases} \quad (7.3)$$

Так как координата и скорость осциллятора могут меняться только как непрерывные функции времени, то, как и раньше, мы будем рассматривать только непрерывные решения уравнения движения осциллятора — уравнения (7.2).

Рассматриваемый осциллятор, очевидно, является симметричным и к нему применимы теоремы 1 и 4. Поэтому:

1) при $G_0 \leq F_0$ все движения осциллятора (7.2) заканчиваются одним из состояний покоя; координаты состояний покоя

$$|q| \leq \frac{1}{k} (F_0 - G_0) \quad (7.4)$$

2) при $G_0 > F_0$ существует периодическое движение осциллятора (симметричное, с периодом внешней силы, т. е. T , и единственное для каждой совокупности параметров осциллятора), к которому стремятся при $t \rightarrow +\infty$ все остальные движения осциллятора.

Разделив уравнение (7.2) на F_0 и положив

$$q = \alpha x, \quad \omega t = \tau \quad \left(\alpha = \frac{F_0}{k}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m} \right)^2} \right) \quad (7.5)$$

где ω — частота собственных колебаний без сухого трения, приведем его к следующей системе уравнения (в безразмерной форме):

$$\dot{x} = (1 + \gamma^2)y, \quad \dot{y} = -x - 2\gamma y + f_c(x, y, \tau) + \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right] \quad (7.6)$$

где

$$\gamma = \frac{b}{2m\omega}, \quad \lambda = \frac{G_0}{F_0}, \quad p = \frac{\omega T}{2\pi} \quad (7.7)$$

параметры осциллятора¹ и

$$f_c(x, y, \tau) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} y & \text{при } y \neq 0 \\ -1 & \text{при } y = 0, \quad x - \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right] < -1 \\ x - \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right] & \text{при } y = 0, \quad \left| x - \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right] \right| \leq 1 \\ +1 & \text{при } y = 0, \quad x - \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right] > 1 \end{cases} \quad (7.8)$$

Мы будем полагать сейчас, что ω — действительное число, т. е. что собственные колебания осциллятора (без сухого трения) имеют осцилляторный характер. Это будет, очевидно, при коэффициенте вязкого трения, меньшем „критического“²

$$b < b_{\text{кр}} = 2\sqrt{mk} \quad (7.9)$$

Далее, поскольку движение осциллятора при $G_0 \leq F_0$ ($\lambda \leq 1$) полностью описывается теоремой 1, мы можем ограничиться рассмотрением случая $G_0 > F_0$, т. е. $\lambda > 1$, причем основной интерес будут представлять нахождение и свойства симметричного периодического движения, так как к нему согласно теореме 4 стремится при $t \rightarrow +\infty$ все движение осциллятора.

8. Преобразование S_1 и его неподвижная точка. Для нахождения симметричного периодического движения осциллятора при $\lambda > 1$ нам прежде всего необходимо найти неподвижную точку „полупериодного“ S_1 -преобразования, — преобразования точек (X_0, Y_0) плоскости $\tau = 0$ в точки (X', Y') , где $X' = -(x)_{\tau=p\pi}$, $Y' = -(y)_{\tau=p\pi}$ (укажем, что период внешней силы в единицах безразмерного времени τ равен 2π).

Рассмотрим слой $0 < \tau < p\pi$ фазового пространства $xuy\tau$. Он распадается на три области с различными, но линейными и автономными уравнениями фазовых траекторий, — на полупространства ($y > 0$) и ($y < 0$), в которых система уравнений (7.6) имеет вид

$$\dot{x} = (1 + \gamma^2)y, \quad \dot{y} = -x - 2\gamma y - \operatorname{sgn} y + \lambda \quad (y \neq 0, \quad 0 < \tau < p\pi) \quad (8.1)$$

и плоскость $y = 0$, содержащую полосу застоя $0 < \lambda - 1 \leq x \leq \lambda + 1$.

¹ Параметр p , очевидно, является отношением периода внешней силы к условному периоду осциллятора $2\pi/\omega$. Заметим также, что при увеличении вязкого трения γ увеличивается, но ω и p убывают.

² В § 12 мы рассмотрим случай $b > b_{\text{кр}}$.

Фазовые траектории, приходящиеся на плоскость $y = 0$ в полосе застоя, переходят в фазовые траектории $x = \text{const}$, $y \equiv 0$, лежащие в ней и выходящие в полупространство ($y < 0$) при $\tau = p\pi$. Фазовые траектории, приходящие на плоскость $y = 0$ вне полосы застоя, пересекают эту плоскость и переходят из полупространства ($y < 0$) в полупространство ($y > 0$) при $x > \lambda + 1$ (фиг. 9).

Интегрируя (8.1), мы получим для отрезка фазовой траектории, лежащего целиком в одном из полупространств ($y > 0$) или ($y < 0$):

$$\begin{aligned} x &= 2R'e^{-\gamma(\tau-\varphi)} [\cos(\tau-\varphi) + \gamma \sin(\tau-\varphi)] + \lambda - \text{sgn } y \\ y &= -2R'e^{-\gamma(\tau-\varphi)} \sin(\tau-\varphi) \end{aligned} \quad (8.2)$$

где R' и φ — постоянные интегрирования (параметр фазовой траектории φ может быть выбран общим для всех участков данной фазовой траектории, лежащих в полупространствах ($y < 0$) и ($y > 0$), но вне полосы застоя; уравнениями данной фазовой траектории до и после пересечения этой траектории с плоскостью $y = 0$ будет уравнение (8.2), но с различными значениями параметра R' , подобранными так, чтобы удовлетворить требованию непрерывности фазовых траекторий). Рассмотрим фазовую траекторию

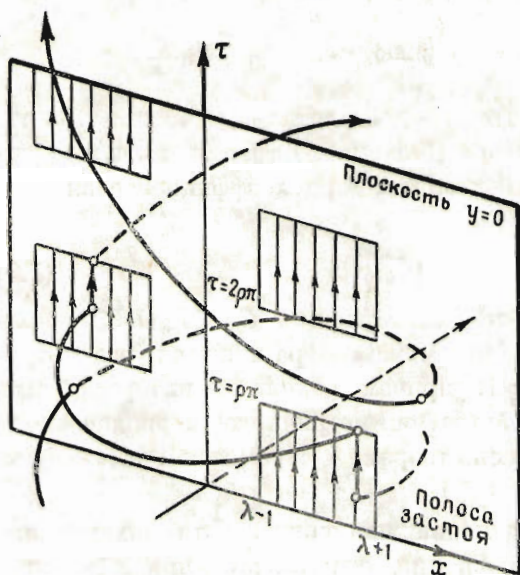
$$\begin{aligned} x &= x(\tau, X_0, Y_0) \\ y &= y(\tau, X_0, Y_0) \end{aligned} \quad (8.3)$$

выходящую из точки (X_0, Y_0) плоскости $\tau = 0$. Выберем значение параметра φ в пределах $0 < \varphi \leq \pi$, тогда согласно (8.2)

$$X_0 = 2Re^{\gamma\varphi} [\cos \varphi - \gamma \sin \varphi] + \lambda - \text{sgn } R, \quad Y_0 = Re^{\gamma\varphi} \sin \varphi \quad (8.4)$$

где R — значение параметра R' для отрезка фазовой траектории, начинающегося в точке $(X_0, Y_0, 0)$ и лежащего в полупространстве ($y > 0$) при $R > 0$ или ($y < 0$) при $R < 0$. Заметим, что совокупность значений параметров R и φ , определенных неравенствами $-\infty < R < \infty$, $0 < \varphi \leq \pi$, дает совокупность всех точек плоскости (X_0, Y_0) ¹.

¹ На плоскости $X_0 Y_0$ линии $R = \text{const}$ — части спиралей с фокусами в точках $(\lambda - 1, 0)$ и $(\lambda + 1, 0)$, линии $\varphi = \text{const}$ — полупрямые, проходящие через те же точки.



Фиг. 9

Пусть фазовая траектория (8.3) при $0 < \tau \leq p\pi$ имеет K точек пересечения с плоскостью $y = 0$. Точки пересечения будут иметь место при

$$\tau = \tau_k - \varphi + (K - 1)\pi \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (8.5)$$

Обозначим через R_k значение параметра R' в уравнении (8.2) для $\tau_k < \tau < \tau_{k+1}$, т. е. для отрезка фазовой траектории (8.3) поле k -й точки пересечения с плоскостью $y = 0$ (но до $k + 1$ -й точки пересечения, если последняя существует). Нетрудно убедиться, что

$$\operatorname{sgn} y(\tau, X_0, Y_0) = (-1)^k \operatorname{sgn} R, \quad R_k = R - r_k \operatorname{sgn} R \quad \text{при } \tau_k < \tau < \tau_{k+1} \quad (8.6)$$

где

$$r_k = \frac{e^{k\delta} - 1}{e^\delta - 1}, \quad \delta = \gamma\pi \quad (8.7)$$

Отметим две рекуррентные формулы для чисел r_k :

$$r_{k+1} = 1 + r_k e^\delta, \quad r_{k+1} = r_k + e^{k\delta} \quad (8.8)$$

Абсцисса k -й точки пересечения фазовой траектории (8.3) с плоскостью $y = 0$, очевидно, равна

$$\begin{aligned} x_k &= 2R_k e^{-(k-1)\delta} (-1)^{k-1} + \lambda - \operatorname{sgn}(y)_{\tau=\tau_k+0} = \\ &= 2[R - r_k \operatorname{sgn} R] (-1)^{k-1} e^{-(k-1)\delta} + (-1)^{k-1} \operatorname{sgn} R + \lambda \end{aligned} \quad (8.9)$$

и

$$|x_k - \lambda| = 1 + 2e^{-(k-1)\delta} [|R| - r_k] \quad (8.10)$$

Тогда, если $|R| > r_k$, то $|x_k - \lambda| > 1$ и фазовая траектория (8.3) при k -м пересечении плоскости $y = 0$ будет переходить из полупространства ($y < 0$) в полупространство ($y > 0$) или в обратном направлении (такие точки пересечения будем называть точками перехода).

Если же $|R| \leq r_k$ то $|x_k - \lambda| \leq 1$ и фазовая траектория при $\tau = \tau_k$ попадает в полосу застоя и затем идет там до $\tau = p\pi$, когда внешняя сила меняет свой знак¹ (соответственно, осциллятор имеет длительную остановку между $\tau = \tau_k$ и $\tau = p\pi$).

Обозначим целую часть ρ через N :

$$N = E(\rho) = E\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) - (N = 0, 1, 2, \dots), \quad \beta = \rho - N \quad (0 \leq \beta < 1) \quad (8.11)$$

Тогда максимально важное число переходов фазовой траектории (8.3) с начальной точкой (8.4) через плоскость $y = 0$ при $0 < \tau \leq p\pi$ равно $N + 1$, если для этой траектории $0 < \varphi < \beta\pi$, и N , если $\beta\pi \leq \varphi < \pi$. Для осуществления этого максимального числа переходов, очевидно, должны выполняться условия: $|R| > r_{N+1}$ в первом случае и $|R| > r_N$ во втором; при невыполнении этих условий фазовая траектория (8.3) после некоторого числа n переходов через плоскость $y = 0$ входит при $\tau = \tau_{n+1} < p\pi$ в полосу застоя.

¹ Не следует забывать, что мы рассматриваем только случай $\lambda > 1$, т. е. $G_0 > F_0$, когда абсциссы полос застоя при $0 < \tau < p\pi$ и $p\pi < \tau < 2p\pi$ не перекрываются и состояний покоя осциллятора не существует.

Таким образом, плоскость начальных точек (X_0, Y_0) разбивается спиралями $|R| = r_n$ и полупрямыми $\varphi = \beta\pi$ на следующие $N + 3$ области начальных точек фазовых траекторий различного типа (фиг. 10):

1) Область (I), в которой $|R| > r_N$, $\beta\pi \leq \varphi \leq \pi$; фазовые траектории, начинающиеся в этой области, делают за полупериод внешней силы N переходов через плоскость $y = 0$, причем ее точка при $\tau = p\pi$ лежит вне полосы застоя.

2) Область (II), в которой $|R| > r_{N+1}$, $0 < \varphi < \beta\pi$; фазовые траектории, выходящие из этой области, делают за полупериод внешней силы $N + 1$ переход через плоскость $y = 0$ и конечная точка (при $\tau = p\pi$) опять лежит вне полосы застоя.

3) Области (n), в которых

$$\begin{aligned} r_n < |R| \leq r_{n+1}, \quad 0 < \varphi \leq \pi & \quad \text{для } n < N \\ r_N < |R| \leq r_{N+1}, \quad 0 < \varphi < \beta\pi & \quad \text{для } n = N \end{aligned} \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

фазовые траектории, начинающиеся в этих областях, после n переходов через плоскость $y = 0$ входят при $\tau = \tau_{n+1}$, т. е. при $n + 1$ -м пересечении с этой плоскостью, в полосу застоя.

Очевидно, если начальная точка (X_0, Y_0) фазовой траектории, соответствующей периодическому движению, лежит в области (I) или (II), то это движение будет движением без длительных остановок (n с N или $N + 1$ мгновенными остановками за полупериод); если же точка (X_0, Y_0) лежит в одной из областей (n), то соответствующее периодическое движение будет движением с одной длительной и n мгновенными остановками. Периодических движений других типов осциллятор в случае знакопеременной внешней силы иметь не может.

Используя (8.2), для $X' = -x(p\pi, X_0, Y_0)$ и $Y' = -y(p\pi, X_0, Y_0)$ получим:

когда начальные точки (X_0, Y_0) в области (I)

$$\begin{aligned} X' = -2(-1)^N [R - r_N \operatorname{sgn} R] e^{\gamma(\varphi - p\pi)} [\cos(\varphi - \beta\pi) - \gamma \sin(\varphi - \beta\pi)] - \\ - \lambda + (-1)^N \operatorname{sgn} R \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$Y' = -2(-1)^N [R - r_N \operatorname{sgn} R] e^{\gamma(\varphi - p\pi)} \sin(\varphi - \beta\pi)$$

когда начальные точки (X_0, Y_0) в области (II)

$$\begin{aligned} X' = -2(-1)^N [R - r_{N+1} \operatorname{sgn} R] e^{\gamma(\varphi - p\pi)} [\cos(\varphi - \beta\pi) - \gamma \sin(\varphi - \beta\pi)] - \\ - \lambda - (-1)^N \operatorname{sgn} R \end{aligned}$$

$$Y' = -2(-1)^N [R - r_{N+1} \operatorname{sgn} R] e^{\gamma(\varphi - p\pi)} \sin(\varphi - \beta\pi) \quad (8.13)$$

когда начальные точки (X_0, Y_0) в областях (n), то согласно (8.9), (8.8)

$$X' = -x_{n+1} = (-1)^{n+1} [2R e^{-n\delta} - (1 + 2r_n e^{-n\delta}) \operatorname{sgn} R] - \lambda \quad (8.14)$$

$$Y' = 0$$

Уравнения (8.4) и (8.12), (8.13), (8.14) и являются уравнениями полупериодного преобразования S_1 , полученными в параметрической форме, параметрами являются R и φ ($-\infty < R < +\infty$, $0 < \varphi \leq \pi$).

Перейдем теперь к нахождению неподвижной точки S_1 -преобразования, т. е. точки (X^*, Y^*) плоскости X_0Y_0 , удовлетворяющей уравнениям

$$X_0 - X' = 0, \quad Y_0 - Y' = 0 \quad (8.15)$$

Согласно теореме 4 такая точка существует и притом единственная (для каждой совокупности параметров $\lambda > 1$, $p > 0$, $\gamma > 0$) и является начальной точкой фазовой траектории, соответствующей единственному симметричному периодическому движению осциллятора.

Для областей (n) ($n = 0, 1, 2, N$)

будет $Y' = 0$ и неподвижная

точка (X^*, Y^*) , если она лежит в одной из них, удовлетворяет уравнениям $Y_0 = 0$, $X_0 - X' = 0$, т. е. ее параметры (R^*, φ^*) определяются соотношениями¹

$$\varphi^* = \pi \quad (8.16)$$

$$2R^*e^\delta + \operatorname{sgn} R^* - 2\lambda + (-1)^{n+1} \{2R^*e^{-n\delta} - (1 + 2r_n e^{-n\delta}) \operatorname{sgn} R^*\} = 0$$

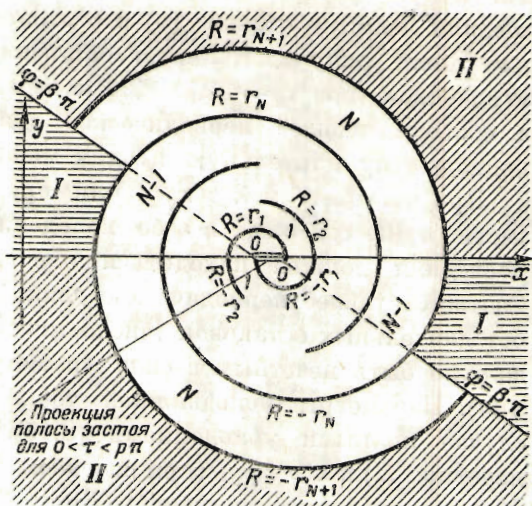
Решая уравнение (8.16), нетрудно убедиться, что неподвижная точка (X^*, Y^*) лежит в области (n) с четным индексом, если $r_{n+1} < \lambda \leq r_{n+2} - 1$, ее параметр

$$R^* = \frac{\lambda e^{n\delta} - r_{n+1}}{e^{(n+1)\delta} - 1} > r_n > 0 \quad (n = 0, 2, 4, \dots) \quad (8.17)$$

и в области (n) с нечетным индексом, если $r_{n+1} - 1 < \lambda \leq r_{n+2}$, параметр неподвижной точки в этом случае

$$R^* = \frac{\lambda e^{n\delta} + r_n}{e^{(n+1)\delta} + 1} > r_n > 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (8.18)$$

Таким образом, значения параметра λ , равные $r_1 - 1$, $r_2 - 1$, r_3 , $r_4 - 1$, r_5 , ..., оказываются критическими; при этих значениях λ происходит переход неподвижной точки S_1 -преобразования из одной



Фиг. 10

¹ Следует помнить, что (n) -области не содержат точек (X_0, Y_0) с $\varphi = 0$; поэтому мы не можем положить $\varphi = 0$. По этой же причине область (N) не может содержать в себе неподвижной точки S_1 -преобразования.

(n)-области в другую, происходит изменение числа мгновенных остановок за полупериод в симметричном периодическом движении осциллятора с одной длительной остановкой за полупериод внешней силы. Так например, при $r_1 = 1 < \lambda \leq r_2 - 1$ неподвижная точка S_1 -преобразования лежит в области (0) и соответствующее периодическое движение имеет одну длительную остановку за полупериод и ни одной мгновенной, при $r_2 - 1 < \lambda \leq r_3$ неподвижная точка лежит в области (1), а соответствующее периодическое движение имеет за каждый полупериод одну длительную и одну мгновенную остановку, и т. д.

При четном N и $\lambda > r_{N+1}$ или при нечетном N и $\lambda > r_{N+1} - 1$ области (n) не содержат в себе неподвижной точки S_1 -преобразования и последняя должна находиться или в области (I) или в области (II). Соответствующее периодическое движение будет, очевидно, движением без длительных остановок (число мгновенных остановок за полупериод должно быть нечетным в силу симметричности периодического движения). Параметры неподвижной точки (R^*, φ^*) определяются в этом случае полными уравнениями (8.15). Очевидно, для $\lambda > r_{N+1}$ (при нечетном N) и $\lambda > r_{N+1}$ (при четном N) неподвижная точка S_1 -преобразования лежит на кривой (L):

$$L(R, \varphi) = \frac{1}{2} (Y_0 - Y') e^{-\gamma \varphi} = 0 \quad (8.19)$$

В области (1) уравнение (L)-кривой записывается в виде

$$|R| \sin \varphi + (-1)^N \{ |R| - r_N \} e^{-\beta \varphi} \sin(\varphi - \beta \pi) = 0 \quad (8.20)$$

Так как в этой области $\sin \varphi \geq 0$, $\sin(\varphi - \beta \pi) \geq 0$ и $|R| \geq r_N$, то кривая (L) проходит в ней только при $N = 1, 3, 5, \dots$ ($0 \leq \beta \leq 1$).

Решая (8.20) относительно $|R|$, имеем

$$\frac{|R|}{r_N} = \frac{\sin(\varphi - \beta \pi)}{\sin(\varphi - \beta \pi) - e^{\delta \varphi} \sin \varphi} \quad (8.21)$$

и кривая (L) существует только при $\sin(\varphi - \beta \pi) - e^{\delta \varphi} \sin \varphi > 0$, т. е. при $\varphi_1 < \varphi \leq \pi$, причем φ_1 ($\varphi_1 > \beta \pi$) есть корень уравнения

$$\sin(\varphi - \beta \pi) - e^{\delta \varphi} \sin \varphi = 0 \quad (8.22)$$

Очевидно, на этой кривой (L) модуль R меняется непрерывно от r_N при $\varphi = \pi$ до $+\infty$ при $\varphi \rightarrow \varphi_1$. Неподвижной точкой S_1 -преобразования будет та точка кривой (L), в которой согласно первому уравнению (8.15)

$$R e^{\gamma \varphi} [\cos \varphi - \gamma \sin \varphi] - [R - r_N \operatorname{sgn} R] e^{\gamma(\varphi - \beta \pi)} \{ \cos(\varphi - \beta \pi) - \gamma \sin(\varphi - \beta \pi) \} + \lambda = 0$$

или, учитывая (8.19):

$$U(R, \varphi) = R e^{\gamma \varphi} \cos \varphi - [R - r_N \operatorname{sgn} R] e^{\gamma(\varphi - \beta \pi)} \cos(\varphi - \beta \pi) = -\lambda \quad (8.23)$$

Нетрудно убедиться, что на части (L)-кривой, лежащей в верхней полуплоскости XY ($e R > r_N$), функция $U(R, \varphi)$ меняется от $-(r_{N+1} - 1)$ при $\varphi = \pi$ до $-\infty$ при $\varphi \rightarrow \varphi_1$ и притом непрерывно. Следовательно,

на этой части (L)-кривой при $N = 1, 3, 5, \dots$, $0 \leq \beta \leq 1$ и $\lambda > r_{N+1} - 1$ лежит неподвижная точка S_1 -преобразования. Ее параметры (R^*, φ^*) определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} R^* \sin \varphi^* - (R^* - r_N) e^{-p\delta} \sin(\varphi^* - \beta\pi) &= 0 \\ e^{\gamma\varphi^*} [R^* \cos \varphi^* - (R^* - r_N) e^{-p\delta} \cos(\varphi^* - \beta\pi)] &= -\lambda \end{aligned} \quad (8.24)$$

Так как неподвижная точка S_1 -преобразования единственная (для каждой совокупности параметров λ, p, γ ; $\lambda > 1$), то решение системы (8.24) единственно и ни ветвь кривой (L), лежащая в нижней полуплоскости ($R < -r_N$), ни область (II) не могут содержать неподвижных точек S_1 -преобразования при $N = 1, 3, 5, \dots$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

При $N = 0, 2, 4, \dots$ и $\lambda > r_{N+1}$ область (I) не содержит в себе кривой (L) и, следовательно, неподвижной точки S_1 -преобразования, поэтому при $\lambda > r_{N+1}$ и $N = 0, 2, 4, \dots$, $0 < \beta < 1$, когда неподвижную точку не содержат и области (n), эта точка лежит в области (II). Аналогичным путем, как и в случае $N = 1, 3, 5, \dots$, $0 \leq \beta \leq 1$, можно показать, что при $N = 0, 2, 4, \dots$, $0 < \beta < 1$ и $\lambda > r_{N+1}$ неподвижная точка S_1 -преобразования лежит в той части области (II), которая находится в нижней полуплоскости XY ($R < -r_{N+1}$), и ее параметры (R^*, φ^*) определяются единственным образом системой уравнений

$$\begin{aligned} R^* \sin \varphi^* + (R^* + r_{N+1}) e^{-p\delta} \sin(\varphi^* - \beta\pi) &= 0 \\ e^{\gamma\varphi^*} [R^* \cos \varphi^* + (R^* + r_{N+1}) e^{-p\delta} \cos(\varphi^* - \beta\pi)] &= -\lambda \end{aligned} \quad (8.25)$$

Обе системы уравнений, определяющие параметры неподвижной точки в области (I) и (II), — системы уравнений (8.24) и (8.25), — сводятся к одной системе

$$\begin{aligned} \rho \sin \vartheta + (\rho - 1) e^{-p\delta} \sin(\vartheta - p\pi) &= 0 \\ e^{\gamma\vartheta} [\rho \cos \vartheta + (\rho - 1) e^{-p\delta} \cos(\vartheta - p\pi)] &= \Lambda \end{aligned} \quad (8.26)$$

где для области (I)

$$\rho = \frac{R^*}{r_N}, \quad \vartheta = \varphi^* - \pi, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{r_{N+1} - 1} \quad \left(\begin{array}{l} N = 1, 3, 5, \dots; 0 \leq \beta \leq 1 \\ \rho > 1; \Lambda > 1, -\pi \leq \vartheta \leq 0 \end{array} \right) \quad (8.27)$$

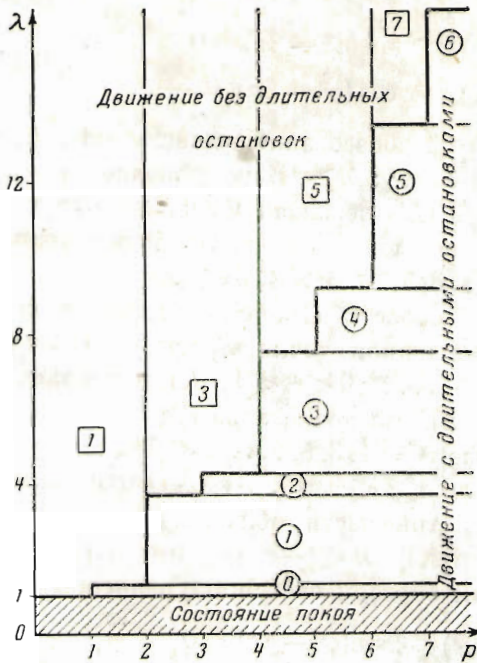
и для области (II)

$$\rho = -\frac{R^*}{r_{N+1}}, \quad \vartheta = \varphi^*, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{r_{N+1}} \quad \left(\begin{array}{l} N = 0, 2, 4, \dots; 0 < \beta < 1 \\ \rho > 1, \Lambda > 1; 0 < \vartheta < \pi \end{array} \right) \quad (8.28)$$

9. Пространство параметров. Зависимость типа вынужденных колебаний от параметров осциллятора можно наглядно иллюстрировать разбиением пространства этих параметров на области, которым соответствуют различные типы вынужденных колебаний. Уравнения границ этих областей при $b < b_{кр} = 2\sqrt{mk}$, очевидно, даются выражениями $\lambda = r_{2s+1}, r_{2s+2} - 1$ и

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} r_{N+1} & \text{при четном } N \\ r_{N+1} - 1 & \text{при нечетном } N \end{cases}$$

На фиг. 11 дано разбиение плоскости параметров p и λ при $\delta = 0.2$ ($h = b/b_{кр} = 0,062$) на области различных типов вынужденных колебаний (цифры в кружках и квадратах указывают число мгновенных остановок за каждый полу- период внешней силы). Разбие- ние плоскости p, λ при других значениях δ (или γ) качественно совпадает с разбиением, изобра- женным на фиг. 11. Фиг. 12 и 13 иллюстрируют возможные типы вынужденных колебаний. На них изображены проекции на плос- кость xu фазовых траекторий, соответствующих периодическим движениям осциллятора с дли- тельными остановками (фиг. 12, $n = 0, 1, 2$) и движениям без дли- тельных остановок (фиг. 13, $N = 0, 1, 2$)¹.



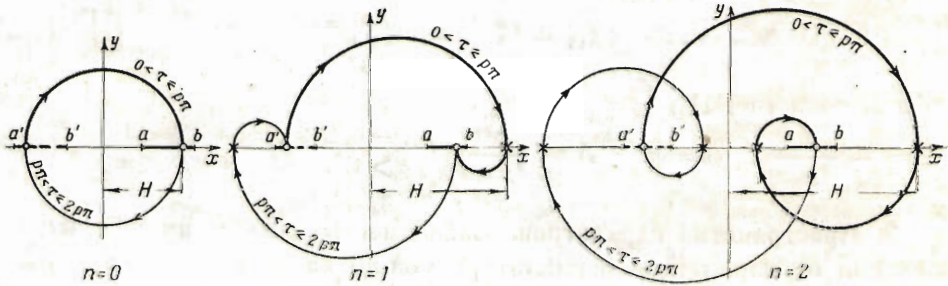
Фиг. 11

На фиг. 14 изображено раз- биеение пространства параметров осциллятора на области различ- ных периодических движений,

причем для придания большей наглядности этому разбиению в каче- стве параметров осциллятора выбраны

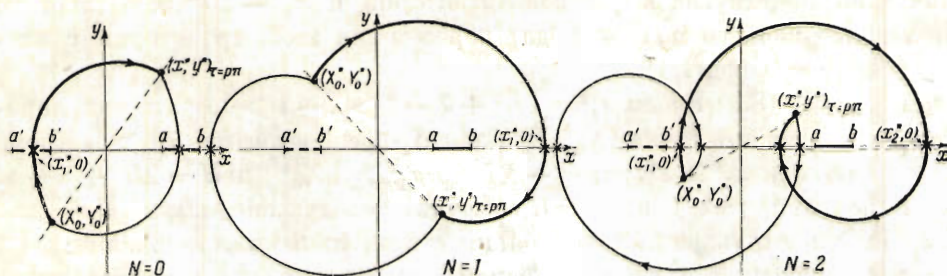
$$\sigma = \frac{1}{\lambda}, \quad h = \frac{b}{b_{кр}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \quad (9.1)$$

Особо выделена поверхность, разделяющая области, соответствующие движениям без длительных остановок, и области, соответствующие



Фиг. 12

¹ На фиг. 12 и 13 кружками отмечены длительные остановки и крестиками — мгновенные. Толстыми линиями изображены пресечения фазовых траекторий в первый полупериод $0 < \tau < \pi$. Отрезки ab и $a'b'$ на осях x изображают проекции полюсы застоя для первого ($0 < \tau < \pi$) и второго ($\pi < \tau < 2\pi$) полупериодов.

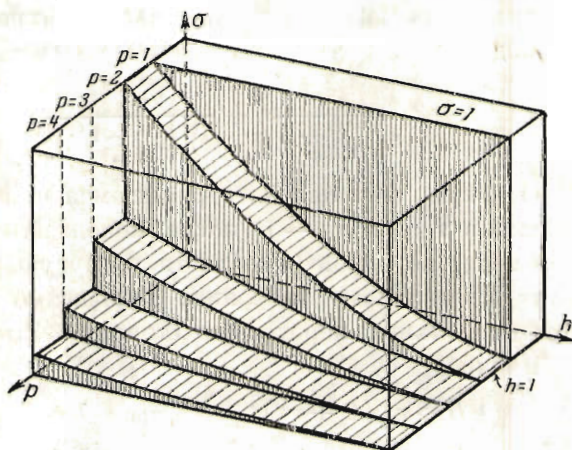


Фиг. 13

движениям с длительными остановками. При совокупностях параметров (h, p, σ) , изображаемых точками за этой поверхностью, осциллятор имеет периодические движения без длительных остановок.

Если же точка (h, p, σ) лежит перед этой поверхностью, то вынужденные колебания будут движениями с одной длительной остановкой за каждый полупериод внешней силы.

Наконец, в области над плоскостью $\sigma = 1$ и на ней, т. е. при $\lambda \leq 1$, все движения осциллятора заканчиваются каким-либо состоянием покоя¹.



Фиг. 14

10. Амплитуда вынужденных колебаний. Подсчитаем амплитуду вынужденных колебаний осциллятора²

$$H = \max |x^*(\tau)| = \frac{\max |q|}{F_0/k} \quad (10.4)$$

т. е. отношение амплитуды свободной координаты осциллятора q (после установления периодического движения осциллятора) к половине длины полосы застоя при отсутствии внешней силы F_0/k . В силу симметричности периодического движения $x^*(\tau)$ будет принимать амплитудное значение и в течение первого полупериода $0 < \tau \leq p\pi$.

Для периодического движения с длительными остановками $0 < X_0^* < x^*(\tau) \leq x_1^*$ при $0 < \tau \leq p\pi$, где X_0^* — абсцисса начальной

¹ В § 12 мы рассмотрим случай $b > b_{кр}$. Там будет показано, что при $\lambda \leq 1$ движения осциллятора заканчиваются состояниями покоя и $\lambda > 1$ — симметричным периодическим движением без длительных и с одной мгновенной остановкой (за каждый полупериод).

² Здесь и ниже звездочкой наверху отмечаются величины, относящиеся к рассматриваемому периодическому и симметричному движению $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$.

точки соответствующей фазовой траектории и x_1^* — абсцисса первого (в течение первого полупериода) пересечения этой траектории с плоскостью $y = 0$ (фиг. 12).

Согласно (8.9) имеем $x_1^* = 2R^* + \lambda - 1 > \lambda - 1 > 0$, так как параметр неподвижной точки (X_0^*, Y_0^*) для S_1 -преобразования $R^* > 1$. Кроме того, так как $x_1^* \geq x^*(p\pi) = -X_0$, то $x_1^* \geq |X_0^*|$ и $H = 2R^* + \lambda - 1$.

Используя (8.17) и (8.18), получим следующие выражения для амплитуды вынужденных колебаний с длительными остановками:

для движений с четным числом мгновенных остановок за полупериод

$$H = \lambda \left\{ 1 + 2 \frac{e^{n\delta}}{e^{(n+1)\delta} - 1} \right\} - \frac{e^\delta + 1}{e^\delta - 1} \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 2, 4, \dots \\ r_{n+1} < \lambda \leq r_{n+2} - 1 \end{array} \right) \quad (10.2)$$

для движений с нечетным числом мгновенных остановок за полупериод

$$H = \lambda \left\{ 1 + 2 \frac{e^{n\delta}}{e^{(n+1)\delta} + 1} \right\} + \frac{2r_n}{e^{(n+1)\delta} + 1} - 1 \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 3, 5, \dots \\ r_{n+1} - 1 < \lambda \leq r_{n+2} \end{array} \right) \quad (10.3)$$

Отметим, что при λ , стремящемся к какому-либо из критических значений r_{2s+1} и $r_{2s} - 1$, когда неподвижная точка S -преобразования переходит из одной (n)-области в другую, H стремится к определенному предельному значению, независимо от того, как совершается этот предельный переход (со стороны больших и меньших значений λ).

Именно,

$$\begin{aligned} H &\rightarrow r_{2s} (2 + e^\delta) && \text{при } \lambda \rightarrow r_{2s+1} && (s = 0, 1, 2, \dots) \\ H &\rightarrow r_{2s-1} (2 + e^\delta) - 1 && \text{при } \lambda \rightarrow r_{2s} - 1 && (s = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (10.4)$$

Отметим также, что амплитуда вынужденных колебаний с длительными остановками не зависит от периода внешней силы (в формулы (10.2) и (10.3) p не входит).

Обратимся теперь к подсчету амплитуды вынужденных колебаний без длительных остановок, когда начальная точка (X_0^*, Y_0^*) фазовой траектории $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$, — неподвижная точка S -преобразования лежит или в области (I) или в области (II). В силу симметричности периодического движения фазовая траектория $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ пересекает плоскость $y = 0$ нечетное число раз при $(0 < \tau \leq p\pi)$, т. е. периодическое движение без длительных остановок имеет нечетное число мгновенных остановок за каждый полупериод.

Нетрудно убедиться, что в том случае, когда при $0 < \tau \leq p\pi$ имеются точки пересечения фазовой траектории $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ с плоскостью $y = 0$ справа от полосы застоя, абсцисса первой такой точки пересечения будет амплитудным значением H . Если же такого пересечения не существует (это будет при $N = 0$ и $0 \leq \beta < 1$, т. е. при $p < 1$ — фиг. 13), то амплитудное значение $x^*(\tau)$ равно $|x_1^*|$, где x_1^* — абсцисса первой и единственной точки пересечения плоскости

$y = 0$ фазовой траекторией $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ при $0 < \tau \leq p\pi$ (эта точка будет лежать слева от полосы застоя, более того, $x_1^* < 0$)¹. Поэтому для $N = 0$ и $0 \leq \beta < 1$ имеем $H = -x_1^*$, для $N = 1, 3, 5, \dots$ и $0 \leq \beta < 1$ имеем $H = x_1^*$ и для $N = 2, 4, 6, \dots$ и $0 \leq \beta < 1$ имеем $H = x_2^*$, где x_2^* — абсцисса второй точки пересечения рассматриваемой фазовой траектории с плоскостью $y = 0$ (в последнем случае точка первого пересечения лежит слева от полосы застоя). Используя (8.27) и (8.28), получим²

$$H = 2\rho - (\lambda + 1) \quad \text{при } N = 0, \quad 0 \leq \beta < 1 \quad (10.5)$$

$$H = 2r_N \rho + \lambda - 1 \quad \text{при } N = 1, 3, \dots, 0 \leq \beta < 1 \quad (10.6)$$

$$H = 2e^{-\delta}(r_{N+1} \rho - 1) + \lambda - 1 \quad \text{при } N = 2, 4, \dots, 0 \leq \beta < 1 \quad (10.7)$$

11. Резонансные кривые. Соотношения (8.17), (8.18) и (10.5), (10.6), (10.7) совместно с системой уравнений (8.26) дают возможность построить резонансные кривые, — кривые, выражающие зависимость амплитуды вынужденных колебаний H от периода внешней силы (от параметра p) при фиксированных значениях параметров λ и γ . Соотношения (8.17) и (8.18) дают уравнения тех частей резонансных кривых, которые соответствуют периодическим движениям с длительными остановками. Эти части резонансных кривых, очевидно, изображаются горизонтальными прямыми, так как амплитуда вынужденных колебаний с длительными остановками, как уже указывалось выше, при фиксированных λ и γ не зависит от периода внешней силы. Для периодических движений без длительных остановок уравнения резонансных кривых получаются из (10.5), (10.6) (10.7), если в них подставить решение ρ системы трансцендентных уравнений (8.26).

Вычислив на основании соотношений (8.26), (10.5) (10.6), (10.7) производную $\partial H / \partial p$, а также H при $p = N$ (N — любое целое число) и $p \rightarrow N$, нетрудно показать, что:

1) резонансные кривые для движений без длительных остановок непрерывны и дифференцируемы при любых p и в том числе при $p = 0, 1, 2, \dots$;

2) при $N < p < N + 1$ имеем $\partial H / \partial p > 0$, если $N = 0, 2, 4, \dots$, и $\partial H / \partial p < 0$, если $N = 1, 3, 5, \dots$;

3) при $p = 0, 1, 2, \dots$ имеем $\partial H / \partial p = 0$ и, следовательно, резонансные кривые для движений без длительных остановок имеют максимумы при $p = 1, 3, 5, \dots$ и минимумы при $p = 0, 2, 4, \dots$. Максимальные (резонансные) значения амплитуды вынужденных колебаний и, в

¹ При $N = 0$ будет $R^* = -\rho < 0$ и начальная точка (X_0^*, Y_0^*) лежит в нижней полуплоскости. Поэтому $x_1^* < X_0^*$ и $x^*(p\pi) = -X_0^* > x_1^*$. Складывая эти неравенства, мы получим $x_1^* < 0$.

² Второе (в первом полупериоде) пересечение фазовой траектории $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ происходит при $\tau = \pi + \varphi$ и согласно (8.2) $x_2^* = -R_1 e^{-\delta} + \lambda - 1$ (при $N = 2, 4, \dots$). Подставив $R_1 = R + 1$ (следует учесть, что при $N = 2, 4, \dots$ $R^* < 0$) и $R^* = -r_{N+1} \rho$, мы и получим выражение (10.7).

частности, наибольшая из них — амплитуда первого резонанса ($p = 1$) — соответственно будут

$$H_{\max} = \lambda \left\{ 1 + \frac{2e^{(p-1)\delta}}{e^{p\delta} - 1} \right\} - \frac{e^\delta + 1}{e^\delta - 1}, \quad H_{\max \max} = (\lambda - 1) \frac{e^\delta + 1}{e^\delta - 1} \quad (11.1)$$

Минимальные значения амплитуды, как нетрудно убедиться, равны

$$(H_{\min})_{p=0} = 0, \quad (H_{\min})_{p=2, 4, \dots} = \lambda \left\{ 1 + \frac{2e^{(p-1)\delta}}{e^{p\delta} + 1} \right\} + \frac{2r_{p-1}}{e^{p\delta} + 1} - 1 \quad (11.2)$$

Из формул (11.1) и (11.2) видно, что с ростом p ($p = 0, 1, 2, \dots$) максимальные значения амплитуды H (при нечетных p) убывают, а минимальные (при четных p) возрастают¹.

Заметив, что выражения (11.1) и (11.2), дающие значения амплитуды вынужденных колебаний без длительных остановок, при $p = 1, 3, 5, \dots$ и $p = 0, 2, 4, \dots$ совпадают соответственно с (10.2) и (10.3), мы можем утверждать также, что резонансные кривые для вынужденных колебаний без длительных остановок переходят при $p = 1, 2, \dots$ и соответствующих значениях λ непрерывным образом в резонансные кривые для вынужденных колебаний с длительными остановками, — в прямые (10.2), (10.3). Напомним, что этот переход в согласии с (8.17) и (8.18), очевидно, происходит на отрезках

$$\begin{aligned} (p = 2s - 1, r_{2s-1} < \lambda \leq r_{2s} - 1) \\ (p = 2s, r_{2s} - 1 < \lambda \leq r_{2s+1}) \end{aligned} \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (11.3)$$

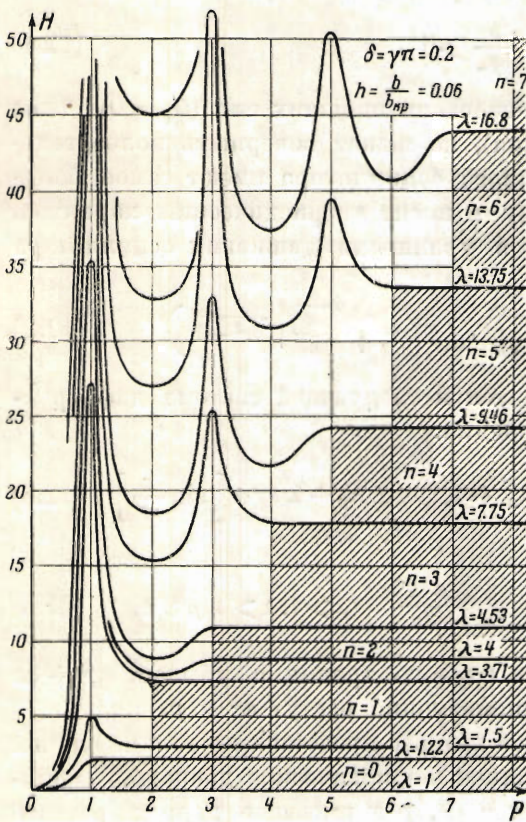
так как такому переходу соответствует переход неподвижной точки S -преобразования (X^*, Y^*) из области (I) или (II) в области $(p - 1)$.

Таким образом, наличие кулоновского трения, несмотря на его нелинейность, не дает новых резонансных частот: резонанс (максимум амплитуды вынужденных колебаний) имеет место только при $p = 1, 3, 5, \dots$, т. е. только при совпадении собственной частоты осциллятора с частотой одной из гармоник внешней силы (7.1). Далее, одно кулоновское трение (при отсутствии сил вязкого трения) не может обеспечить ограниченность амплитуды при резонансе ($p = 1, 3, 5, \dots$), если амплитуда внешней силы достаточно велика, так как резонансные амплитуды вынужденных колебаний без длительных остановок (при $p = 1, 3, 5, \dots$) стремятся к бесконечности при $\delta \rightarrow 0$, т. е. при исчезновении сил вязкого трения. Заметив, что при $\delta \rightarrow 0$ согласно (8.7) $r_n \rightarrow n$, мы можем утверждать, что при отсутствии вязкого трения и $p = 1, 3, 5, \dots$ размах колебаний неограниченно нарастает, если $\lambda = G_0 / F_0 > p$, и остается ограниченным при $\lambda \leq p$

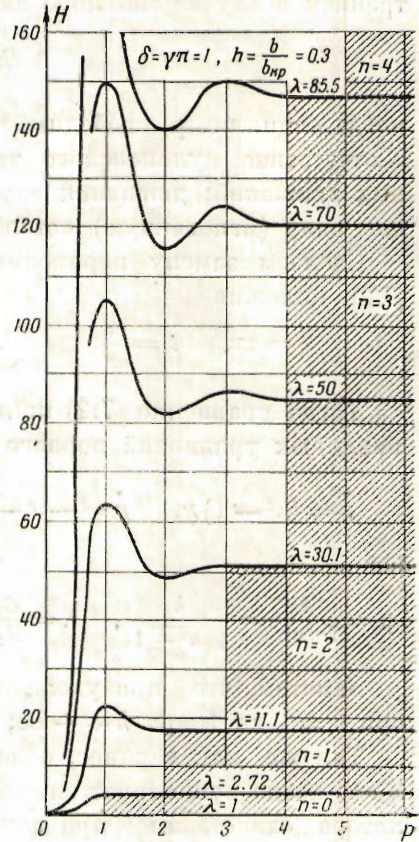
¹ Наличие минимумов амплитуды H при $p = 2, 4, 6, \dots$, а также уменьшение резонансных амплитуд H_{\max} с ростом p обусловлено в первую очередь спектром знакопеременной внешней силы (7.1); амплитуды ее четных гармоник равны нулю, а амплитуды нечетных гармоник $G_n = G_0 \cdot 4 / \pi n$ ($n = 1, 3, 5, \dots$), т. е. убывают с увеличением номера гармоники.

(в последнем случае вынужденные колебания будут иметь длительные остановки). Это заключение находится в полном согласии с теоремами Циглера [6] об ограниченности размаха вынужденных колебаний осциллятора с одним кулоновским трением.

Основная трудность при построении резонансных кривых $H = H(p, \lambda, \gamma)$ состоит в решении системы (8.26) при $p' \neq 0, 1, 2, \dots$



Фиг. 15



Фиг. 16

Можно предложить следующий, сравнительно простой параметрический способ решения этой системы уравнений. Разрешим первое уравнение (8.26) относительно ρ . Имеем

$$\rho = \frac{\sin(p\pi - \vartheta)}{\sin(p\pi - \vartheta) - e^{p^3} \sin \vartheta} \tag{11.4}$$

Тогда из второго уравнения (8.26) следует

$$\Lambda = \frac{\sin p\pi}{\sin(p\pi - \vartheta) - e^{p^3} \sin \vartheta} \exp \frac{\delta \vartheta}{\pi} \tag{11.5}$$

Полученные соотношения (11.4) и (11.5) и дают решения системы уравнений (8.26) в параметрической форме (через параметр ϑ). Построив кривые (11.5), по заданным ρ, Λ, δ находим ϑ и затем из (11.4) можно

определить ρ . При построении семейства кривых (11.6) параметр ϑ следует менять¹ в такой области около $\vartheta = 0$, для которой $1 < \rho$, $\Delta < +\infty$. Именно таким путем были построены резонансные кривые на фиг. 15 и 16.

12. Вынужденные колебания осциллятора в аperiodическом режиме. Рассмотрим вынужденные колебания осциллятора с комбинированным трением в случае сильного вязкого трения, т. е. при

$$h = \frac{b}{b_{кр}} > 1 \quad (12.1)$$

когда осциллятор, свободный от действия внешних сил ($G_0 = 0$) (даже в отсутствие кулоновского трения), не может совершать колебательных движений; движения свободного осциллятора имеют самое большее одну (мгновенную) остановку и носят аperiodический характер.

Сделаем замену переменных в уравнении движения осциллятора (7.2), положив

$$q = \alpha x, \quad t = \frac{\tau}{\omega^*} \quad \left(\alpha = \frac{F_0}{k}, \quad \omega^* = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{h^2 - 1} \right) \quad (12.2)$$

Тогда уравнение (7.2) приводится к следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = (\mu^2 - 1)y, \quad \dot{y} = -x - 2\mu y + f_c(x, y, \tau) + \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right] \quad (12.3)$$

где

$$\mu = \frac{b}{2m\omega^*} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}}, \quad \lambda = \frac{G_0}{F_0}, \quad p = \frac{\omega^* T}{2\pi} \quad (\mu > 1, \lambda > 0, p > 0) \quad (12.4)$$

Заметим, что при увеличении вязкого трения μ убывает от $+\infty$ при $h=1$ до 1 при $h \rightarrow +\infty$; одновременно растут ω^* и p .

Так же как и ранее, основной интерес представляет только случай $\lambda > 1$, когда существует симметричное периодическое движение осциллятора (единственное при данных μ , λ , p и имеющее период, равный периоду внешней силы), к которому стремятся все остальные движения при $t \rightarrow +\infty$. При $\lambda \leq 1$ все движения осциллятора заканчиваются каким-либо состоянием покоя $|x| \leq 1 - \lambda$.

Для нахождения периодического симметричного движения осциллятора при $\lambda > 1$ нам прежде всего необходимо найти неподвижную точку S_1 -преобразования, — преобразования (X_0, Y_0) в (X', Y') , где, как и ранее:

$$X_0 = (x)_{\tau=0}, \quad X' = -(x)_{\tau=p\pi}, \quad Y_0 = (y)_{\tau=0}, \quad Y' = -(y)_{\tau=p\pi} \quad (12.5)$$

¹ Параметр ϑ следует менять в интервалах $(0, \vartheta_1)$ при $N = 0, 2, 4, \dots$ и $(\vartheta_1, 0)$ при $N = 1, 3, 5, \dots$, где ϑ_1 — значение параметра ϑ , при котором обращаются в нуль знаменатели в выражениях (11.4) и (11.5), т. е.

$$\vartheta_1 = \arctg \frac{\sin p\pi}{\cos p\pi + ep^2}$$

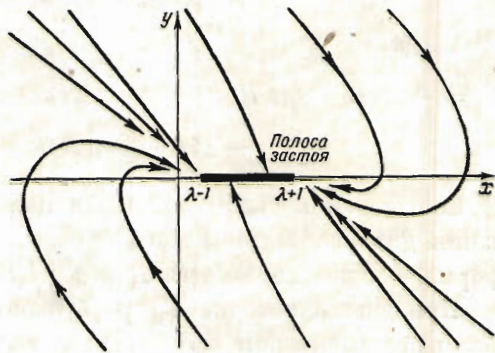
При $0 < \tau < p\pi$ и $y \neq 0$ система уравнений (12.4) имеет вид

$$\dot{x} = (\mu^2 - 1)y, \quad \dot{y} = -x - 2\mu y - \operatorname{sgn} y + \lambda \quad (12.6)$$

и ее решением для каждого из полупространств ($y > 0$) и ($y < 0$) в отдельности является

$$\begin{aligned} x &= -a(\mu - 1)e^{-(\mu+1)\tau} - b(\mu + 1)e^{-(\mu-1)\tau} + \lambda - \operatorname{sgn} y \\ y &= ae^{-(\mu+1)\tau} + be^{-(\mu-1)\tau} \end{aligned} \quad (12.7)$$

(a и b — постоянные интегрирования), т. е. проекции фазовых траекторий системы (12.5) на плоскость x, y при $0 < \tau < p\pi$ имеют в каждом полупространстве ($y > 0$) и ($y < 0$) тот же вид, что и фазовые траектории свободного осциллятора без кулоновского трения в аperiodическом режиме, но с смещенными из начала координат узлами (в точку $(\lambda + 1, 0)$ для верхнего полупространства ($y > 0$) и в точку $(\lambda - 1, 0)$ для нижнего). Они изображены на фиг. 17.



Фиг. 17

Как известно [8], фазовые траектории обычного линейного осциллятора в аperiodическом режиме могут пересекать ось $y = 0$ самое большее один раз (при конечном t). Поэтому периодические движения осциллятора с комбинированным трением в рассматриваемом случае могут быть только движениями без длительных остановок и с одной мгновенной в течение каждого полупериода (доказательство дано ниже).

Очевидно, при отыскании периодического движения (без длительных остановок) нас могут интересовать только те фазовые траектории (12.9), которые пересекают плоскость $y = 0$ при $0 < \tau < p\pi$. Уравнения таких фазовых траекторий будут

$$\begin{aligned} x &= -2Re^{-\mu(\tau-\varphi)} \{ \operatorname{ch}(\tau-\varphi) - \mu \operatorname{sh}(\tau-\varphi) \} + \lambda - \operatorname{sgn} y \\ y &= +2Re^{-\mu(\tau-\varphi)} \operatorname{sh}(\tau-\varphi) \end{aligned} \quad (12.8)$$

где R и φ — постоянные интегрирования ($-\infty < R < +\infty, 0 < \varphi < p\pi$).

Координаты начальной точки фазовой траектории (12.8), очевидно, равны

$$\begin{aligned} X_0 &= -2Re^{\mu\varphi} \{ \operatorname{ch} \varphi + \mu \operatorname{sh} \varphi \} + \lambda + \operatorname{sgn} R \\ Y_0 &= -2Re^{\mu\varphi} \operatorname{sh} \varphi \end{aligned} \quad (12.9)$$

При $\tau = \varphi$ фазовая траектория (12.8) попадает на плоскость $y = 0$ в точке с абсциссой $x = -2R + \lambda + \operatorname{sgn} R$. Если $|R| \leq 1$, то она

входит в полосу застоя. При $|R| > 1$ фазовая траектория (12.8) пересечет (при $\tau = \varphi$) плоскость $y = 0$; при этом переходе мы должны заменить параметр R фазовой траектории на новое значение R_1 , причем так, чтобы x и y были непрерывными функциями времени и при $\tau = \varphi$. Это новое значение, как нетрудно видеть, определяется соотношением

$$R_1 = R - \operatorname{sgn} R \quad (12.10)$$

и уравнение фазовой траектории с начальной точкой (12.9) при $\varphi < \tau < p\pi$ записывается в виде

$$\begin{aligned} x &= -2(R - \operatorname{sgn} R) e^{-\mu(\tau - \varphi)} \{ \operatorname{ch}(\tau - \varphi) - \mu \operatorname{sh}(\tau - \varphi) \} + \lambda - \operatorname{sgn} R \\ y &= +2(R - \operatorname{sgn} R) e^{-\mu(\tau - \varphi)} \operatorname{sh}(\tau - \varphi) \end{aligned} \quad (12.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} X' &= +2(R - \operatorname{sgn} R) e^{-\mu(p\pi - \varphi)} \{ \operatorname{ch}(p\pi - \varphi) - \mu \operatorname{sh}(p\pi - \varphi) \} - \lambda + \operatorname{sgn} R \\ Y' &= -2(R - \operatorname{sgn} R) e^{-\mu(p\pi - \varphi)} \operatorname{sh}(p\pi - \varphi) \end{aligned} \quad (12.12)$$

Соотношения (12.9), (12.12) и являются уравнениями S_1 -преобразования для рассматриваемого случая, выраженными в параметрической форме, — через параметры R и φ ($|R| > 1$, $0 < \varphi < p\pi$).

Неподвижная точка S_1 -преобразования — начальная точка (X_0^*, Y_0^*) фазовой траектории $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$, соответствующей симметричному периодическому движению¹, — определяется уравнениями

$$X' - X_0 = 0, \quad Y' - Y_0 = 0 \quad (12.13)$$

или

$$\begin{aligned} e^{\mu\varphi} [R \operatorname{ch} \varphi + (R - \operatorname{sgn} R) e^{-\mu p\pi} \operatorname{ch}(p\pi - \varphi)] &= \lambda \\ R \operatorname{sh} \varphi - (R - \operatorname{sgn} R) e^{-\mu p\pi} \operatorname{sh}(p\pi - \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (12.14)$$

Нетрудно показать (тем же способом, что в § 8), что эта система уравнений имеет решение при любом $\lambda > 1$, причем определяемые ею параметры неподвижной точки

$$R^* > 1, \quad 0 < \varphi^* < \varphi_1 \quad (12.15)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \log \frac{1 + e^{-(\mu-1)p\pi}}{1 + e^{-(\mu+1)p\pi}} < p\pi$$

Согласно общей теории, развитой в первом разделе, неподвижная точка (X_0^*, Y_0^*) , определяемая по R^* , φ^* соотношениями (12.9), является единственной для каждой совокупности параметров осциллятора (p, λ, μ) . Следовательно, во-первых, параметры R^* , φ^* опреде-

¹ Здесь, как и ранее, звездочкой наверху отмечаются величины, относящиеся к рассматриваемому симметричному периодическому движению $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$.

ляются системой (12.14) единственным образом и, во-вторых, периодическое движение осциллятора, единственное для каждой совокупности параметров осциллятора, является движением без длительных остановок и с одной мгновенной остановкой (за каждый полупериод внешней силы), так как соответствующая фазовая траектория $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$, начинающаяся в точке (X_0^*, Y_0^*) ($\tau = 0$), не попадает в полосу застоя, так как $R^* > 1$, и пересекает плоскость $y = 0$ один раз в течение первого полупериода (при $\tau = \varphi^*$).

Разрешив систему (12.14) относительно R^* и λ , мы получим решение этой системы в параметрической форме (через параметр φ^*):

$$\lambda = \frac{e^{\mu\varphi^*} \operatorname{sh} p\pi}{\operatorname{sh}(p\pi - \varphi^*) - e^{\mu p\pi} \operatorname{sh} \varphi^*}$$

$$R^* = \frac{\operatorname{sh}(p\pi - \varphi^*)}{\operatorname{sh}(p\pi - \varphi^*) - e^{\mu p\pi} \operatorname{sh} \varphi^*} \quad (12.16)$$

$(0 < \varphi^* < \varphi_1)$

Построив семейство кривых по первой формуле (12.16), по заданным μ , p определяем λ и затем по второй формуле (12.16) величину R^* .

Так как начальная точка периодического движения (X_0^*, Y_0^*) лежит в нижней полуплоскости $\tau = 0$ ($Y_0^* < 0$, так как $R^* > 1$), то амплитуда колебаний $H = -x_1^*$, где $x_1^* = x^*(\varphi^*)$ — абсцисса пересечения фазовой траекторий $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ плоскости $y = 0$, т. е.

$$H = 2R^* - (\lambda + 1) \quad (12.17)$$

Так как

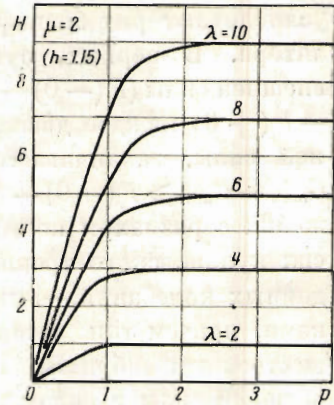
$$\frac{\partial R^*}{\partial p} = \frac{\pi R^{*2} (\mu^2 - 1) e^{\mu\varphi^*} \operatorname{sh} \varphi^*}{\lambda + e^{-\mu(p\pi - \varphi^*)} [\operatorname{ch}(p\pi - \varphi^*) + \mu \operatorname{sh}(p\pi - \varphi^*)]} > 0$$

то и $\partial H / \partial p > 0$. Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний H является монотонно возрастающей функцией p , меняясь от $H_{\min} = 0$ при $p = 0$ (т. е. при периоде внешней силы $T = 0$) до $H_{\max} = \lambda - 1$ при $p = \infty$ (т. е. $T \rightarrow +\infty$). На фиг. 18 даны резонансные кривые для $\mu = 2$. Ход резонансных кривых при других значениях μ качественно одинаков с ходом кривых на фиг. 18.

13. Заключение. Таким образом, движение осциллятора с комбинированным трением под действием внешней силы во многом напоминает движение соответствующего осциллятора при наличии одного вязкого трения, особенно если эта внешняя сила достаточно велика. Если размах внешней силы достаточно велик

$$(G_{\max} - G_{\min}) > F(-0) - F(+0)$$

где $F(-0)$ и $F(+0)$ — максимальное и минимальное значение сил трения (покоя), то в осцилляторе с комбинированным трением,



Фиг. 18

так же как и в обычном линейном осцилляторе, устанавливаются (при $t \rightarrow +\infty$) периодические вынужденные колебания, не зависящие от начальных условий, и с периодом, равным периоду внешней силы (и, кроме того, симметричные, если осциллятор и внешняя сила являются симметричными). В случае знакопеременной силы резонанс (максимальный размах установившихся периодических колебаний) имеет место только при совпадении собственной частоты осциллятора с частотой какой-либо гармоники внешней силы при условии наличия осцилляторного режима, т. е. при $b < b_{кр}$.

С другой стороны, силы кулоновского трения в осцилляторе обуславливают ряд специфических особенностей в движении такого осциллятора. Во-первых, существует критическое значение для размаха внешней силы ($F(-0) - F(+0)$) такое, что при $G_{max} - G_{min} \leq F(-0) - F(+0)$ каждое движение осциллятора, несмотря на наличие внешней силы, заканчивается каким-либо состоянием покоя; только при $G_{max} - G_{min} > F(-0) - F(+0)$ устанавливаются периодические движения с размахом колебаний, отличным от нуля. Во-вторых, наличие сил кулоновского трения приводит к появлению новых типов вынужденных колебаний, — вынужденных колебаний с длительными остановками, причем тип устанавливающегося периодического движения существенным образом определяется соотношением между размахом внешней силы и силам кулоновского трения.

Поступила в редакцию
25 X 1948

Горьковский исследовательский
физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Eekolt. Zeitschr. f. techn. Physik. 1926. Bd. 7. S. 226.
2. Den Hartog. Phil. Mag. 1930. Vol. 9. P. 801.
Den Hartog. Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Friction. Trans. of Am. Soc. of Mech. Eng. 1931.
3. Дубровский К. Труды ГИИВТ. Горький. 1940. Т. V. Стр. 80.
4. Meissner. Z. angew. Math. u. Mech. 1935. Bd. 15, S. 62.
5. Ziegler. Ing. Archiv. 1938 Bd. IX. S. 50, 163.
6. Levinson. Jour. of Math. a. Phys. Massach. Inst. of Tech. 1943. Vol. 22. P. 41, 181.
7. Ляпунов А. В. Общая задача об устойчивости движения. Харьков. 1892.
8. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, ОНТИ. 1937.