Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

# РАСЧЕТ ОДНОРОДНЫХ ЗЕМЛЯНЫХ ПЛОТИН, ПОСТРОЕННЫХ НА ПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ[1]

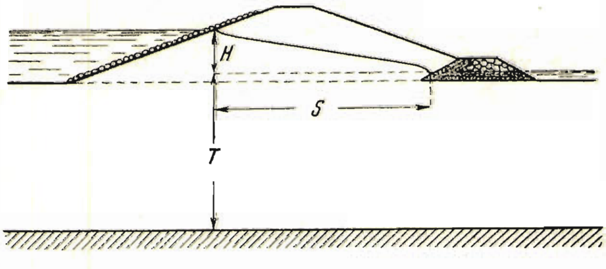
А. П. Вощинин

(Москва)

В работе дается исследование решения задачи о фильтрации для расчета однородной земляной плотины при любой глубине проницаемого основания. Результаты решения этой задачи опубликованы в 1939 г.[1]

Заметим, что Ф. Б. Нельсон-Скорняков в своей книге[2] разбирает эту задачу в случае, когда верховой откос плотины почти вертикальный (что в практике встречается весьма редко). Автор, повидимому, не замечает, что его решение является частным случаем решения приведенного нами в Докладах[2], когда можно ограничиться рассмотрением половины области движения грунтового потока, как показано в примере 2 в конце этой работы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим земляную плотину, представленную на фиг. 1. В первоначальной постановке задачи примем глубину




Фиг. 1.

воды в верхнем и нижнем бьефах равной нулю, т. е. будем предпо-

---

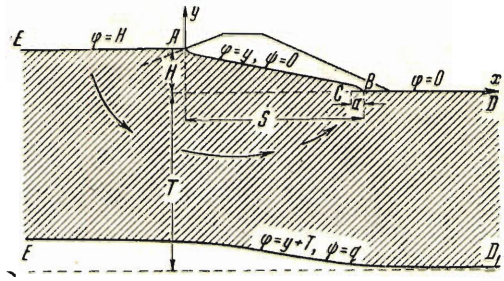
[1] Эта работа была представлена автором к печати 6/V 1941 г. Статья незначительно расширяла сообщение в Докладах АН СССР (1939, т. IX) и была возвращена автору для дополнений примерами. В настоящее время автор представил вновь ее первоначальный текст, добавив последний параграф (примеры).

Ввиду того, что принципиальный разультат А. П. Вощинина не получил должной оценки в литератур (например, книга Ф. Б. Нельсон-Скорнякова[2], редакция считает необходимым опубликовать эти материалы (*При . ред.*)

[2] Следует отметить также, что указание Ф. Б. Нельсон-Скорнякова на решение им этой задачи в 1936 г., вызывает недоумение, — указанные им Научные записки МИИВХ[3] не содержат ни этого решения, ни упоминания о возможности наложения особого условия на линию водоупора.

лагать, что линии входа и выхода грунтового потока совпадают соответственно с отметками верхнего и нижнего бьефов.

Тогда область движения грунтового потока имеет вид, представленный




Фиг. 2.

на фиг. 2. Для дальнейшего примем следующие обозначения (фиг. 2):

$\varphi$ — потенциальная функция; $\psi$ — функция тока;

$v$ — скорость фильтрации; $H$ — действующий напор;

$\varkappa$ — коэффициент фильтрации грунта;

$q$ — значение приведенного расхода;

$Q = \varkappa q$ — удельный фильтрационный расход через плотину;

$I = v / \varkappa$ — гидравлический градиент;

$S$ — длина плотины от уреза верхнего бьефа до точки выхода кривой депрессии в дренаж;

$T$ — глубина нижней точки проницаемого основания;

$\overline{CB} = a$ — длина части дренажа, выступающей внутрь потока;

$EA$ — линия входа потока в грунт и горизонт верхнего бьефа;

$BCD$ — линия выхода потока и горизонт нижнего бьефа;

$AB$ — кривая депрессии;

$ED$ — поверхности водоупора;

sn, cn, dn — эллиптические функции Якоби.

$K$, $K'$ — полные эллиптические интегралы;

$k$ — модуль эллиптического интеграла;

В дальнейшем для сокращения коэффициент фильтрации повсюду принимается равным единице и вводится только в окончательные формулы расхода и скорости.

Граничные условия состоят в следующем (фиг. 2).

На линии входа потока $EA$ напор постоянный и можно принять

$$\varphi = H \tag{1.1}$$

На линии выхода $BCD$ напор постоянный и можно принять

$$\varphi = 0 \tag{1.2}$$

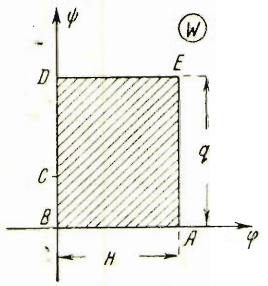
На кривой депрессии $AB$, которая является линией тока и границей с областью атмосферного давления, имеем

$$\psi = 0, \qquad \varphi = y \tag{1.3}$$

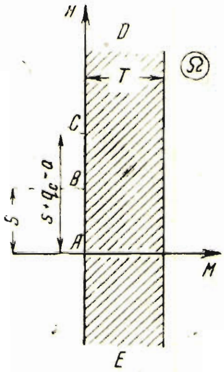
На нижней границе проницаемого основания $ED$, которая является линией тока, примем

$$\psi = q, \qquad \varphi = y + T \tag{1.4}$$

Второе из этих условий является допущением; оно упрощает задачу. Форма поверхности водоупора получается в результате решения, причем отклонение от горизонтали не будет превышать половины напора. Таким образом, это допущение можно делать,




Фиг. 3




Фиг. 4

если глубина процинаемого основания $T$ в несколько раз больше напора $H$.

Заметим, что в соответствии с опытом точка выхода кривой депрессии $B$ не совпадает с началом дренажа и подлежит определению.

**2. Общая формула.** Следуя методу Жуковского, рассмотрим:

а) комплексный потенциал (фиг. 3)

$$W = \varphi + i\psi \tag{2.1}$$

б) комплекс Жуковского (фиг. 4)

$$\Omega = M + iN = W + iz \tag{2.2}$$

где $z = x + iy$ — координата точки области движения грунтового потока.

Отобразим область, представленную на фиг. 3, на верхнюю полуплоскость $\zeta$ (фиг. 5) с помощью формулы Шварца-Кристофеля

$$W = A \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - k^2)}} + B$$

Определяя произвольные постоянные $A$ и $B$, имеем

$$W - \frac{H}{2} = \frac{H}{2K} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}} = \frac{H}{2K} \operatorname{sn}^{-1} \frac{\zeta}{k}$$

или

$$\zeta = k \operatorname{sn}\left(-K + \frac{2KW}{H}, k\right) \tag{2.3}$$

Аналогичным образом, отображая область, представленную на фиг. 4, на ту же полуплоскость $\zeta$ (фиг. 5), получим

$$\zeta = \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\Omega i + \frac{S}{2}\right)\right] = \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(Wi - z + \frac{S}{2}\right)\right] \tag{2.4}$$

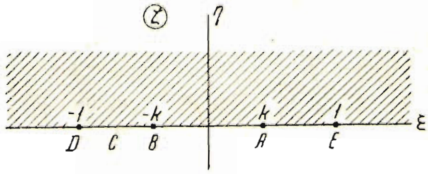
Исключая из (2.3) и (2.4) вспомогательное переменное $\zeta$, имеем общее решение задачи в виде следующей формулы:

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(Wi - z + \frac{S}{2}\right)\right] = k \operatorname{sn}\left(-K + \frac{2KW}{H},\ k\right) \tag{2.5}$$

при этом

$$q = \frac{HK'}{2K}, \qquad k = \operatorname{th}\frac{\pi S}{4T} \tag{2.6}$$

Последние равенства являются необходимыми условиями конформных преобразований (2.3) и (2.4) соответственно.




Фиг. 5

### 3. Расчетные формулы для отдельных гидродинамических элементов потока

1°. Фильтрационный расход, проходящий через единицу ширины профиля, будет

$$Q = \varkappa q = \frac{K'}{2K}\varkappa H \tag{3.1}$$

2°. Уравнение депрессионной кривой получается из общей формулы (2.5) при $\varphi = y$, $\psi = 0$. Имеем

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{S}{2} - x\right)\right] = k \operatorname{sn}\left(-K + \frac{2Ky}{H},\ k\right) \tag{3.2}$$

Это уравнение можно представить также в виде

$$\frac{k - \operatorname{th}\pi x / 2T}{1 - k\operatorname{th}\pi x / 2T} = \frac{k \operatorname{cn}(2Ky / H,\ k)}{\operatorname{dn}(2Ky / H,\ k)} \tag{3.3}$$

Анализ формул (3.2) и (3.3) и расчеты по ним приводят к следующим выводам:

а) верхний и нижний концы кривой депрессии симметричны;

б) наименьший уклон и кривизну кривая депрессии имеет в середине, а при приближении к точкам входа и выхода уклон и кривизна возрастают;

в) увеличение глубины проницаемого основания $T$ при постоянной длине профиля $S$ (так же как и уменьшение $S$ при постоянной $T$) приводит к уменьшению кривизны кривой депрессии, к ее приближению к прямой с постоянным уклоном. Случай плотины, построенной на непроницаемом основании, как предельный, должен давать наибольшую кривизну кривой депрессии.

3°. Уравнение линии водоупора получается из общей формулы (2.5) при $\varphi = y + T$, $\psi = q$. Имеем

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{S}{2} - q - x\right)\right] = \operatorname{sn}\left[\left(= K + \frac{2Ky}{H} + \frac{2KT}{H}\right),\ k\right] \tag{3.4}$$

Построение линии водоупора для случаев, когда заданная глубина его нижней точки $T$ велика по сравнению с напором $H$, не является обязательным при расчете. При малой глубине непроницаемого основания $T$ это построение необходимо сделать, чтобы иметь представление об отклонении полученной линии водоупора от заданной.

4°. Абсциссы граничных точек линий тока получаем из формулы (2.5). Для линии входа потока $EA$ при $\varphi = H$, $y = H$

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{S}{2} - \psi - x\right)\right] = \frac{k}{\operatorname{dn}(2K\psi / H, k')} \tag{3.5}$$

для линии выхода потока $BCD$ при $\varphi = 0$, $y = 0$

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{S}{2} - \psi - x\right)\right] = -\frac{k}{\operatorname{dn}(2K\psi / H, k')} \tag{3.6}$$

5°. Скорость потока в какой-либо точке рассматриваемой области будет

$$\frac{dW}{dz} = v = v_x - iv_y$$

Из формулы (2.5) имеем

$$\alpha = \frac{\pi}{2T}\left(\frac{S}{2} + Wi\right), \qquad \beta = -K + \frac{2KW}{H}, \qquad z = \frac{2T}{\pi}\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{k\operatorname{sn}(\beta, k) - \operatorname{th}\alpha}{k\operatorname{sn}(\beta, k)\operatorname{th}\alpha - 1}\right)$$

отсюда

$$\frac{dz}{dW} = i - \frac{4KTk}{\pi H}\frac{\operatorname{cn}(\beta, k)}{\operatorname{dn}(\beta, k)} = i - b\frac{\operatorname{cn}(\beta, k)}{\operatorname{dn}(\beta, k)} \qquad \left(b = \frac{4KTk}{\pi H}\right)$$

следовательно,

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\operatorname{dn}(\beta, k)}{i\operatorname{dn}(\beta, k) - b\operatorname{cn}(\beta, k)} \tag{3.7}$$

Из этой общей формулы определим скорости на границе для тех же точек, абсциссы которых можно получить из равенства (3.5) и (3.6).

По линии входа потока $EA$ при $\varphi = y = H$, $W = H + i\psi$, $z = x + iH$, $dz = dx$, $dW = i\,d\psi$ имеем

$$I_x = \frac{v_x}{\varkappa} = 0, \qquad I_y = \frac{v_y}{\varkappa} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{-\operatorname{cn}(2K\psi / H, k')}{\operatorname{cn}(2K\psi / H, k') + b\operatorname{sn}(2K\psi / H, k')} \tag{3.8}$$

По линии выхода потока $CD$ при $\varphi = y = 0$, $W = i\psi$, $z = x$, $dz = dx$, $dW = i\,d\psi$

$$I_x = \frac{v_x}{\varkappa} = 0, \qquad I_y = \frac{v_y}{\varkappa} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\operatorname{cn}(2K\psi / H, k')}{b\operatorname{sn}(2K\psi / H, k') - \operatorname{cn}(2K\psi / H, k')} \tag{3.9}$$

Для построения эпюры скорости выхода грунтового потока нужно задаться рядом значений $\psi$ в пределах от 0 до $q$ и определить абсциссы соответствующих точек по формуле (3.6) и скорости в них по формуле (3.9). По этой эпюре определяются необходимые размеры обратного фильтра.

6°. Длина части дренажа, выступающей внутрь потока $CB = a$, определяется из условия минимума функции $x = x(\psi)$ в точке $C$

$$\frac{dx}{d\psi_a} = 0$$

Для этого пользуемся равенством (3.9). Имеем

$$b\operatorname{sn}\left(\frac{2K\psi}{H}, k'\right) - \operatorname{cn}\left(\frac{2K\psi}{H}, k'\right) = 0$$

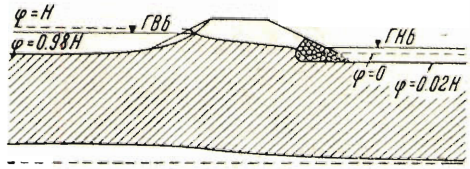
Выражая sn через cn и разрешая полученное равенство относительно $\psi_a$, получим

$$\psi_a = \frac{H}{2K}\int_0^{b^*}\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k'^2\omega^2)}} \qquad \left(b^* = \sqrt{\frac{1}{1+b^2}}\right) \qquad (3.10)$$

Определив функцию $\psi_a$, абсциссу нужной точки $C$ находим с помощью равенства (3.6).

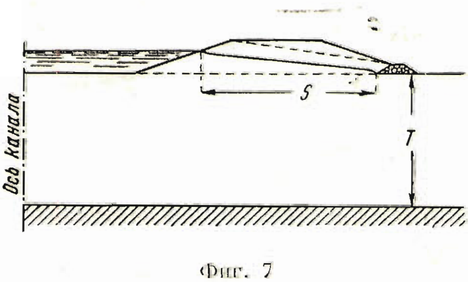
*Замечание*. В заключение укажем, что принятое предположение о нулевой глубине бьефов, как видно из полученного решения, оказывается несущественным.

Принимая из сетки эквипотенциалей полученного решения ближайшую к границе реального бьефа и контуру плотины (фиг. 6), можно




Фиг. 6

произвести все необходимые вычисления по той же формуле (2.5). При этом формулы для отдельных элементов потока окажутся несколько более сложными, в них одновременно войдут действительные и мнимые части. Однако проведенные вычисления показывают, что учет глубины бьефов (или практических форм откосов плотины) приводит к уточнению расчета порядка $1-2\%$, т. е. практически можно пользоваться непосредственно решением для принятой схематической области движения.




Фиг. 7

**4. Пример 1.** Рассчитать дамбы, ограждающие канал, на участке, имеющем следующие данные (фиг. 7):

а) грунт основания, являющийся также материалом для отсыпки дамб, песок с коэффициентом фильтрации $\varkappa = 0.0001$ м / сек.

б) разность горизонтов воды в канале и в дренажной призме (действующий напор) составляет на данном участке $H = 6$ м;

в) непроницаемое глинисто основание, подстилающее толщу песка, находится по данным геологической разведки, на глубине $T \approx 60$ м;

г) потери из канала на фильтрацию и условия отвода воды из дренажа определяют допустимый удельный фильтрационный расход $Q = 0.36$ л / сек., В данном случае длину профиля плотины $S$ определяет допустимый расход из канала. В табл. 1 приведены результаты вычислений расхода для нескольких вариантов длины $S$ по формуле (3.1).

Таблица 1

| | $S=4H$ | $S=6H$ | $S=8H$ | $S=10H$ |
|---|---|---|---|---|
| $k=\operatorname{th}\frac{\pi S}{4T}$ | 0.304 | 0.439 | 0.557 | 0.656 |
| $K$ по таблицам | 1.609 | 1.656 | 1.720 | 1.799 |
| $K'$ » » | 2.618 | 2.274 | 2.061 | 1.918 |
| $\frac{K'}{2K}$ | 0.814 | 0.686 | 0.600 | 0.533 |
| $Q=1000\frac{K'}{2K}\varkappa H\ \frac{л}{сек}$ | 0.49 | 0.41 | 0.36 | 0.32 |

На основании этого расчета длину профиля дамбы следует принять

$$S=8H=48 \text{ м}$$

Положение кривой депрессии определяем по формуле (3.2). Для каждого значения

$$y_1=0.9H,\quad y_2=0.8H,\quad y_3=0.7H,\ \ldots,\ y_9=0.1H$$

вычисляем по таблицам эллиптических функций [4] значения sn, причем модуль $k$ уже известен по расчету расхода, а затем, пользуясь таблицей для гиперболического тангенса, находим соответствующие значения абсциссы $x$. Например, для $y_5=0.5H$

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{S}{2}-x\right)\right]=k\operatorname{sn}(0,\ k)=0$$

$$x=\frac{S}{2}=24 \text{ м}$$

Нанеся кривую депрессии на чертеж фиг. 7, видим, что она повсюду находится в достаточном удалении от предварительно взятого внешнего контура плотины и дает возможность сократить объем тела плотины без увеличения опасности выхода грунтовых вод на низовой откос. Один из вариантов более экономического внешнего контура нанесен на фиг. 7 пунктиром.

Остается определить длину дренажа с обратным фильтром, для чего необходимо построить эпюру градиентов по линии выхода грунтового потока. Абсциссы $x$ точек находим по формуле (3.6), задаваясь различными значениями $\psi$ в пределах от 0 до $q$, а скорость или градиент выхода для тех же самых значений $\psi$ получаем из формулы (3.9). Соотношение между скоростью и градиентом дается законом Дарси

$$v=\varkappa I$$

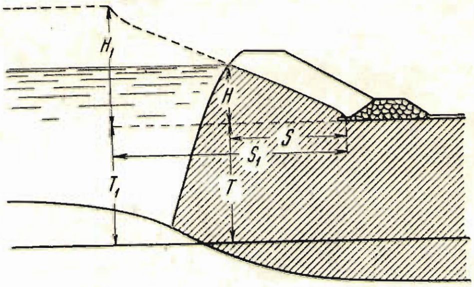
где $\varkappa$ — коэффициент фильтрации грунта.

Примем допустимый градиент выхода без обратного фильтра $I\leqslant 0.1$. Тогда длина фильтра по подошве (т. е. та длина, на которой выходной градиент больше 0.1 по полученной эпюре) будет

$$l=0.9H=5.4 \text{ м}$$

При этом непосредственно в дренаж поступает 38% всего грунтового потока.

5. **Пример 2.** Разберем пример 9 из книги Ф. Нельсон-Скорнякова[2] (стр. 107). Дана плотина с почти вертикальным напорным откосом, простирающимся до водоупора. Напор $H = 20$ м, коэффициент фильтрации $\varkappa = 0.0002$ м / сек, глубина проницаемого основания $T = 40$ м $= 2H$, длина профиля $S = T = 2H = 40$ м. Требуется определить расход через эту плотину.




Фиг. 8

Построим решение для плотины фиг. 8 с горизонтальным напорным откосом при той же глубине проницаемого основания $T_1 = T = 40$ м и с вдвое большими напором и длиной

$$H_1 = 2H = 40 \text{ м}, \quad S_1 = 2S = 80 \text{ м}$$

Вычисляем фильтрационный расход:

$$k = \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{4}\frac{80}{40}\right] = \operatorname{th} 1.57 = 0.917, \qquad K = 2.359, \qquad K' = 1.640$$

$$Q = \frac{K'}{2K}\varkappa H_1 = 0.348\ \varkappa H_1 = 0.696\,\varkappa H$$

Рассматривая нижнюю половину вспомогательной схемы, получаем расход для заданной плотины $H = 20$ м, $S = 40$ м с почти вертикальным откосом:

$$Q = 0.696\,\varkappa H = 0.00278 \text{ м}^3 / \text{сек} = 2.78 \text{ л / сек}$$

Полученное значение расхода на 1,5% больше расхода, приведенного Нельсон-Скорняковым, а не на 17% меньше, как указывает Нельсон-Скорняков, но и эта небольшая разница исчезает, если исправить арифметические погрешности в вычислениях самого Нельсон-Скорнякова, а именно вместо

$$k = \operatorname{th}^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{40}{40}\right) = 0.66^2 = 0.436 \text{ и т. д.} \ldots Q = 2.74 \text{ л / сек}$$

нужно

$$k = \operatorname{th}^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{40}{40}\right) = 0.656^2 = 0.430 \text{ и т. д.} \ldots Q = 2.78 \text{ л / сек}$$

Поступила в редакцию
6 V 1941

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Вощинин. Движение грунтовых вод в теле и основании однородной земляной плотины с горизонтальным фильтром при конечной глубине проницаемого основания. ДАН. Новая серия. 1939, т. XXV, № 9.
2. Нельсон-Скорняков Ф. Б. Фильтрация в однородной среде. 1947.
3. Научные записки МИИВХ. 1937. Вып. 4.
4. Шпильрейн Я. Н. Таблицы специальных функций. Ч. II.