Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

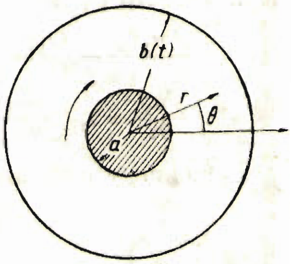
ВРАЩЕНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА В ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Ф. А. Бахшиян

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Пусть жесткий цилиндр радиуса a, неизменно связанный со средой, начиная с момента $t=0$, вращается по определенному закону. Изучим вязко-пластическое течение среды, примыкающей к цилиндру (фиг. 1). По симметрии движение описывается одним уравнением в полярных координатах

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}=\rho\frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

где v — линейная скорость движения, ρ — постоянная плотность. Как известно [1],

$$\tau_{r\theta}=\pm k+\mu e_{r\theta}, \qquad e_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r} \tag{1.2}$$

Здесь k — пластическая постоянная, μ — коэффициент вязкости. Подстановка в уравнение движения дает

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)-\frac{2k}{r} \tag{1.3}$$

Перед k оставлен отрицательный знак, так как $\partial v/\partial r<0$. Начальное и граничные условия будут

$$v(r,0)=f_1(r) \qquad \text{при } t=0 \tag{1.4}$$

$$v(a,t)=\psi_1(t) \qquad \text{при } r=a \tag{1.5}$$

$$v(b,t)=0, \qquad \partial v/\partial r=0 \qquad \text{при } r=b(t) \tag{1.6}$$

Условия (1.6) выражают обращение в нуль скоростей движения и скольжения на границе пластичности, причем в $b(t)$ есть радиус распространения вязко-пластического течения. Условие (1.5) есть закон движения цилиндра. Введем безразмерные величины

$$u=\frac{v}{V}, \qquad x=\frac{r}{a}, \qquad \tau=\frac{k}{\mu}t \tag{1.7}$$

Уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\nu_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{x^2}\right)-\frac{2}{Rx} \tag{1.8}$$

Здесь R и S — числа Рейнольдса и Сен-Венана:

$$R=\frac{aV}{\nu}, \qquad S=\frac{ak}{\mu V}, \qquad \nu=\frac{\mu}{\rho}, \qquad \nu_1=\frac{1}{RS} \tag{1.9}$$

Начальные и граничные условия в новых переменных будут

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{при } \tau = 0 \tag{1.10}$$

$$u(1, \tau) = \psi(\tau) \qquad \text{при } x = 1 \tag{1.11}$$

$$u(x_1, \tau) = 0, \quad \partial u / \partial x = 0 \qquad \text{при } x = x_1(\tau) \tag{1.12}$$

Уравнение (1.1) приводится в работе Финци [1].

§ 2. Случай ограниченной среды. Рассмотрим равномерное вращение цилиндра. В этом случае

$$\psi(\tau) = 1, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & (x > 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \tag{2.1}$$

второе из условий (1.12) отпадает, а первое принимает вид:

$$u(\lambda, \tau) = 0 \qquad \left(\lambda = \frac{b}{a}\right) \tag{2.2}$$

Решение уравнения (1.8) ищем в виде

$$u(x, \tau) = u_1(x) - u_2(x, \tau) \tag{2.3}$$

полагая, что u_1 и u_2 удовлетворяют уравнениям и условиям:

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du_1}{dx} - \frac{u_1}{x^2} - \frac{2S}{x} = 0, \qquad u_1(1) = 1, \qquad u_2(\lambda) = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} = \nu_1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{u_2}{x^2}\right), \quad u_2(1, \tau) = 0, \quad u_2(\lambda, \tau) = 0 \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.4) есть

$$u_1 = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{Sx}{2}(2\log x - 1) \tag{2.6}$$

Подчиняя это решение условиям (2.4), найдем постоянные

$$c_1 = -1 - \frac{\lambda^2 S \log \lambda - 1}{\lambda^2 - 1}, \qquad c_2 = \frac{\lambda^2(1 + S\log\lambda)}{\lambda^2 - 1}$$

Решение уравнения (2.5) ищем в виде $u_2 = X(x)T(\tau)$. Имеем

$$\frac{dT}{d\tau} + \alpha^2\nu_1 T = 0, \qquad \text{или} \qquad T = A(\alpha)e^{-\alpha^2\nu_1\tau} \tag{2.7}$$

Для функции $X(x)$ будет

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dX}{dx} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{x^2}\right)X = 0, \qquad X(1) = 0, \quad X(\lambda) = 0$$

Пусть

$$z_s = J_s(\alpha x) + qN_s(\alpha x) \tag{2.8}$$

где J_s и N_s — функции Бесселя порядка s, а q — постоянный параметр. Тогда $X = z_1(\alpha x)$. Согласно граничным условиям (2.5) имеем уравнения

$$z_1(\alpha) = 0, \qquad z_1(\lambda\alpha) = 0$$

которые определяют бесчисленное множество различных значений α и q. Поэтому наиболее общее решение уравнения (1.8), подчиненное всем граничным условиям, будет

$$u(x, \tau) = u_1(x) - \sum A(\alpha)\, z_1(\alpha x) \exp(-\alpha^2\nu_1\tau) \tag{2.9}$$

[1] Финци [2] эту задачу в общей постановке не рассматривает, а ограничивается несколькими простыми частными случаями.

Если A выбрать так, чтобы при $1 < x \leqslant \lambda$ имело место разложение

$$u_1(x) = \sum A z_1(\alpha x) \tag{2.10}$$

то начальное условие также выполняется. Исключение q из уравнений

$$J_1(\alpha) + qN_1(\alpha) = 0, \qquad J_1(\lambda\alpha) + qN_1(\lambda\alpha) = 0$$

дает трансцендентное уравнение для фундаментальных чисел $\alpha = \alpha_n$:

$$J_1(\alpha) N_1(\lambda\alpha) - J_1(\lambda\alpha) N_1(\alpha) = 0 \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) просто решается численно для данного λ. Для больших значений n корни его даются приближенной формулой

$$\alpha_n \approx \frac{n\pi}{\lambda - 1} \tag{2.12}$$

Коэффициенты разложения (2.10) определяются, так как на основании (2.5) функции $z_1(\alpha_n x)$ ортогональны в интервале $(1, \lambda)$. Имеем [3]

$$A = \frac{1}{N} \int_1^\lambda x u_1(x)\, z_1(\alpha x)\, dx \tag{2.13}$$

где

$$N = \int_1^x x z_1^2(\alpha x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\{z_1^2(\alpha x) - z_0(\alpha x)\, z_2(\alpha x)\}\right]_1^\lambda =$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2} z_0(\lambda, \alpha)\, z_2(\lambda, \alpha) + \frac{1}{2} z_0(\alpha)\, z_2(\alpha)$$

Переходя к функциям Бесселя низшего порядка и пользуясь граничными условиями, последнее выражение приводим к виду

$$N = \frac{\lambda^2}{2} z_0^2(\lambda\alpha) - \frac{1}{2} z_0^2(\alpha) + \frac{1}{\alpha}[z_0(\alpha)\, z_1(\alpha) - \lambda z_0(\lambda\alpha)\, z_1(\lambda\alpha)] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} z_0^2(\lambda\alpha) - \frac{1}{2} z_0^2(\alpha)$$

Из (2.8) при $s = 0$, а затем в силу граничных условий (2.5) имеем

$$z_0(\alpha) = J_0(\alpha) + qN_0(\alpha), \qquad q = -\frac{J_1(\alpha)}{N_1(\alpha)} = -\frac{J_1(\lambda\alpha)}{N_1(\lambda\alpha)}$$

Следовательно,

$$z_0(\alpha) = \frac{1}{N_1(\alpha)}[J_0(\alpha) N_1(\alpha) - J_1(\alpha) N_0(\alpha)] =$$

$$= -\frac{1}{N_1(\alpha)}[J_0(\alpha) N_0'(\alpha) - J_0'(\alpha) N_0(\alpha)]$$

В скобах стоит вронскиан функций Бесселя, который равен $2/\pi\alpha$, поэтому $z_0(\alpha)$ и аналогично $z_0(\lambda\alpha)$ будут равны:

$$z_0(\alpha) = -\frac{2}{\pi\alpha N_1(\alpha)}, \qquad z_0(\lambda\alpha) = -\frac{2}{\pi\alpha\lambda N_1(\lambda\alpha)} \tag{2.14}$$

Окончательное выражение для N имеет вид:

$$N = \int_1^\lambda x z_1^2(\alpha x)\, dx = \frac{2}{\pi^2\alpha^2}\left[\frac{1}{N_1^2(\lambda\alpha)} - \frac{1}{N_1^2(\alpha)}\right] \tag{2.15}$$

Интеграл, входящий в выражение (2.13) для A, вычисляется в конечном виде. Производя многократное интегрирование по частям и принимая во внимание граничные условия для u_1 и z_1, а также ранее приведенные интегралы из теории бесселевых функций, имеем [3]

$$\int_0^2 xu_1(x)\,z_1(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}\Big[xu_1(x)\,z_0(\alpha x)\Big]_1^\lambda + \frac{1}{\alpha}\int_1^\lambda z_0(\alpha x)\,[xu_1(x)]'\,dx =$$

$$= \frac{z_0(\alpha)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_1^\lambda z_0(\alpha x)\,(2c_1x + 2Sx\log x)\,dx =$$

$$= \frac{z_0(\alpha)}{\alpha} + \frac{2S}{\alpha^2}\Big[x\log xz_1(\alpha x)\Big]_1^\lambda - \frac{2S}{\alpha^2}\int_1^\lambda z_1(\alpha x)\,dx =$$

$$= \frac{z_0(\alpha)}{\alpha} + \frac{2S}{\alpha^2}\left[z_0(\lambda\alpha) - z_0(\alpha)\right]$$

Подставляя $z_0(\alpha)$ и $z_0(\lambda\alpha)$ согласно (2.14) имеем

$$\int_1^\lambda xu_2(x)\,z_1(\alpha x)\,dx = -\frac{4S}{\lambda\pi\alpha^4 N_1(\lambda\alpha)} + \frac{4S-2\alpha^2}{\pi\alpha^4\cdot N_1(\alpha)}$$

Таким образом, для коэффициентов A получим выражение

$$A = \frac{\lambda\pi N_1(\alpha)\,N(\alpha\lambda)}{\alpha^2\,[N_2{}^2(\alpha) - N_1{}^2(\lambda\alpha)]}\{\lambda(2S-\alpha^2)\,N_1(\lambda\alpha) - 2SN_1(\alpha)\} \qquad (2.16)$$

Вычисления, аналогичные приведенным в работе [4], показывают, что в момент $t=0$ напряжение бесконечно на внутренней границе $x=1$. При любом другом значении x получается конечное напряжение.

§ 3. Решение операционным методом. Допустим теперь, что цилиндр вращается по любому закону. Уравнение (1.8) имеет частное решение $-2\tau/Rx$. Поэтому, полагая

$$u = -\frac{2\tau}{Rx} + \omega(x,\tau)$$

получим однородное уравнение

$$RS\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\omega}{x^2}$$

Начальное и граничные условия для ω будут

$$\omega(x,0)=0 \quad (x>1) \qquad \omega(1,\tau) = f(\tau) + \frac{2\tau}{R}, \qquad \omega(\lambda,\tau) = \frac{2\tau}{\lambda R}$$

Пусть ω определяется из уравнения Карсона-Лапласа [5]

$$\Omega(x,p) = p\int_0^\infty e^{-p\tau}\,\omega(x,\tau)\,d\tau.$$

Тогда Ω определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Omega}{dx} - \left(\varkappa^2 + \frac{1}{x^2}\right)\Omega = 0 \qquad (\varkappa^2 = RSp) \qquad (3.1)$$

и подчиняется условиям

$$\Omega(1,p) = \varphi(p), \qquad \Omega(\lambda,p) = \frac{2}{\lambda Rp}, \qquad \Omega(x,\infty) = 0 \qquad (x>1)$$

Здесь функция $\varphi(p)$ определяется выражением

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau + \frac{2}{Rp}$$

Уравнение (3.1) заменой $y = i\varkappa x$ переходит в

$$\frac{d^2\Omega}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\Omega}{dy} + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{y^2}\right)\Omega = 0 \tag{3.2}$$

и имеет решение $\Omega = C_1 J_1(y) + C_2 N_1(y)$, где C_1 и C_2 — функции параметра p. Они определяются из уравнений

$$C_1 J_1(\beta) + C_2 N_1(\beta) = \varphi(p), \qquad C_1(\lambda\beta) + C_2 N_1(\lambda\beta) = \frac{2}{\lambda Rp}$$

Решая эти уравнения и полагая

$$D(\beta, x, y) = J_1(\beta x) N_1(\beta y) - J_1(\beta y) N_1(\beta x)$$

получаем

$$\Omega = \varphi(p)\frac{D(\beta, x, \lambda)}{D(\beta, 1, \lambda)} + \frac{2}{\lambda Rp}\frac{D(\beta, 1, x)}{D(\beta, 1, \lambda)} \tag{3.3}$$

Очевидно, $D(\beta, x, x) = 0$. Кроме того, из асимптотических формул бесселевых функций следует, что для больших значений аргумента

$$D(\beta, x, y) = \frac{2}{\pi\varkappa\sqrt{xy}}\operatorname{sh}\varkappa(y - x)$$

Исходя из этого, легко усмотреть, что Ω удовлетворяет всем поставленным условиям. Для нахождения ω применим вторую теорему разложения Хевисайда [5]. Теорема эта гласит: если изображение имеет вид $F_1(p)/F_2(p)$, то соответствующий оригинал будет

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_1(p_n)}{p_n F_2'(p_n)}\exp p_n\tau$$

где p_n — корни уравнения $F_2(p) = 0$

В нашем случае D — четная функция β и имеет корни вида $\varkappa = \pm i\alpha$, причем α — корень уравнения

$$D(\alpha, 1, \lambda) = J_1(\alpha) N_1(\lambda\alpha) - J_1(\lambda\alpha) N_1(\alpha) = 0$$

Далее,

$$\frac{\partial D}{\partial\beta} = Q(\beta) = J_1(\lambda\beta) N_0(\beta) - J_0(\beta) N_1(\lambda\beta) + \lambda\left[J_0(\lambda\beta) N_1(\beta) - J_1(\beta) N_0(\lambda\beta)\right]$$

Так как $Q(\beta)$ — нечетная функция β, то

$$\left[\varkappa\frac{\partial D}{\partial\varkappa}\right]_{\varkappa=\pm i\alpha} = -\alpha Q(\alpha)$$

При составлении оригинала методом Хевисайда нужно попарно объединить члены, соответствующие $\pm\alpha$. Для малых значений β

$$J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2}, \qquad N_1(\beta) = -\frac{2}{\pi\beta}$$

Поэтому, переходя к пределу при $\beta \to 0$, получаем

$$\frac{D(0, x, \lambda)}{D(0, 1, \lambda)} = \frac{\lambda^2 - x^2}{x(\lambda^2 - 1)}, \qquad \frac{D(0, 1, x)}{D(0, 1, \lambda)} = \frac{\lambda(x^2 - 1)}{x(\lambda^2 - 1)}$$

Следовательно,

$$\frac{D(\beta, x, \lambda)}{D(\beta, 1, \lambda)} \to \frac{\lambda^2 - x^2}{x(\lambda^2 - 1)} - 2\sum \frac{D(\alpha, x, \lambda)}{\alpha Q(\alpha)} e^{-\alpha^2 \nu_1 \tau} = f_1(\tau) \tag{3.4}$$

$$\frac{D(\beta, 1, x)}{D(\beta, 1, \lambda)} \to \frac{\lambda(x^2 - 1)}{x(\lambda^2 - 1)} - 2\sum \frac{D(\alpha, 1, x)}{\alpha Q(\alpha)} e^{-\alpha^2 \nu_1 \tau} = f_2(\tau) \tag{3.5}$$

По теореме Бореля

$$\omega(x, \tau) = \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \varphi(\xi) f_1(\tau - \xi)\, d\xi + \frac{2}{\lambda R} \int_0^\tau f_2(\tau - \xi)\, d\xi$$

Таким образом, после преобразований окончательно получаем

$$u(x, \tau) = 2\nu_1 \sum \frac{\alpha D(\alpha, x, \lambda)}{Q(\alpha)} e^{-\alpha^2 \nu_1 \tau} \int_0^\tau f(\xi)\, e^{-\alpha^2 \nu_1 \xi}\, d\xi - \tag{3.6}$$

$$- \frac{4S}{\lambda} \sum \frac{D(\alpha, 1, x) + \lambda D(\alpha, x, \lambda)}{\alpha^3 Q(\alpha)} \left[1 - e^{-\alpha^2 \nu_1 \tau}\right] + f(\tau) \left\{ \frac{\lambda^2 - x^2}{x(\lambda^2 - 1)} - 2\sum \frac{D(\alpha, x, \lambda)}{\alpha Q(\alpha)} \right\}$$

Легко видеть, что и $u(x, \tau)$ удовлетворяет граничным условиям. Для этого достаточно заметить, что величины D исчезают при $x = 1$ и λ.

Чтобы показать выполнение начального условия, заметим что

$$\frac{\lambda^2 - x^2}{x(\lambda^2 - 1)} - 2\sum \frac{D(\alpha, x, \lambda)}{\alpha Q(\alpha)} = \begin{cases} 0 & (1 < x \leqslant \lambda) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \tag{3.7}$$

Убедиться в этом можно, разлагая функцию $(\lambda^2 - x^2)/(\lambda^2 - 1)$ по функциям $D(\alpha, x, \lambda)$ в интервале $(1 < 1 \leqslant \lambda)$. Здесь эти вычисления не приводятся. Если, в частности, $f(\tau) = 1$, то будет (3.8)

$$u = \frac{\lambda^2 - x^2}{x(\lambda^2 - 1)} - 2\sum \frac{D(\alpha, x, \lambda)}{x Q(\alpha)} e^{-\alpha^2 \nu_1 \tau} - \frac{4S}{\lambda} \sum \frac{D(\alpha, 1, x) + \lambda D(\alpha, x, \lambda)}{\alpha^3 Q(\alpha)} \left[1 - e^{-\alpha^2 \nu_1 \tau}\right]$$

Допустим теперь, что среда неограниченная, а цилиндр вращается с постоянной скоростью. В этом случае в решении уравнения (3.2) отбрасываем нерегулярную функцию Бесселя и представляем его в виде

$$\Omega = \left(1 + \frac{2}{Rp}\right) \frac{K_1(\varkappa x)}{K(\varkappa)}, \qquad \Omega \approx \left(1 + \frac{2}{Rp}\right) \frac{e^{-\varkappa(x-1)}}{\sqrt{x}}$$

где K_1 — функция Бесселя второго рода мнимого аргумента, а второе выражение справедливо для больших значений $\varkappa$. Для малых τ имеем

$$\omega(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{\nu_1 \tau}}\right) + \frac{2}{R\sqrt{x}} \int_0^\tau \Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{\nu_1(\tau - y)}}\right) dy \tag{3.9}$$

Здесь

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-y^2}\, dy$$

Для тех же значений τ

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\exp(-4\nu_1 \tau)}{\sqrt{\pi \nu_1 \tau x}} - \frac{2}{R\sqrt{\pi \nu_1 x}} \int_0^\tau \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{4\nu_1(\tau - y)}\right\} dy$$

Это выражение показывает, что $\partial\omega / \partial x$ обращается в $-\infty$, как $-\tau^{-1/2}$, т. е. в бесконечность такого же порядка будет обращаться напряжение на внутренней границе среды. Заметим, что ω и $\partial\omega / \partial x$ исчезают в начальный момент при любом другом x.

§ 4. Интеграл Фурье. Будем исходить из уравнения (1.8), которое при $u = \omega - 2\tau / Rx$ переходит в

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = \nu_1 \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\omega}{x^2} \right) \tag{4.1}$$

Было показано, что уравнение имеет решение вида

$$[AJ_1(\alpha x) + BN_1(\alpha x)] \exp(-\alpha^2\nu_1\tau)$$

при произвольном α. В таком случае

$$\omega(x, \tau) = \int_0^\infty [A(\alpha) J_1(\alpha x) + B(\alpha) N_1(\alpha x)] \exp(-\alpha^2\nu_1\tau) \tag{4.2}$$

тоже будет решением уравнения (3.1). В работе Финци [2] этот интеграл приводится как общее решение уравнения (4.1).

Однако решением (4.2) нельзя удовлетворить граничным условиям поставленной задачи. Но частным выбором функций A и B можно получить некоторые другие интегралы, аналогичные тем, которые встречаются в теории теплопроводности. Так, при $A = \alpha^2$, $B = 0$ получаем

$$\omega(x, \tau) = \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha x) \exp(-\alpha^2\nu_1\tau)\, d\alpha = \frac{x}{4\nu_1{}^2 t^2} \exp\frac{-x^2}{4\nu_1\tau} \tag{4.3}$$

Так как в (4.1) переменная τ не входит, то выражение

$$\int_0^\tau \varphi(y) \frac{x}{4\nu_1{}^2(\tau - y)^2} \exp\frac{-x^2}{4\nu_1(\tau - y)}\, dy \tag{4.4}$$

также является решением уравнения (4.1), причем $\varphi(y)$ — произвольная функция. Полагая $\varphi = \nu_1$ и интегрируя, получим

$$\int_0^\tau \frac{x}{4\nu_1(\tau - y)^2} \exp\frac{-x^2}{4\nu_1(\tau - y)}\, dy = \frac{1}{x} \exp\frac{-x^2}{4\nu_1\tau} \tag{4.5}$$

Если здесь положить $\nu_1 = \infty$ $(\rho = 0)$, то получится решение, указанное в работе Финци. Из (4.5) можно образовать новое решение:

$$\omega(x, \tau) = \frac{1}{x} \int_0^\tau \psi(y) \exp\frac{-x^2}{4\nu_1(\tau - y)}\, dy \tag{4.6}$$

Эти решения удовлетворяют нулевому начальному условию и регулярны на бесконечности. Функции φ и ψ определяются из условий на внутренней границе.

Если, например, цилиндр из состояния покоя приводится во вращение по закону $u(1, \tau) = f(\tau)$, то функция ψ является решением уравнения Вольтерра

$$f(\tau) + \frac{2\tau}{R} = \int_0^\tau \psi(y) \exp\frac{-1}{4\nu_1(\tau - y)}\, dy \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) сравнительно просто решается методом операционного исчисления. Если же движение начинается не из состоянии покоя; то следует комбинировать решения вида (4.5) с другими, удовлетворяющими ненулевому начальному условию.

Положим, например, что цилиндр мгновенно приведен во вращение с постоянной скоростью. Из (4.2) при $\tau = 0$ следует

$$\omega(x, 0) = \int_0^\infty [AJ_1(\alpha x) + BN_1(\alpha x)]\, dx = \begin{cases} 0 & (a > 1) \\ 1 & x = 1) \end{cases} \tag{4.8}$$

Это уравнение удовлетворяется, если положить $A = 2J_2(\alpha)$ и $B = 0$, так как тогда поучаем известный разрывный интеграл Вебера

$$\int_0^\infty J_n(ax) J_{n-1}(bx) dx = \begin{cases} 0 & (b > a) \\ \frac{1}{2a} & (b = a) \end{cases}$$

Следовательно, функция $u = u(x, \tau)$ (4.9)

$$u = -\frac{2\tau}{Rx} + \frac{1}{x}\int_0^\tau \psi(y) \exp\frac{-x^2}{4\nu_1(\tau - y)}\, dy + 2\int_0^\infty J_2(\alpha) J_1(\alpha x) \exp(-\alpha^2 \nu_1 \tau)\, d\alpha$$

является решением уравнения и удовлетворяет начальному условию (4.8).

Обозначим

$$-\frac{2\tau}{R} + 2\int_0^\infty J_2(\alpha) J_1 \alpha \exp(-\alpha^2 \nu_1 \tau)\, d\alpha = g(\tau) \tag{4.10}$$

Решение $u(x, \tau)$ удовлетворяет условию постоянства скорости цилиндра, если функция ψ в (4.9) определена из уравнения Вольтерра

$$\int_0^\tau \psi(y) \exp\frac{-1}{4\nu_1(\tau - y)}\, dy = 1 - g(\tau)$$

В заключение отметим, что рассматриваемой здесь задачей занимался П. М. Огибалов [6], но он инерционных членов не учитывал. Как показано в работе [4], это допустимо при числах Рейнольдса, имеющих определенную величину.

Поступила в редакцию
16 IV 1948

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. К вопросу о вязко-пластичном течении материала. Труды конференции по пластическим деформациям. 1938.
2. Finzi. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. 1936. Vol. 23. No. 10.
3. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. ОНТИ. 1935.
4. Бахшиян Ф. А. К вязко-пластическому течению при ударе цилиндра по пластинке. ПММ. 1948. Т. XII. № 1.
5. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики. 1938.
6. Огибалов П. М. О распространении вязко-пластичного течения с учетом упрочнения для случая вращения и сдвига. ПММ. 1941. Т. V. № 1.