Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

# НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

М. Я. Леонов
(Львов)

1. В настоящей статье решаются некоторые вопросы устойчивости (в смысле Ляпунова) для систем, возмущенное движение которых описывается уравнениями следующего вида:

$$G(t)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dG}{dt}+2\nu\right)\frac{dz}{dt}+D(t)\,z=0 \qquad (1.1)$$

В частности, рассматриваются простейшие задачи устойчивости динамически сжатых упругих систем.

Функции $G$ и $2\nu$ представляют здесь приведенную массу и коэффициент трения соответственно. Эти функции всегда положительны. Функция $D$ (жесткость) может не обладать этим свойством, но средняя ее величина за весь рассматриваемый период времени предполагается положительной. Кроме того, функции $G$, $\nu$, $D$ должны удовлетворять общим условиям, при которых существует интеграл уравнения (1.1).

Применяя подстановку

$$\tau=\int\frac{dt}{G}, \qquad z=y\exp-\int\nu\,d\tau \qquad (1.2)$$

преобразуем уравнение (1.1) к виду

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+\theta(\tau)\,y=0 \qquad \left(\theta=DG-\nu^2-\frac{d\nu}{d\tau}\right) \qquad (1.3)$$

Как показано в работе автора[1], система может быть неустойчива только тогда, когда произведение приведенной массы на жесткость может убывать в достаточно сильной степени. Устойчивость в смысле Ляпунова обеспечивается условием

$$\frac{d}{dt}[G(t)\,D(t)]\geqslant-4\nu(t)\,D(t)$$

Во всяком случае при постоянном произведении приведенной массы на жесткость система устойчива. При этом (1.1) сводится к уравнению (1.3) с постоянными коэффициентами, если $\nu=\mathrm{const}$ или $\nu\approx0$.

Решение уравнения (1.3) будем представлять в виде

$$y(\tau)=f(\tau)\sin\varphi(\tau) \qquad (1.4)$$

Для определимости функций $f$, $\varphi$ можно наложить еще одну зависимость между функциями $f$, $\varphi$, $y$ весьма произвольного характера. Мы положим

$$y'(\tau) = u(\tau) f(\tau) \cos\varphi(\tau) \qquad \left(y' = \frac{dy}{d\tau}\right) \tag{1.5}$$

причем $u$ — пока неопределенная дифференцируемая функция, не равная нулю. В дальнейшем будем считать $u > 0$.

Дифференцируя (1.4) и (1.5) и исключая $y$, $y'$, $y''$ из полученных таким образом уравнений и уравнений (1.3), (1.4) и (1.5), получим

$$f' \sin\varphi + \varphi' f \cos\varphi = u f \cos\varphi, \qquad f' u \cos\varphi - \varphi' u f \sin\varphi = -u' f \cos\varphi - \theta f \sin\varphi$$

Эти уравнения разрешаются относительно $\varphi'$ и $f'/f$, так как детерминант $\Delta$, составленный из коэффициентов перед этими неизвестными, не равен нулю ($\Delta = -u$), если $u > 0$. При этом находим

$$2\varphi' - \left(u + \frac{\theta}{u}\right) = \left(u - \frac{\theta}{u}\right)\cos 2\varphi + \frac{u'}{u}\sin 2\varphi \tag{1.6}$$

$$2\frac{f'}{f} + \frac{u'}{u} = \left(u - \frac{\theta}{u}\right)\sin 2\varphi - \frac{u'}{u}\cos 2\varphi \tag{1.7}$$

Начальные значения $\varphi(0)$ и $f(0)$ определяются формулами

$$\operatorname{tg}\varphi(0) = \frac{u(0)\,y(0)}{y'(0)} \qquad f(0) = \pm\sqrt{y^2(0) + \left[\frac{y'(0)}{u(0)}\right]^2}$$

причем без ограничения общности будем в дальнейшем считать

$$0 \leqslant \varphi(0) < \pi \tag{1.8}$$

При этом в формуле для значения функции $f(0)$ берется положительный знак, если $y(0) > 0$, и $f(0) < 0$, если $y(0) < 0$.

Возведя в квадрат левые и правые стороны уравнений (1.6) и (1.7) и складывая их, получим

$$\left[2d\varphi - \left(u + \frac{\theta}{u}\right)d\tau\right]^2 + \left[d\left(\log f^2 u\right)\right]^2 = \left[\left(u - \frac{\theta}{u}\right)^2 + \left(\frac{u'}{u}\right)^2\right]d\tau^2$$

Предполагая здесь все функции действительными, имеем

$$\left[\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1) - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(u - \frac{\theta}{u}\right)d\tau\right]^2 + \left[\log\frac{f(\tau_2)\sqrt{u(\tau_2)}}{f(\tau_1)\sqrt{u(\tau_1)}}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{\left(u - \frac{\theta}{u}\right)^2 + \left(\frac{u'}{u}\right)^2}\,d\tau\right]^2 \tag{1.9}$$

Справедливость этого неравенства следует из теоремы о модуле интеграла от комплексной функции

$$\left|\int_L dZ\right| \leqslant \int_L |dZ|, \qquad Z = \varphi - \frac{1}{2}\int\left(u + \frac{\theta}{u}\right)d\tau + \sqrt{-1}\log f\sqrt{u}$$

**2.** В дальнейшем ограничимся случаем периодических функций $G$, $D$, $\nu$, $u$ с общим положительным периодом $a$. При этом могут существовать действительные решения уравнения (1.6), удовлетворяющие при некотором целом числе $n$ условию

$$\varphi(a) = \varphi(0) + n\pi \tag{2.1}$$

Будем называть эти решения резонансными фазами. Согласно формуле (1.4) и (1.5) имеем $\operatorname{tg}\varphi = uy / y'$. При условии (2.1) $\operatorname{tg}\varphi$ является периодической функцией, из чего следует, что при резонансных фазах имеет место условие

$$y(a) / y'(a) = y(0) / y'(0) \tag{2.2}$$

Любое решение уравнения (1.3) определяется через значения $y(na)$ и $y'(na)$ следующим образом:

$$y(na + \tau) = y(na)\, y_1(\tau) + y'(na)\, y_2(\tau) \tag{2.3}$$

где $y_1$, $y_2$ — решения уравнения (1.3), удовлетворяющие условиям

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1$$

При этом пропорцию (2.2) можно представить в виде уравнения

$$\frac{y(0)\, y_1(a) + y'(0)\, y_2(a)}{y(0)\, y_1'(a) + y'(0)\, y_2'(a)} = \frac{y(0)}{y'(0)} \tag{2.4}$$

или

$$y_1'(a)\sin^2\varphi(0) - [y_1(a) - y_2'(a)]u(0)\sin\varphi(0)\cos\varphi(0) -$$
$$- y_2(a)\, u^2(0)\cos^2\varphi(0) = 0 \tag{2.5}$$

Это уравнение является квадратным относительно $\operatorname{tg}\varphi(0)$ или $\operatorname{ctg}\varphi(0)$. Каждому его корню будет при условии (1.8) соответствовать только одно значение $\varphi(0)$. Пользуясь тождеством Абеля

$$y_1(\tau)\, y_2'(\tau) - y_1'(\tau)\, y_2(\tau) = c = \mathrm{const} \tag{2.6}$$

можно установить, что указанное уравнение будет иметь два действительных решения, если

$$A > 2, \qquad A = |\, y_1(a) + y_2'(a) \,| \tag{2.7}$$

При условии (2.7), как известно [2, 3], общий интеграл уравнения (1.3) неограниченно растет на бесконечности.

Ни одного действительного корня уравнения (2.5) не будет тогда и только тогда, когда $A < 2$ (а при этом, как известно, система устойчива), т. е. отсутствие резонансных фаз является достаточным условием динамической устойчивости.

Если хотя бы некоторые коэффициенты уравнения (2.6) отличны от нуля, то по свойству квадратного уравнения заключаем, что не существует более двух фаз, удовлетворяющих условию (2.1) и (1.8). Более двух таких фаз может существовать лишь тогда, когда все коэффициенты уравнения (2.5) равны нулю, т. е. когда

$$y_2(a) = y_1'(a) = 0, \qquad y_1(a) - y_2'(a) = 0 \tag{2.8}$$

При этом любое отношение $y(0) / y'(0)$ удовлетворяет условию (2.4) и, следовательно, любое решение уравнения (1.6) является резонансным, т. е. удовлетворяет условию (2.1).

В случае (2.8) находим из тождества Абеля (2.6) при $c=1$, что

$$y_1(a) = y_2'(a) = \pm 1$$

Используя (2.3) и первые условия (2.8), найдем, что $y_1$, $y_2$, а также и общий интеграл уравнения (1.3) являются периодическими функциями (с периодом $a$, если в последнем равенстве имеет место верхний знак, и с периодом $2a$, если нижний). Следовательно, система устойчива, если любая фаза является резонансной.

Известно, что при $A=2$ в общем случае (исключая особый случай выполнения условия 2.8) общий интеграл уравнения (1.3) можно выразить через две периодические функции $v_1$, $v_2$ в виде

$$y = (A + B\tau) v_1 + Bv_2 \tag{2.9}$$

В этом и только в этом случае уравнение (2.5) имеет только один вещественный корень и существует только одна резонансная фаза.

Как видно из формул (1.2) и (2.9), в последнем случае в системе с трением ($\nu > 0$) общий интеграл будет всегда исчезающим на бесконечности.

Сказанное выше можно сформулировать в следующем виде.

I. *Существование только одной или двух резонансных фаз, т. е. действительных решений уравнения* (1.6), *удовлетворяющих условиям* (2.1) *и* (1.8), *является необходимым и достаточным условием неустойчивости решения уравнения* (1.3).

II. Существование двух и только двух резонансных фаз является необходимым условием неустойчивости решения уравнения (1.1) при $\nu > 0$.

*Следствие*: невозможность существования резонансных фаз является достаточным признаком устойчивости. Это условие выполняется в тех случаях, когда возможно подобрать функцию $u$ такую, что при любом целом числе $n$ выполняется неравенство

$$\left| 2\pi n - \int_0^a \left(u + \frac{\theta}{u}\right) d\tau \right| > \varepsilon_u, \qquad \varepsilon_u = \int_0^a \sqrt{\left(u - \frac{\theta}{u}\right)^2 + \left(\frac{u'}{u}\right)^2}\, d\tau \tag{2.10}$$

При этом согласно неравенству (1.9) не может существовать решения, удовлетворяющего условию (2.1).

**3.** Рассмотрим для примера случай, когда колебания системы описываются уравнением Матье, исследованию которого посвящено [4] много работ, т. е. пусть

$$y'' + k^2 (1 + h \sin 2p\tau) y = 0 \qquad (p, k, h = \text{const} > 0) \tag{3.1}$$

Полагая $u = k$, найдем согласно условию (2.10), что неустойчивость возможна только при

$$\pi \mid pn - k \mid < hk \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

Представим резонансную фазу в виде

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + np\tau + \alpha \tag{3.3}$$

При этом получим из (1.6) следующее:

$$\alpha(\tau) = (k - pn)\tau + \frac{kh}{2}\int_0^{\tau} \sin 2p\tau\,[1 - \cos 2(\varphi_0 + np\tau + \alpha)]\,d\tau \qquad (u = k) \tag{3.4}$$

При $h \gg 1$ и и при условии (3.2) $\alpha$ является малой величиной порядка $h$. Пренебрегая ею в правой части формулы (3.4), получим

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{\pi}{p}\right) &= \left[k - p + \frac{kh}{4}\sin 2\varphi(0)\right]\frac{\pi}{p} \qquad && \text{при } n = 1 \\ \alpha\left(\frac{\pi}{p}\right) &= (k - pn)\frac{\pi}{p} && \text{при } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Имея в виду, что функция (3.3) должна удовлетворять условию (2.1) и что в данном случае $a = \pi / p$, получим $\alpha(\pi / p) = 0$ и, следовательно, с точностью до малых высшего порядка малости в неустойчивой системе $p$, $k$, $h$ связаны условиями

$$4|p - k| \leqslant hk \qquad \text{при } n = 1 \tag{3.6}$$

Для $h \leqslant 1$ ошибка [5] формулы (3.6) не превышает 5%.

Сопоставляя условие (3.6) с условием (3.2), можно сделать вывод: *достаточное условие устойчивости* (2.10) *может близко примыкать к необходимому, когда частота основной гармоники функции $\theta$ в два раза больше средней частоты колебний системы.*

**4.** Перейдем к исследованию устойчивости с учетом трения ($\nu > 0$). Неустойчивая система при этом по условию II § 2 должна иметь две резонансные фазы. Обозначим их через $\varphi_1$, $\varphi_2$, а соответствующие им «резонансные» амплитуды через $f_1$, $f_2$.

Согласно тождеству Абеля (2.6) и формул (1.4), (1.5) имеем

$$f_1(a) f_2(a) \sin[\varphi_1(a) - \varphi_2(a)] = f_1(0) f_2(0) \sin[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] \tag{4.1}$$

Кроме того, по определению резонансных фаз следует

$$\varphi_1(a) - \varphi_2(a) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) \neq \pi n' \qquad (n' = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что равенство (4.1) возможно только при условии

$$f_1(a) f_2(a) = f_1(0) f_2(0) \qquad \text{или} \qquad \log\frac{f_1(a)}{f_1(0)} = -\log\frac{f_2(a)}{f_2(0)}$$

Так как функции $f_1 \sin\varphi_1$, $f_2 \sin\varphi_2$ линейно независимы, то общий интеграл уравнения (1.3) дается их линейной комбинацией.

Отсюда следует, что согласно формуле (1.2) общий интеграл уравнения (1.1) будет неограниченно расти тогда и только тогда, когда

$$\int_0^a \nu\,d\tau < \left|\log\frac{f(a)}{f(0)}\right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^a \left[\left(u - \frac{\theta}{u}\right)\sin 2\varphi - \frac{u'}{u}\cos 2\varphi\right] d\tau\right| \tag{4.3}$$

Здесь $f$ и $\varphi$ обозначают любые резонансные амплитуду и фазу.

Подставляя условия (4.3) и (2.1) в неравенство (1.9), находим, что неустойчивая система при некотором целом числе $n$ должна удовлетворять условию

$$\left[\pi n - \frac{1}{2}\int_0^a \left(u + \frac{\theta}{u}\right) d\tau\right]^2 + \left[\int_0^a \nu\, d\tau\right]^2 < \frac{\varepsilon_u^2}{4} \tag{4.4}$$

Левая часть этого неравенства при $u \approx \sqrt{\theta}$ в основном определяется средними величинами функций $\theta$ и $\nu$, правая же часть согласно (2.10) может неограниченно уменьшаться при стремлении $\theta$ к постоянной. Условие (4.4) показывает, что близость функции $\theta$ к постоянной для неустойчивых систем ограничивается некоторыми пределами. Во всяком случае эти пределы будут нарушены, если можно подобрать такую функцию $u$, что при любом целом $n$ удовлетворяется условие

$$\left[\pi n - \frac{1}{2}\int_0^a \left(u + \frac{\theta}{u}\right) d\tau\right]^2 + \left[\int_0^a \nu\, d\tau\right]^2 \geqslant \frac{\varepsilon_u^2}{4} \tag{4.5}$$

При выполнении условия (4.5) система будет устойчива. Тем более она будет устойчива, когда

$$2\int_0^a \nu\, d\tau \geqslant \varepsilon_u \tag{4.6}$$

Условия (4.6), (4.5) и (2.10) особенно удобны для случаев, когда $\theta$ почти всюду мало отличается от некоторой, медленно изменяющейся функции (которую и можно выбрать в качестве $u$, причем $\varepsilon_u$ будет малой величиной). Ко всем этим условиям применим вывод § 3.

В качестве примера рассмотрим устойчивость при следующих данных:

$$\nu = \nu_0 = \mathrm{const}, \qquad GD = k^2 + \nu_0^2 + k^2 h \sin 2p\tau \tag{4.7}$$

Уравнением (1.3) для этого случая является уравнение Матье (3.1). Условие устойчивости (4.6) равносильно условию

$$\pi\nu_0 \geqslant kh \qquad (u = k) \tag{4.8}$$

Для определения условий, при которых имеет место неустойчивость, воспользуемся (4.3). При этом замечаем, что согласно (1.7)

$$\log\frac{f(a)}{f(0)} = -\frac{kh}{2}\int_0^a \sin 2p\tau \sin 2\varphi\, d\tau \tag{4.9}$$

Подставляя сюда формулу (3.3) и считая в ней $\alpha \equiv 0$, получим

$$4p\left|\log\frac{f(a)}{f(0)}\right| = \pi kh\,|\cos 2\varphi(0)| \tag{4.10}$$

Из первой формулы (3.5) и условия (3.6) следует

$$kh \sin 2\varphi(0) = 4(p-k) \tag{4.11}$$

Следовательно, из (4.11), (4.10) и (4.3) найдем, что (с точностью до малых высшего порядка) система будет неустойчивой при

$$\nu_0 < \frac{1}{4}\sqrt{k^2h^2 - 16(p-k)^2} \tag{4.12}$$

Это условие при $p=k$ близко примыкает к условию (4.8) и является обобщением формулы (3.6).

**5.** Используем условие (4.5) в предположениях частного характера. Если функция $\theta$ имеет только один относительный минимум и этот минимум больше нуля, то, полагая

$$u=\sqrt{\theta}, \qquad \int_0^a \sqrt{\theta}\, d\tau \leqslant \frac{3}{2}\pi \tag{5.1}$$

получим из (4.5) достаточный признак устойчивости в виде

$$\left[\pi-\int_0^a \sqrt{\theta}\, d\tau\right]^2+\left[\int_0^a \nu\, d\tau\right]^2 \geqslant \left[\frac{1}{2}\log\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right]^2 \tag{5.2}$$

Для случаев, когда средняя величина функции $\sqrt{\theta}$ может принимать значения, близкие $\pi / a$, целесообразно пользоваться более простым признаком устойчивости:

$$\int_0^a 2\nu\, d\tau \geqslant \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \tag{5.3}$$

Этот признак справедлив независимо от выполнения второго условия (5.1), поскольку при его выполнении условие (4.5) будет всегда удовлетворяться.

В случае, когда $\sqrt{\theta}$ почти всюду мало отклоняется от некоторой величины $u_c=\text{const}$, целесообразно положить $u=u_c$. Тогда найдем, что достаточное условие устойчивости (4.5) удовлетворится, если можно подобрать такое число $u_c$, что

$$\int_0^a 2\nu\, d\tau \geqslant \int_0^a \left|u_c-\frac{\theta}{u_c}\right| d\tau \tag{5.4}$$

Правая часть (5.4) является функцией одного переменного $u_c$. Иногда целесообразно определить $u_c$ как то значение, при котором эта функция принимает минимум. Пока положим

$$u_c=u_{\text{ср}}=\sqrt{\theta_{\text{ср}}}\,, \qquad \theta_{\text{ср}}=\frac{1}{a}\int_0^a \theta\, d\tau \tag{5.5}$$

Это значение $u_c=u_{\text{ср}}$ может минимизировать правые части уравнений (5.4) и (4.5) только тогда, когда сумма отрезков времени, на которых $\theta \leqslant \theta_{\text{ср}}$, превышает сумму отрезков, на которых $\theta > \theta_{\text{ср}}$.

Полагая в (4.5) $u=u_{\text{ср}} \leqslant 3\pi / 2a$, условие устойчивости можно представить в виде

$$(\pi-au_{\text{ср}})^2+\left(\int_0^a \nu\, d\tau\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\int_0^a \left|u_{\text{ср}}-\frac{\theta}{u_{\text{ср}}}\right| d\tau\right)^2 \tag{5.6}$$

которое будет удовлетворяться, если

$$|\pi-au_{\text{ср}}| \geqslant \frac{1}{2}\int_0^a \left|u_{\text{ср}}-\frac{\theta}{u_{\text{ср}}}\right| d\tau \tag{5.7}$$

Сопоставляя последнее с известным достаточным условием устойчивости Ляпунова

$$a\int_0^a \theta\, d\tau \leqslant 4 \quad \text{или} \quad au_{\text{ср}} \leqslant 2 \qquad (\theta > 0)$$

найдем, что условие (5.7) является более широким во всяком случае, когда правая часть этого условия меньше $\pi - 2$.

Рассмотрим еще случай, когда

$$\begin{aligned} &\theta(\tau) = \Omega^2 = \text{const} \qquad &\text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant b \\ &\theta(\tau) = \Omega^2 + q(\tau) \qquad &\text{при } b < \tau < a \end{aligned} \tag{5.8}$$

Считая, что функция $q(\tau)$ не меняет знака, и полагая в (4.5) $u' = 0$, можно найти, что правая часть этого неравенства будет минимумом относительно переменной $u$ при $u = \Omega$, если

$$b \geqslant \frac{a}{4} + \frac{\pi}{4\Omega} + \frac{1}{8\Omega^2}\int_b^a q\, d\tau \tag{5.9}$$

При этом достаточное условие устойчивости (4.5) примет вид

$$\left(\pi - a\Omega - \frac{S}{2\Omega}\right)^2 + \left(\int_0^a \nu\, d\tau\right)^2 \geqslant \left(\frac{S}{2\Omega}\right)^2 \qquad \left(S = \int_a^a q\, d\tau\right) \tag{5.10}$$

**6.** Ниже ограничимся применением полученных результатов к решению некоторых задач по устойчивости динамических сжатых упругих систем, когда удовлетворяются условия:

1) продольные усилия в сечениях системы изменяются синхронно;

2) формы свободных изгибных колебаний совпадают с формами потери статической устойчивости (в смысле Эйлера).

В общем случае эти условия налагают существенные ограничения на изменения внешних сил хотя бы потому, что обычно при переменных сжимающих нагрузках продольные усилия распространяются волнообразно и, следовательно, изменяются во времени не синхронно.

Простейшими примерами выполнения поставленных условий являются свободное кольцо и сферическая оболочка постоянной толщины при равномерной динамической нагрузке. Изгибные колебания подобных систем можно представить одной функцией в виде

$$w = \sum R_i T_i \tag{6.1}$$

где $R_i$ — функция положения точки системы, представляющая форму свободных колебаний системы, $T_i$ — функция времени, удовлетворяющая (при некоторых дополнительных предположениях относительно сил трения) уравнению

$$\frac{d^2T_i}{dt^2} + 2\nu_i\frac{dT_i}{dt} + \omega_i^2\left[1 - \frac{P(t)}{P_i}\right]T_i = 0 \tag{6.2}$$

Здесь $P(t)$ — усилие в каком-либо сечении, $P_i$ — критическое значение этого усилия, вызывающего потерю статической устойчивости $i$-й формы, $\omega_i$ — собственная частота колебаний $i$-й формы при $P(t) \equiv \nu_i \equiv 0$.

Уравнение (6.2) получено разными авторами[5, 6, 7, 8] при предположениях частного характера.

Коэффициент $\nu_i$ в рамках задачи, поставленной в данной работе, может зависеть от времени. В частности, можно предположить, что $\nu_i$ зависит только от $P(t)$. Эту зависимость можно установить экспериментально, определяя логарифмический декремент $\eta_c$ затухания малых свободных колебаний $i$-й формы при $P(t)=P_c=\mathrm{const}$. При этом из формул теории гармонических колебаний следует, что

$$\nu_i=\eta_c\left(\pi^2+\eta_c^2\right)^{-1/2}\omega_i\left(1-\frac{P_c}{P_i}\right)^{1/2} \tag{6.3}$$

Имея зависимость $\eta_c=F(P_c)$, полученную экспериментально, можно найти $\nu_i=\nu_i\{P(t)\}$.

Если коэффициент трения является постоянным в некоторой области значений $P_{\min}\leqslant P\leqslant P_{\max}$, то для любых двух значений $P_1$, $P_2$, находящихся в этой области, соответствующие декременты затухания $\eta_1$ и $\eta_2$ будут связаны соотношением

$$\frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}=\frac{P_i-P_2}{P_i-P_1}\,\frac{\pi^2+\eta_1^2}{\pi^2+\eta_2^2} \tag{6.4}$$

т. е. при малых $\eta$ квадрат декремента изменяется приблизительно обратно пропорционально запасу силы на статическую устойчивость.

Будем пока предполагать, что хотя бы в небольшой области значений $P$ изменение $\eta$ подчиняется формуле (6.4). Считая, что $P(t)$, $P_c$ принадлежит этой области, и преобразуя (6.2) к виду (1.3), получим

$$\theta=\omega_i^2\left(1-\frac{P_c}{P_i}\right)\left[\frac{\pi^2}{\pi^2+\eta_c^2}-\frac{P(t)-P_c}{P_i-P_c}\right]\qquad (t=\tau) \tag{6.5}$$

В дальнейшем для краткости обозначим

$$\omega_i\left(1-\frac{P_c}{P_i}\right)^{1/2}=\omega_c,\qquad P(t)-P_c=p(t),\qquad P_i-P_c=p_i \tag{6.6}$$

причем представим

$$\theta=\omega_c^2\left[\frac{\pi^2}{\pi^2+\eta_c^2}-\frac{p(t)}{p_i}\right] \tag{6.7}$$

Подставляя это в условия (5.2), (5.6) и (5.10), можем определить ограничения, которые налагают эти признаки на функцию $p(t)$.

7. Для использования условия (5.2) будем считать, что

$$p(t)<\frac{\pi^2 p_i}{\pi^2+\eta_c^2},\qquad \int\limits_0^a\sqrt{\frac{\pi^2}{\pi^2+\eta_c^2}-\frac{p(t)}{p_i}}\,dt=\frac{\pi a}{\sqrt{\pi^2+\eta_c^2}} \tag{7.1}$$

Последнюю формулу следует рассматривать в задачах данного параграфа только как уравнение для определения $P_c$.

Подставляя (6.7), (6.4) в (5.2), получим при условии (7.1), что достаточным признаком устойчивости динамической сжатой упругой системы будет

$$\left(\pi-\frac{\pi\omega_c a}{\sqrt{\pi^2+\eta_c^2}}\right)^2+\frac{\eta_c^2\omega_c^2a^2}{\pi^2+\eta_c^2}\geqslant\left[\frac{1}{2}\log\frac{\pi^2p_i-(\pi^2+\eta_c^2)\,p_{\min}}{\pi^2p_i-(\pi^2+\eta_c^2)\,p_{\max}}\right]^2 \tag{7.2}$$

Левая часть этого неравенства достигает относительного минимума по переменной $a$ при

$$a=\frac{\pi^2}{\omega_c\sqrt{\pi^2+\eta_c^2}} \tag{7.3}$$

причем условие (7.2) принимает вид

$$\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\eta_c^2}}\eta_c \geqslant \log\frac{\pi^2 p_i-(\pi^2+\eta_c^2)\,p_{\min}}{\pi^2 p_i-(\pi^2+\eta_c^2)\,p_{\max}} \tag{7.4}$$

Для случая, когда $p_{\max}=-p_{\min}$, получим из последнего

$$|p\,(t)|\leqslant m^2 p_i \operatorname{th}\eta_c m, \qquad m=\left(1+\frac{\eta_c^2}{\pi^2}\right)^{-1/2} \tag{7.5}$$

При обычно малых $\eta_c$ ($\eta_c\leqslant 0.3$) усилие в системе при выполнении последних условий изменяется незначительно. Поэтому в качестве $\eta_c$ можно брать среднюю величину декремента $\eta$ и приближенно считать формулы (7.2) — (7.5) пригодными при других законах зависимости $\eta$ от $P$, отличных от (6.4).

Для подтверждения сказанного рассмотрим случай, когда декремент затухания не зависит от $P$. В этом случае

$$\nu_i=\eta\,(\pi^2+\eta^2)^{-1/2}\,\omega_i\left(1-\frac{P\,(t)}{P_i}\right)^{1/2} \qquad (\eta=\mathrm{const}) \tag{7.6}$$

Достаточное условие устойчивости, эквивалентное условию (7.4), дано для этого случая формулой (19) в работе автора[1], в которой следует положить

$$G=1, \qquad D=\omega_i^2\left[1-\frac{P\,(t)}{P_i}\right], \qquad \lambda_0=\frac{1}{2\eta}\sqrt{\pi^2+\eta^2} \tag{7.7}$$

Тогда вместо условия (7.5) получим следующее:

$$\tfrac{1}{2}\,(P_{\max}-P_{\min})\leqslant[P_i-\tfrac{1}{2}\,(P_{\max}+P_{\min})]\operatorname{th}\eta m^2 \tag{7.8}$$

Правые части неравенств (7.8) и (7.5) отличаются при

$$P_c=\tfrac{1}{2}\,(P_{\max}+P_{\min})$$

на величину, меньшую 0.5%, если $\eta=\eta_c\leqslant 0.3$.

Условия устойчивости (7.4), (7.8) всегда удовлетворяются, если

$$\tfrac{1}{2}\,(P_{\max}-P_{\min})\leqslant(P_i-P_{\max})\,\eta \tag{7.9}$$

причем $\eta$ — средняя величина декремента затухания $i$-й формы в области $P_{\min}\leqslant P\leqslant P_{\max}$.

Для рассмотренных выше случаев $\nu=\mathrm{const}$, $\eta=\mathrm{const}$ условие (7.9) дает преуменьшенное в сравнении с формулами (7.4) и (7.8) значение для «амплитуды» изменения сжимающей силы $\frac{1}{2}\,(P_{\max}-P_{\min})$; при малых $\eta$ на величину порядка $\frac{1}{2}\,(P_{\max}-P_{\min})\,\eta$. Поэтому область применения достаточного условия устойчивости (7.9) может быть расширена (повидимому, на все возможные в действительности случаи).

Результат, полученный формулой (7.9), можно сформулировать следующим образом: если отношение амплитуды изменения сжимающей силы к силе, представляющей наименьший запас статической устойчивости, не превосходит среднего декремента затухания, то система устойчива.

8. Освободимся теперь от первого условия (7.1) и вместо второго условия будем считать

$$\int_0^a p(t)\,dt = 0 \tag{8.1}$$

т. е. в данном случае $P_c$ определяется как средняя величина функции

$$P_c = \frac{1}{a}\int_0^a P(t)\,dt \tag{8.2}$$

При этом в силу обозначений (6.6) будет выполняться условие (8.1). Величины $P_c$, $\omega_c$, $\eta_c$ здесь будут несколько отличаться от того, что принято под этими обозначениями в § 7.

Для использования условия (5.6) находим согласно (6.7), что

$$\int_0^a \theta\,dt = \omega_c^2 \frac{\pi^2}{\pi^2+\eta_c^2}, \qquad u_{\text{ср}} = \omega_c \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\eta_c^2}} \tag{8.3}$$

Далее, имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^a \left| u_{\text{ср}} - \frac{\theta}{u_{\text{ср}}} \right| dt = \frac{\omega_c^2 J}{u_{\text{ср}} p_i} \tag{8.4}$$

где $J$ — импульс положительной части усилия $p(t)$, который в силу (8.1) равен по абсолютной величине импульсу отрицательных усилий.

Если

$$p(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant b, \qquad p(t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad b \leqslant t \leqslant a \tag{8.5}$$

то

$$J = \int_0^b p(t)\,dt = -\int_b^a p(t)\,dt \tag{8.6}$$

Подставляя (8.3), (8.4) в условие (5.6), найдем, что система будет устойчивой, если

$$\left(\pi - \frac{a\omega_c\pi}{\sqrt{\pi^2+\eta_c^2}}\right)^2 + \frac{\eta_c^2\omega_c^2 a^2}{\pi^2+\eta_c^2} \geqslant \frac{\omega_c^2 J}{p_i^2\pi^2}(\pi^2+\eta_c^2) \tag{8.7}$$

Левая часть этого неравенства достигает минимума при

$$a = \frac{\pi^2}{\omega_c\sqrt{\pi^2+\eta_c^2}} \tag{8.8}$$

Тогда условие устойчивости (8.7) принимает вид

$$J \leqslant \frac{\eta_c p_i}{\omega_c}\,\frac{\pi^2}{\pi^2+\eta_c^2} \tag{8.9}$$

**9.** Рассмотрим еще случай, когда усилия в системе периодически меняются в течение малого по сравнению с периодом отрезка времени.

Предположим, что

$$P(t) - P_c = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant b \\ p(t) & \text{при } b < t < a \end{cases} \tag{9.1}$$

где $p(t)$ — знакопостоянная функция.

Отметим, что величины $P_c$, $\eta_c$, $\omega_c$ здесь отличны от того, что принято под этими обозначениями в § 7 и § 8.

Достаточные условия устойчивости для случая (9.1) можно получить, подставляя в (5.10) следующие выражения:

$$\Omega^2 = \omega_c^2 \frac{\pi^2}{\pi^2 + \eta_c^2}, \qquad q(t) = -\omega_c \frac{p(t)}{p_i} \tag{9.2}$$

При постоянном коэффициенте $\nu$ найдем, что левая часть неравенства (5.10) будет иметь минимум при

$$\alpha = \frac{\pi\Omega - \frac{1}{2}S}{\Omega^2 + \nu^2}$$

При этом условие устойчивости (5.10) удовлетворится, если

$$|J^*| \leqslant \frac{2\eta_c p_i (\pi\Omega + \frac{1}{2}J^*)}{\omega_c^2 \sqrt{\pi^2 + \eta_c^2}} \qquad \left(J^* = \int_b^a p(t)\, dt\right) \tag{9.3}$$

Когда $a - b$ в несколько раз меньше $a$, тогда условие (9.3) существенно шире того условия, которое можно получить из (8.9).

Для некоторых специальных случаев периодически действующих мгновенных импульсов достаточные условия устойчивости (9.3) и (8.9) при малых $\eta$ с точностью до малых высшего порядка совпадают с необходимыми условиями динамической устойчивости.

При $a - b \leqslant 2\eta_c / \omega_c$ находим, что при условии динамической устойчивости (9,3) усилие $p(t)$ в среднем на отрезке $a - b$ может превосходить критическое усилие $p_i$, вызывающее потерю статической устойчивости.

Поступила в редакцию
9 II 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. О квазигармонических колебаниях. ПММ. 1946. № 5—6.
2. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ. 1939.
3. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. ГИЗ. 1931.
4. Стретт М. Д. О. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ. 1935.
5. Беляев Н. М. Статья в сборнике Инженерные сооружения и строительная механика. Ленинград. 1924.
6. Челомей В. Н. Труды КАИ. Т. X. Киев. 1938.
7. Б. З. Брачковский. О динамической устойчивости упругих систем. ПММ. 1942. № 1.
8. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня. Сб. Исследование колебания конструкций. ДНТВУ. 1935. Стр. 25.