

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ ПОЛИГОНАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Н. Х. Арутюнян

(Ереван)

В работе приводится точное решение задачи о кручении призматических стержней с полигональным поперечным сечением. При этом рассматриваются поперечные сечения полигонального очертания частного вида, а именно прокатные профили.

Существующие приближенные эмпирические формулы Фелля [1], Инге-Ляза [2] и ЦНИПС [3] пригодны только для определения жесткости прокатного профиля.

Приближенные теоретические решения задачи о кручении для некоторых тонкостенных прокатных профилей вариационными методами теории упругости приведены в работах Л. В. Канторовича [4], Т. К. Ченовой [5] и в нашей ранее опубликованной работе [6].

Предлагаемый метод решения задач о кручении стержней полигонального поперечного сечения изложен на примере равнобокового уголка с произвольной толщиной стенок. В случае других профилей (неравнобокий уголок, швеллер, коробчатое сечение) общий ход решений предложенного метода остается совершенно аналогичным и основное отличие в этих случаях получается только в структуре бесконечной системы (4.2).

1. Дифференциальные уравнения равновесия и их решения. Определение функции напряжения $U(x, y)$ при кручении, как известно, сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \quad (1.1)$$

при условии $U = 0$ на контуре области Γ .

Будем искать функцию $U(x, y)$ в области $ONAE$, представленной на фиг. 1, в виде

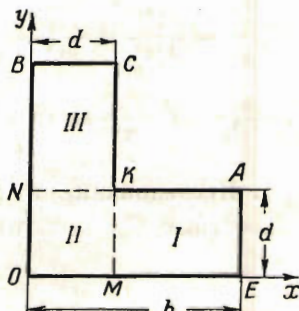
$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{k=\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d} + \Phi(x, y) \quad (1.2)$$

причем

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} 0 & (x \geq d) \\ \Phi_1(x, y) & (x \leq d) \end{cases} \quad (1.3)$$

В области $OBСM$ функция $U(x, y)$ будет такой же, как и в $ONAE$, только x и y поменяются ролями. Для непрерывности и однозначности решения $\Phi_1(x, y)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \Phi_1(d, y) = \Phi_1(x, 0) = 0, & \quad \frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=d} = 0 \\ \Phi_1(x, d) = \sum_{k=1}^{k=\infty} f_k(d) \sin \frac{k\pi x}{d}, & \quad \Phi_1(x, y) = \Phi_1(y, x) \end{aligned} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Тогда из соотношения (1.1) согласно (1.2) и (1.3) получим

$$f_k(y) = L_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} + F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d} + \frac{4d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^k + 1] \quad (1.5)$$

$$\Delta^2 \Phi_1(x, y) = 0 \quad (1.6)$$

2. Определение вспомогательной функции $\Phi_1(x, y)$. Функция $\Phi_1(x, y)$ должна быть гармонической в области $ONKM$ и удовлетворять условиям (1.4) на контуре.

Следуя идее Гринберга [7], будем искать решение для функции $\Phi_1(x, y)$ в такой же форме, как и при однородных граничных условиях.

Положим, что

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d} \quad (2.1)$$

$$V_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d} dy \quad (2.2)$$

Тогда получим

$$V_k(x) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{ch} k\pi \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} - \operatorname{sh} k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d} \right] \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{(-1)^p p}{k^2 + p^2} - \\ - (-1)^k \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{1}{k^2 + p^2} \sin \frac{p\pi x}{d}$$

при этом использованы условия (1.4).

3. Удовлетворение граничным условиям. Условия на контуре $U(x, y) = 0$ можно представить в виде

$$f_k(b) = 0, \quad f_k(0) + V_k(0) = 0 \quad (3.1)$$

Подставляя значения $f_k(x)$ и $V_k(x)$ из (1.2) и (2.3) в (3.1), получим для определения F_k следующую бесконечную систему уравнений:

$$F_k = -\frac{4d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^k + 1] + (-1)^k \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} k\pi \sum_{p=1}^{\infty} F_p \frac{p(-1)^p e^{-p\pi}}{k^2 + p^2} - \\ - (-1)^k \frac{16d^2}{\pi^4} \operatorname{sh} k\pi \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2(k^2 + p^2)} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} p\pi}{\operatorname{sh} p\pi\beta} \right] \quad \left(\beta = \frac{b}{d} \right) \quad (3.2)$$

4. Исследование и решение бесконечной системы. Введем новые неизвестные C_k , полагая

$$F_k = C_k d^2 \frac{\operatorname{sh} k\pi}{k} (-1)^{k+1} \quad (4.1)$$

Тогда система (3.2) будет приведена к следующей бесконечной системе уравнений:

$$C_k = -\frac{4}{k^3\pi^3} \frac{[1 + (-1)^k + 1]}{\operatorname{sh} k\pi} + \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{p=\infty} C_p \frac{\operatorname{sh} p\pi e^{-p\pi}}{k^2 + p^2} + \\ + \frac{16k}{\pi^4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2(k^2 + p^2)} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} p\pi}{\operatorname{sh} p\pi\beta} \right] \quad \left(\beta = \frac{b}{d} \right) \quad (4.2)$$

Эта система легко может быть представлена в виде, разрешенном относительно C_k . Имеем

$$C_k = -\frac{4[1+(-1)^{k+1}]}{k\pi \operatorname{sh} k\pi (k\pi - e^{-k\pi} \operatorname{sh} k\pi)} + \frac{2k^2}{k\pi - e^{-k\pi} \operatorname{sh} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} C_p \frac{\operatorname{sh} p\pi}{k^2 + p^2} e^{-p\pi} + \\ + \frac{16k^2!}{\pi^3 (k\pi - e^{-k\pi} \operatorname{sh} k\pi)} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2 (k^2 + p^2)} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} p\pi}{\operatorname{sh} p\pi\beta}\right) \quad (4.3)$$

где штрих при знаке сумм означает, что при суммировании опускается индекс $p = k$. Покажем, что полученная система (4.3) вполне регулярна.

Для оценки коэффициентов уравнений (4.3) имеем

$$\frac{2k^2}{k\pi - e^{-k\pi} \operatorname{sh} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-p\pi} \operatorname{sh} p\pi}{k^2 + p^2} = \frac{k\pi}{k\pi - e^{-k\pi} \operatorname{sh} k\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{cth} k\pi - \frac{1}{k\pi} \right] - \\ - \frac{k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-2p\pi}}{k^2 + p^2} < \frac{k\pi}{k\pi - e^{-k\pi} \operatorname{sh} k\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{cth} k\pi - \frac{1}{k\pi} \right] \quad (4.4)$$

Из этого неравенства (4.4) заключаем, что сумма модулей коэффициентов данной бесконечной системы (4.2) монотонно возрастает при $k \rightarrow \infty$ и достигает своего наибольшего значения, когда $k = \infty$. В силу этого будем иметь неравенство

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2k^2 e^{-p\pi} \operatorname{sh} p\pi}{(\pi k - e^{-k\pi} \operatorname{sh} k\pi) (k^2 + p^2)} \leq \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

для любого $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, сумма модулей коэффициентов уравнений (4.2) не превосходит постоянного числа, меньшего единицы, что вполне доказывает регулярность бесконечной системы (4.2).

Свободный член b_k данной системы удовлетворяет неравенству

$$b_k \leq 0.0752 - \frac{0.824}{\operatorname{sh} \pi\beta} \quad \left(\beta = \frac{b}{d} > 1\right) \quad (k=1,2,\dots) \quad (4.6)$$

Обозначим значение искомым неизвестных C_k с недостатком через C_k^- , а с избытком через C_k^+ :

$$C_k^- \leq C_k \leq C_k^+$$

Пользуясь известными теоремами о вполне регулярных системах [8], для C_k^- и C_k^+ получим следующие выражения:

$$C_1^- = 0.0833 - \frac{1.2376}{\operatorname{sh} \pi\beta}, \quad C_2^- = 0.0905 - \frac{1.0388}{\operatorname{sh} \pi\beta}, \quad C_3^- = 0.0716 - \frac{0.8063}{\operatorname{sh} \pi\beta}, \dots$$

$$C_k^- = \frac{16k}{\pi^4} \left[\frac{\pi^2}{8k^2} - \frac{\pi}{4k^3} + \frac{\pi}{2k^3(1+e^{k\pi})} - \frac{\operatorname{sh} \pi}{(k^2+1)\operatorname{sh} \pi\beta} \right] \quad (k \geq 4)$$

$$C_1^+ = 0.0946 - \frac{1.3615}{\operatorname{sh} \pi\beta}, \quad C_2^+ = 0.1055 - \frac{1.2030}{\operatorname{sh} \pi\beta}, \quad C_3^+ = 0.0949 - \frac{1.1190}{\operatorname{sh} \pi\beta}, \dots$$

$$C_k^+ = 0.08856 - \frac{0.9720}{\operatorname{sh} \pi\beta} \quad (k \geq 4)$$

В случае тонкостенных уголков, когда $\beta = b/d \geq 4$, соотношения (4.3), (4.4) и (4.5) для C_k^- , C_k^+ и b_k упрощаются.

5. Определение функции напряжения $U(x, y)$. Подставляя значения $\Phi_1(x, y)$ и $f_k(x)$ и соотношения (1.5), (2.1) и (2.3) в (1.2), для функции напряжения $U(x, y)$ в области $ONAE$ получим выражения:

$$U(x, y) = U^0(x, y) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) e^{-kp} \frac{(-1)^{k+p} p}{k^2 + p^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{(-1)^k k}{k^2 + p^2} \sin \frac{p\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} \quad \text{при } x \leq d \quad (5.1)$$

$$U(x, y) = U^0(x, y) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{(-1)^{k+p} p}{k^2 + p^2} \operatorname{sh} k\pi \exp \frac{-k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} \\ \text{при } x \geq d \quad (5.2)$$

где $U^0(x, y)$ — функция напряжения для призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением $AEON$ или $OBСM$,

$$f_k(d) = F_k e^{-kp} + \frac{4d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh} k\pi\beta} \right] \quad \left(\beta = \frac{b}{d} \right) \quad (5.3)$$

Для области $OBСM$ функция напряжения $U(x, y)$ будет такой же, как и (5.2), только x и y поменяются местами.

Подставляя в соотношения (5.1) и (5.2) вместо значения C_k последовательно C_k^- и C_k^+ и построив соответствующие этим значениям эпюры для функции напряжения $U^-(x, y)$ и $U^+(x, y)$ в различных сечениях уголка ($y = 0, 1/4d, 1/2d, d$), мы заключаем, что в этих точках имеет место неравенство

$$U^-(x, y) \leq U(x, y) \leq U^+(x, y) \quad (5.4)$$

В силу непрерывности $U(x, y)$ это неравенство будет сохраняться для всех точек поперечного сечения скручиваемого стержня.

6. Определение жесткости при кручении. Обозначим для краткости область $AKME$ цифрой I, область $KNOM$ цифрой II и $NBСK$ цифрой III. Тогда для жесткости при кручении будем иметь

$$D = 2G\theta \int\int_{\Omega} U(x, y) dx dy = 2G\theta \left[\int\int_{II} U(x, y) dx dy + 2 \int\int_I U(x, y) dx dy \right] \quad (6.1)$$

где G — модуль сдвига, θ — угол закручивания на единицу длины.

Подставляя значения C_k^+ и C_k^- из (4.5) в (6.1) и производя интегрирование, получим для значений верхней и нижней границ жесткости следующие выражения ($\beta = b/d$):

$$D^+ = D^0 \left[1 + \frac{B^+(\beta) d^4}{D^0} \right] = D^0 L_1^+(\beta), \quad D^- = D^0 \left[1 + \frac{B^-(\beta) d^4}{D^0} \right] = D^0 L_1^-(\beta) \quad (6.2)$$

Здесь D^0 есть сумма жесткостей прямоугольников, составляющих профиль, значения которых приводятся в курсах теории упругости или сопротивления материалов; $B^+(\beta)$ и $B^-(\beta)$ определяются формулами

$$B^+(\beta) = 0.1360 - 4.5364e^{-\pi\beta} + 8.720e^{-2\pi\beta} \\ B^-(\beta) = 0.1132 - 2.9986e^{-\pi\beta} + 11.3650e^{-2\pi\beta}$$

Таким образом, в соотношении (6.2) первый множитель представляет сумму жесткостей отдельных прямоугольников, составляющих данный профиль, а второй множитель $L_1(\beta)$ является коэффициентом увеличения, представляющим влияние стыков данного прокатного профиля на величину его жесткости.

Приводим некоторые значения коэффициентов L_1^+ и L_1^- для различных отношений $\beta = b/d$ и значения максимальной погрешности (в %):

$\beta = b/d =$	1.5	2	2.5	3	3.5	4	6	∞
$L_1^+(\beta) =$	1.298	1.213	1.146	1.109	1.086	1.071	1.042	1.00
$L_1^-(\beta) =$	1.270	1.190	1.123	1.091	1.072	1.061	1.036	1.00
$\delta_1(\beta) =$	1.6	1.65	1.7	1.5	1.02	0.85	0.35	0

В случае тонкостенного профиля, когда $\beta = b/d \geq 4$, формулы (6.2) для значения жесткости очень упрощаются и имеют следующий вид:

$$D^- = \frac{(a+b)d^3}{3} \left[1 - \frac{0.9205}{a+b} d \right], \quad D^+ = \frac{(a+b)d^3}{3} \left[1 - \frac{0.8530}{a+b} d \right] \quad (6.3)$$

Отсюда вытекает, что максимальная погрешность при определении D меньше чем 0.85%.
 7. Определение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} . Для определения напряжений τ_{xy} и τ_{yz} имеем следующие соотношения:

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad (7.1)$$

Подставляя значения $U(x, y)$ из (5.1) и (5.2) в (7.1), имеем

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \frac{2G\theta}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) e^{-k\pi} \frac{(-1)^k + p k p}{k^2 + p^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} - \\ - \frac{2G\theta}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{(-1)^k k p}{k^2 + p^2} \cos \frac{p\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} \quad \text{при } x < d \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \frac{2G\theta}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \operatorname{sh} k\pi \frac{(-1)^k + p k p}{k^2 + p^2} \exp \frac{-k\pi x}{d} \cos \frac{k\pi y}{d} \quad \text{при } x \geq d \quad (7.3)$$

где τ_{xz}^0 есть напряжение в призматическом стержне с прямоугольным поперечным сечением $OEAN$ или $OBCM$, значение которого приводится в курсах теории упругости.

Отметим, что при определении значения τ_{xz} в точках на стороне уголка OM ($x \leq d$) удобнее для вычисления пользоваться принципом симметрии, а именно, определить, пользуясь формулой (7.1), значение по модулю τ_{yz} в соответствующих симметричных точках на стороне ON .

Исследование полученных соотношений (7.2) и (7.3) показывают, что максимальные напряжения получаются в точках

$$(x = 0.45b, y = 0), \quad (x = 0, y = 0.45b) \quad \text{при } b/d = 1.5$$

$$(x = 0.5b, y = 0), \quad (x = 0, y = 0.5b) \quad \text{при } b/d \geq 3$$

Таким образом, практически можно считать, что наибольшие касательные напряжения получаются почти в средних точках длинных сторон уголка. Подставив значения $x=0$, $y=1/2 b$ в соотношения (7.4) и (7.3), получим окончательно следующие выражения:

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^{\circ} + \frac{2G\theta}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) e^{-k\pi \frac{(-1)^k + p}{k^2 + p^2} \frac{k\pi b}{2d}} - \frac{2G\theta}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{(-1)^k k p}{k^2 + p^2} \sin \frac{k\pi b}{2d} \quad \text{для } \frac{b}{d} < 2 \quad (7.4)$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^{\circ} + \frac{2G\theta}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \operatorname{sh} k\pi \frac{(-1)^k + p}{k^2 + p^2} \exp \frac{-k\pi b}{2d} \quad \text{для } \frac{b}{d} \geq 2$$

Выражения (7.4) можно представить в виде

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^{\circ} \left[1 + \frac{\Delta\tau}{\tau_{\max}^{\circ}} \right] = L_2(\beta) \tau_{\max}^{\circ} \quad \left(\beta = \frac{b}{d} \right) \quad (7.5)$$

где $\Delta\tau$ есть добавок к напряжению τ_{\max}° , значения которого определяются вторыми слагаемыми в (7.4) в виде рядов.

Таким образом, первый множитель в соотношении (7.5) выражает максимальное напряжение для прямоугольника $ONAE$, а второй множитель $L_2(\beta)$ является коэффициентом увеличения, представляющим влияние стыков данного прокатного профиля на величину наибольшего тангенциального напряжения. Приведем некоторые значения τ_{\max}° и значения верхних и нижних границ коэффициента $L_2(\beta)$, а также значения (в %) возможных максимальных погрешностей $\beta_2(\beta)$ в определении τ_{\max} , для различных отношений сторон уголка:

$\beta = b/d = 1.5$	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	10	∞
$\tau_{\max}^{\circ} / G\theta d = 0.848$	0.930	0.968	0.985	0.996	0.997	1.00	1.00
$L_2^+(\beta) = 1.250$	1.188	1.142	1.033	1.016	1.008	1.0003	1.000
$L_2^-(\beta) = 1.225$	1.162	1.122	1.024	1.010	1.003	1.000	1.000
$\delta_2(\beta) = 2.8$	2.4	1.6	0.95	0.6	9.5	0.03	0

Поступила в редакцию
25 IX 1948

Институт математики и механики
Академии Наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Förrl A. Vorlesungen. 1922. Т. V.
2. Inge Lyse Bruce G. Johnston. Structural Beams in Torsion. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. 1935. April. Vol. 61. P. 469—508.
3. Бычков Д. В. и Мрощинский А. К. Кручение металлических балок. Москва. Стройиздат. 1944.
4. Канторович Л. В. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 1.
5. Чепова Т. К. ПММ. 1937. Т. I. Вып. 2.
6. Арутюнян Н. Х. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 1.
7. Гринберг Г. А. Изв. АН СССР. Серия физическая. 1946. Т. X. Вып. 2.
8. Канторович Л. В. и Крылов Н. И. Приближенные методы высшего анализа. Москва. ОНТИ. 1941.