Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

А. М. Летов

(Москва)

А. И. Лурье [1] дал метод построения функций Ляпунова для одного класса задач теории автоматического регулирования.

Согласно этому методу исходная система уравнений движения подвергается предварительно линейному неособому преобразованию к каноническим переменным, при этом исключается случай, названный здесь особым, когда матрица линейного преобразования имеет кратные характеристические числа. Настоящая работа имеет цель распространить метод А. И. Лурье на этот особый случай.

1. Рассмотрим систему автоматического регулирования с одним регулирующим органом, описываемую уравнениями [1]

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi \quad (k=1, \ldots, n), \qquad \dot{\xi} = f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \eta_\alpha - \xi \tag{1.1}$$

Здесь η_k — координаты, а $b_{k\alpha}$, n_k — постоянные системы регулирования, j_α — постоянные регулятора. Функция $f(\sigma)$ определяет скорость сервомотора регулирующего органа; эта функция, непрерывная и ограниченная при любом σ, обладает свойством $\sigma f(\sigma) > 0$.

Уравнения (1.1) имеют тривиальное решение

$$\eta_1^* = 0, \ldots, \eta_n^* = 0, \qquad \xi^* = 0 \tag{1.2}$$

определяющее совместно положение равновесия системы регулирования и регулятора.

Задача состоит в том, чтобы найти достаточные условия, выполнение которых гарантирует устойчивость решения (1.2).

Воспользуемся преобразованием Лурье к каноническим переменным

$$x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)}\eta_\alpha + \xi \quad (s=1, \ldots, n), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha\eta_\alpha - \xi \tag{1.3}$$

где коэффициенты определяются уравнениями

$$\lambda_s C_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha\beta}C_\alpha^{(s)}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)}n_\alpha = \lambda_s \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

С помощью преобразования (1.3), (1.4) приведем исходные уравнения (1.1) к канонической форме

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + f(\sigma) \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu x_\nu - f(\sigma) \tag{1.5}$$

Здесь λ_s — корни уравнения $\Delta(\lambda) = |b_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\lambda|$, где $\delta_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, а β_ν — постоянные.

2. Не уменьшая общности, рассмотрим случай, когда матрица канонического преобразования (1.3) имеет только два равные характеристические числа $\lambda_1 = \lambda_n$.

По предыдущему $n-2$ различным характеристическим числам $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}$ всегда соответствует неособое преобразование (1.3) и (1.4) к каноническим переменным, где $s = 2, \ldots, n-1$, которое в совокупности с равенством $x_1 = \xi$ определяет $n-2$ координаты η_α как линейные функции переменных x_s, т. е.

$$\xi = x_1, \qquad \eta_s = \sum_{\alpha=1}^{n-1} g_\alpha^{(s)} x_\alpha \quad (s = 2, \ldots, n-1) \tag{2.1}$$

Для чисел $\lambda_1 = \lambda_n$ преобразования к каноническим переменным не существует.

С помощью равенств (1.3), в которых коэффициенты $C_\alpha^{(s)}$ определяются для каждых значений $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ по формулам (1.4), а также и равенств (2.1) приведем исходные уравнения к виду

$$\dot{x}_1 = f(\sigma), \qquad \dot{x}_s = -\rho_s x_s + f(\sigma) \quad (s = 2, \ldots, n-1) \tag{2.2}$$

$$\dot{\eta}_1 = b_{11}\eta_1 + b_{1n}\eta_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k x_k, \qquad \dot{\eta}_n = b_{n1}\eta_1 + b_{nn}\eta_n + \sum_{k=1}^{n-1} q_k x_k$$

где p_k, q_k суть билинейные формы коэффициентов $b_{\alpha\beta}$ и $g_\alpha^{(s)}$, а $\rho_s = -\lambda_s$.

Введем переменную σ согласно (1.1). На основании (2.1) найдем

$$\eta_n = \frac{1}{j_n}\left[\sigma - j_1\eta_1 - \sum_{k=1}^{n-1} r_k x_k\right], \qquad r_k = \sum_{\alpha=2}^{n-1} j_\alpha g_k^{(\alpha)} \quad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{2.3}$$

Исключим из уравнений (2.2) переменную η_n. Из (1.3) с помощью первых $n-1$ уравнений (2.2) образуем равенства

$$C_2^{(s)}\dot{\eta}_2 + C_3^{(s)}\dot{\eta}_3 + \ldots + C_{n-1}^{(s)}\dot{\eta}_{n-1} = -\rho_s x_s \quad (s = 2, \ldots, n-1)$$

Они определяют величины $\dot{\eta}_2, \ldots, \dot{\eta}_{n-1}$ как известные линейные функции канонических переменных $x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Пользуясь этими функциями и соотношением (2.3), получим уравнения для σ и η_1:

$$\dot{\eta}_1 = G_1\eta_1 + G\sigma + \sum_{k=1}^{n-1} R_k x_k, \qquad \dot{\sigma} = B_1\eta_1 + B\sigma + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k x_k - f(\sigma) \tag{2.4}$$

Здесь β_k — известные постоянные, определяемые по ходу вычислений через исходные данные, и

$$B_1 = j_1 b_{11} + j_n b_{n1} - \frac{j_1}{j_n}(b_{1n} j_1 + b_{nn} j_u), \qquad B = b_{nn} + \frac{j_1}{j_n} b_{1n}$$
$$G_1 = b_{11} - \frac{j_1 b_{1n}}{j_n}, \qquad G = \frac{b_{1n}}{j_n}, \qquad R_k = p_k - \frac{b_{1n} r_k}{j_n} \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{2.5}$$

Введем новые переменные

$$\eta_1 = u\eta + w\sigma + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k x_k, \qquad x_1 = \zeta + v\eta$$

где u, v, w, γ_k — пока неопределенные постоянные. В этих переменных уравнения (2.4) и первое уравнение (2.2) имеют вид:

$$\dot\zeta + v\dot\eta = f(\sigma)$$

$$\dot\eta = (G_1 - wB_1)\eta + \frac{1}{u}[G + wG_1 - w(wB_1 + B)]\sigma +$$
$$+ \frac{1}{u}\sum_{k=1}^{n-1}[G_k\gamma_k + R_k - w(\beta_k + B_1\gamma_k) + \rho_k\gamma_k]x_k - \frac{1}{u}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k - w\right)f(\sigma) \tag{2.6}$$

$$\dot\sigma = uB_1\eta + (B + wB_1)\sigma + \sum_{k=1}^{n-1}(\beta_k + B_1\gamma_k)x_k - f(\sigma)$$

Подберем $n-1$ постоянные $w, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ согласно равенствам

$$G + wG_1 = w(wB_1 + B),$$
$$(G_1 - wB_1 - \rho_k)\gamma_k = w\beta_k - R_k \qquad (k = 2, \ldots, n-1) \tag{2.7}$$

Предполагается, что при данных параметрах исследуемой системы такое определение постоянных возможно.

Тогда уравнения (2.4) в новых переменных примут вид:

$$\dot\eta = -\frac{N}{u}(\zeta + V\eta) - \rho f(\sigma)$$

$$\dot\zeta = \frac{vN}{u}(\zeta + V\eta) + (1 + v\rho) f(\sigma)$$

$$\dot\sigma = \beta_1'\zeta + (v\beta_1' + uB_1)\eta + M\sigma + \sum_{\nu=2}^{n-1}\beta_\nu' x_\nu - f(\sigma) \tag{2.8}$$

где

$$\beta_\nu' = \beta_\nu + B_1\gamma_\nu, \qquad N = w\beta_1' - R_1 - \gamma_1 G_1, \qquad V = v + \frac{wB_1 - \gamma_1}{N}$$

$$M = B + wB_1, \qquad \rho = \frac{1}{u}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k - w\right] \tag{2.9}$$

Проведем «λ-преобразование», положив

$$\zeta = y_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda t}, \ldots, \quad x_{n-1} = y_{n-1} e^{\lambda t}, \quad \eta = y_n e^{\lambda t}, \quad \sigma = \mu e^{\lambda t}$$

Оставшиеся уравнения (2.2) и уравнения (2.8) примут такой вид:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\left(\lambda + \frac{vN}{u}\right) y_1 - \frac{vVN}{u} y_n + (1 + v\rho) f(\mu e^{\lambda t}) e^{-\lambda t} \\
\dot{y}_2 &= -(\lambda + \rho_2) y_2 + f(\mu e^{\lambda t}) e^{-\lambda t} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{y}_{n-1} &= -(\lambda + \rho_{n-1}) y_{n-1} + f(\mu e^{\lambda t}) e^{-\lambda t} \\
\dot{y}_n &= \frac{N}{u} y_1 - \left(\lambda - \frac{VN}{u}\right) y_n - \rho f(\mu e^{\lambda t}) e^{-\lambda t} \\
\dot{\mu} &= -(\lambda - M)\mu + \beta_1' y_1 + \cdots + \beta_{n-1}' y_{n-1} + (uB_1 + v\beta_1') y_n - f(\mu e^{\lambda t}) e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Для того чтобы из полученных уравнений исключить время, обозначим $e^{-\lambda t} = z$, рассматривая функцию z как частный интеграл уравнения $\dot{z} + \lambda z = 0$. Присоединяя это уравнение к системе (2.10), представим ее в окончательной форме:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\left(\lambda + \frac{vN}{u}\right) y_1 - \frac{vVN}{u} y_n + (1 + v\rho) z f(\mu / z) \\
\dot{y}_2 &= -(\lambda + \rho_2) y_2 + z f(\mu / z) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n-1} &= -(\lambda + \rho_{n-1}) y_{n-1} + z f(\mu / z) \\
\dot{y}_n &= \frac{N}{u} y_1 - \left(\lambda - \frac{VN}{u}\right) y_n - \rho z f(\mu / z) \\
\dot{\mu} &= -(\lambda - M)\mu + \beta_1' y_1 + \ldots + \beta_{n-1}' y_{n-1} + (uB_1 + v\beta_1') y_n - z f(\mu / z) \\
\dot{z} &= -\lambda z
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Здесь $f(\mu / z)$ — всегда непрерывная и ограниченная при любых z функция, обладающая свойством $\mu f(\mu / z) > 0$. Что же касается величины z, то существенно отметить, что согласно определению $0 \leqslant z \leqslant 1$ для любого $\infty \leqslant t \leqslant 0$. Далее, следуя А. И. Лурье, предположим, что среди всех различных величин

$$
\lambda + \frac{vN}{u}, \quad \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}, \quad \lambda - \frac{VN}{u}
$$

могут быть как положительные вещественные числа

$$
\lambda + \frac{vN}{u}, \quad \rho_2, \ldots \rho_s, \quad \lambda - \frac{VN}{u} \qquad (s \leqslant n - 1)
$$

так и попарно сопряженные с положительной вещественной частью комплексные числа $\rho_{s+1}, \ldots \rho_{n-1}$.

В соответствии с этим переменные μ, $y_2, \ldots, y_s$ и постоянные $\beta_2', \ldots, \beta_s'$ суть вещественные, а переменные $y_{s+1}, \ldots, y_{n-1}$ и постоянные $\beta_{s+1}', \ldots, \beta_{n-1}'$ суть комплексные и попарно сопряженные величины.

Уравнения (2.11) имеют тривиальное решение

$$
y_1^* = 0, \ldots, y_n^* = 0, \qquad \mu^* = 0, \qquad z^* = 0 \tag{2.12}
$$

Легко проследить, что между решениями (1.2) и (2.12) исходной и преобразованной систем уравнений существует взаимно однозначное соответствие.

3. Рассмотрим функцию

$$W=\frac{1}{2}(Py_1^2+Qy_n^2+Rz^2)+z\int\limits_0^{\mu} f(\mu/z)\,d\mu+\Phi+F$$

где

$$\Phi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} A_k y_k^2+C_1 y_{s+1}y_{s+2}+\cdots+C_{n-s-2}y_{n-2}y_{n-1}$$

$$F=\sum_{\alpha=2}^{n-1}\sum_{\beta=2}^{n-1}\frac{a_\alpha a_\beta y_\alpha y_\beta}{\rho_\alpha+\rho_\beta}$$

Как показал А. И. Лурье, при любых вещественных и положительных A_k, $C_1, \ldots, C_{n-s-2}$, вещественных $a_2, \ldots, a_s$ и попарно сопряженных комплексных $a_{s+1}, \ldots, a_{n-1}$ функция $\Phi+F$ является знакоопределенной положительной функцией при всех значениях переменных $y_2, \ldots, y_{n-1}$. Следовательно, при любых вещественных и положительных числах P, Q, R функция W является знакоопределенной положительной функцией при всех значениях переменных.

Ее полная производная, вычисленная согласно уравнениям (2.11), имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot W = & -P\left(\lambda+\frac{vN}{u}\right)y_1^2-Q\left(\lambda-\frac{VN}{u}\right)y_n^2-R\lambda z^2-\lambda\left[2F+z\int\limits_0^{\mu} f(\mu/z)\,d\mu\right]- \\
& -\sum_{k=2}^{s} A_k\rho_k y_k^2-\sum_{\beta=1,3\ldots}^{n-s-2} C_\beta(\rho_{s+\beta}+\rho_{s+\beta+1})\,y_{s+\beta}y_{s+\beta+1}-(\lambda-M)\,z\mu f(\mu/z)- \\
& -z^2[f(\mu/z)]^2-2\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_i+\rho_k}y_i y_k+\frac{N}{u}(Q-vVP)\,y_1 y_n+ \\
& +[(1+v\rho)P+\beta_1']\,y_1 z f(\mu/z)+[uB_1+v\beta_1'-\rho Q]\,y_n z f(\mu/z)+ \\
& +zf(\mu/z)\left\{\sum_{k=2}^{s}\left(A_k+\beta_k+2a_k\sum_{i=2}^{n-1}\frac{a_i}{\rho_i+\rho_k}\right)y_k+\right. \\
& \qquad\left.+\sum_{\alpha=2}^{n-s-1}\left(C_\alpha+\beta_{s+\alpha}+2a_{s+\alpha}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{a_i}{\rho_i+\rho_{s+\alpha}}\right)y_{s+\alpha}\right\}
\end{aligned}$$

Но

$$2\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_i+\rho_k}y_i y_k+[zf(\mu/z)]^2=\left[\sum_{i=2}^{n-1}a_i y_i+zf(\mu/z)\right]^2-2zf(\mu/z)\sum_{i=2}^{n-1}a_i y_i$$

Требуя выполнения условий

$$A_k+\beta_k+2a_k\left(1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{a_i}{\rho_i+\rho_k}\right)=0\qquad (k=2,\ldots,s)$$

$$C_\alpha+\beta_{s+\alpha}+2a_{s+\alpha}\left(1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{a_i}{\rho_i+\rho_{s+\alpha}}\right)=0\qquad (\alpha=1,\ldots,n-s-1) \tag{3.1}$$

$$\beta_1'+(1+v\rho)P=0,\qquad uB_1+v\beta_1'-\rho Q=0,\qquad Q=vVP \tag{3.2}$$

функцию $\dot W$ представим в виде

$$\dot W=-P\left(\lambda+\frac{vN}{u}\right)y_1^2-Q\left(\lambda-\frac{VN}{u}\right)y_n^2-\lambda\left[2F+z\int_0^\mu f(\mu/z)\,d\mu\right]-$$

$$-\sum_{k=2}^{s}A_k\rho_k y_k^2-\sum_{\beta=1,3,\ldots}^{n-s-2}C_\beta(\rho_{s+\beta}+\rho_{s+\beta+1})\,y_{s+\beta}y_{s+\beta+1}-$$

$$-(\lambda-M)z\mu f(\mu/z)-\left[\sum_{k=2}^{n-1}a_k y_k+zf(\mu/z)\right]^2$$

Эта функция, наверное, будет знакоопределенной отрицательной при всех значениях переменных μ, $y_1,\ldots,y_n$, z, если положительная постоянная λ будет выбрана больше, чем наибольшее из чисел $|vN/u|$, $|VN/u|$, $|M|$. Поскольку последнего можно добиться всегда, то существенными требованиями того, чтобы функция $\dot W$ была отрицательной, является выполнение соотношений (3.1) и (3.2). Условия (3.1) входят в число тех условий, какие были получены А. И. Лурье. Условия (3.2) являются новыми.

Их выполнение гарантирует устойчивость решения (2.12) при любых начальных возмущениях $y_{10},\ldots,y_{n0}$, μ_0, z_0; в последнем случае любая группа функций $y_1, y_2,\ldots,y_n$, μ, представляющая собой некоторое решение уравнений (2.11), непременно имеет наименьшее характеристическое число λ^*. Докажем лемму: при любом действительном $\lambda>0$ наименьшее характеристическое число λ^* любой группы $y_1,\ldots,y_n$, μ, независимых частных решений уравнений (2.11) всегда будет больше λ.

Допустим, что все $\rho_2,\ldots,\rho_{n-1}$ суть действительные числа.

Умножим уравнения (2.11) в порядке их расположения соответственно на $y_1,\ldots,y_n$, μ и сложим результаты; обозначая через $\pi^2=y_1^2+\cdots+y_n^2+\mu^2$, имеем

$$-\frac{1}{2}\frac{d\pi^2}{dt}=\left(\lambda+\frac{vN}{u}\right)y_1^2+\sum_{k=2}^{n-1}(\lambda+\rho_k)y_k^2+\left(\lambda-\frac{VN}{u}\right)y_n^2+(\lambda-M)\mu^2+\Psi \tag{3.3}$$

где

$$\Psi=-\frac{N}{u}(vV-1)\,y_1y_n+zf(\mu/z)\left[(1+v\rho)y_1+\sum_{k=2}^{n-1}y_k-\rho y_n-\mu\right]+$$

$$+\mu\left[\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k'y_k+(uB_1+v\beta_1')\,y_n\right]$$

Относительно функции Ψ известно, что она ограничена на всем интервале $0 \leqslant t \leqslant \infty$, т. е. $-M^* \leqslant \Psi \leqslant M^*$, где M^* — значение $|\Psi_{\max}|$.

Рассмотрим коэффициенты квадратичной формы, стоящей в правой части (3.3). По условию они все положительные. Допустим, что $M > 0$, и пусть наименьший коэффициент есть $\lambda - M > 0$.

Пусть $\varkappa$ — произвольное положительное число. Очевидно, оно всегда может быть выбрано столь большим, что неравенство

$$\frac{vN}{u} y_1^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \rho_k y_k^2 - \frac{VN}{u} y_n^2 - \Psi > -\varkappa M \pi^2 \tag{3.4}$$

будет выполняться при любых значениях y_k, μ, какие они могут принимать, будучи решениями уравнений (2.11). Прибавим к неравенству (3.4) величину $\lambda y_1^2 + \cdots + \lambda y_n^2 + \lambda \mu^2 = \lambda \pi^2$. Имеем

$$\left(\lambda + \frac{vN}{u}\right) y_1^2 + \sum_{k=2}^{n-1} (\lambda + \rho_k) y_k^2 + \left(\lambda - \frac{VN}{u}\right) y_n^2 - \Psi > (\lambda - \varkappa M) \pi^2$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d\pi^2}{dt} < -(\lambda - \varkappa M) \pi^2$$

откуда

$$\pi^2 < [\pi^2]_{t=0} e^{-2(\lambda - \varkappa M) t}$$

Чтобы убедиться в справедливости леммы, достаточно выбрать число $\lambda > 2\varkappa M$, что всегда возможно.

Не составило бы труда провести аналогичные рассуждения в случае, когда среди ρ_k имеются комплексные сопряженные числа, а также и в случае, когда $\lambda - M$ не является наименьшим коэффициентом формы.

Таким образом, доказана теорема: если при надлежащим образом выбранных $\frac{1}{2}(n+s)$ положительных числах $A_2, \ldots, A_s, P, Q, C_1 = C_2, \ldots, C_{n-s-2} = C_{n-s-1}$ существуют $s-1$ вещественных $a_2, \ldots, a_s$ и $\frac{1}{2}(n-s-1)$ пар комплексных сопряженных $a_{s+1}, \ldots, a_{n-1}$ решений системы $n-2$ квадратных уравнений (3.1), в которых $\rho_2, \ldots, \rho_s, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — заданные вещественные постоянные (причем $\rho_k > 0$, $k = 2, \ldots, s$), а $\rho_{s+1}, \ldots, \rho_{n-1}$, $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_{n-1}$ — заданные комплексные, попарно сопряженные постоянные (причем $Re \rho_{s+\alpha} > 0$ при $\alpha = 1, \ldots, n-s-1$), то тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (1.1) асимптотически устойчиво в большом для любой монотонно возрастающей функции $f(\sigma)$, обладающей свойством $\sigma f(\sigma)$, и обращается в нуль при $\sigma = 0$ [1].

4. В качестве примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{\eta}_1 = b_{12}\eta_2, &&\dot{\eta}_2 = b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3 + b_{25}\eta_5 + n_2\xi \\
&\dot{\eta}_4 = b_{45}\eta_5, &&\dot{\eta}_3 = b_{33}\eta_3 + b_{34}\eta_4 + b_{35}\eta_5 + n_3\xi \\
&\dot{\eta}_6 = b_{61}\eta_1, &&\dot{\eta}_5 = b_{52}\eta_2 + b_{53}\eta_3 + b_{54}\eta_4 + b_{55}\eta_5 \\
&\dot{\xi} = f(\sigma), &&\sigma = j_1\eta_1 + \cdots + j_6\eta_6 - \xi
\end{aligned}$$

Легко видеть, что матрица канонического преобразования уравнений в этом случае имеет два нулевые характеристические числа $\lambda_1 = \lambda_6 = 0$, поэтому согласно формулам (3.1) найдем

$$\begin{aligned} x_1 = \xi, \qquad & x_2 = C_2^{(2)}\eta_2 + C_3^{(2)}\eta_3 + C_4^{(2)}\eta_4 + C_5^{(2)}\eta_5 + \xi \\ & x_3 = C_2^{(3)}\eta_2 + C_3^{(3)}\eta_3 + C_4^{(3)}\eta_4 + C_5^{(3)}\eta_5 + \xi \\ & x_4 = C_2^{(4)}\eta_2 + C_3^{(4)}\eta_3 + C_4^{(4)}\eta_4 + C_5^{(4)}\eta_5 + \xi \\ & x_5 = C_2^{(5)}\eta_2 + C_3^{(5)}\eta_3 + C_4^{(5)}\eta_4 + C_5^{(5)}\eta_5 + \xi \end{aligned}$$

где $C_2^{(2)} \ldots C_5^{(5)}$ суть корни уравнений (1.4), а $\lambda_2 \ldots \lambda_5$ корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Так как $b_{11} = b_{66} = b_{16} = 0$, то имеем $G = G_1 = B = 0$ $B_1 = b_{61} j_6$ и уравнения (3.4) для данного случая примут вид

$$\begin{aligned} & \dot{x}_1 = f(\sigma), \quad \dot{x}_2 = -\rho_2 x_2 + f(\sigma), \quad \dot{x}_3 = -\rho_3 x_3 + f(\sigma) \\ & \dot{x}_4 = -\rho_4 x_4 + f(\sigma), \quad \dot{x}_5 = -\rho_5 x_5 + f(\sigma) \\ & \dot{\eta}_1 = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4 + \varepsilon_5 x_5 \\ & \dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + B_1 \eta_1 - f(\sigma) \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$ и $\beta_1, \ldots, \beta_5$ суть постоянные, которые вычисляются при выполнении самого преобразования. Решая уравнения (2.7), найдем

$$w = 0, \qquad C_k = \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \qquad (k = 2, 3, 4, 5)$$

Положим

$$x_1 = \xi + k\eta, \qquad \eta_1 = a\eta + G_1 x_1 - \frac{\varepsilon_2}{\rho_2} x_2 - \frac{\varepsilon_3}{\rho_3} x_3 - \frac{\varepsilon_4}{\rho_4} x_5 - \frac{\varepsilon_5}{\rho_5} x_6$$

$$\beta_1' = \beta_1 + BG, \quad \rho = \frac{1}{a}\left(G_1 - \frac{\varepsilon_2}{\rho_2} - \ldots - \frac{\varepsilon_5}{\rho_5}\right), \quad \beta_s' = \beta_s - \frac{B_1 \varepsilon_s}{\beta_s} \quad (s = 2, 3, 4, 5)$$

Уравнения (2.8) после выполнения «λ-преобразования» примут вид

$$\begin{aligned} & \dot{y}_1 = -\left(\lambda + \frac{k\varepsilon_1}{a}\right) y_1 - \frac{k^2 \varepsilon_1}{a} y_6 + (1 + k\rho) z f(\mu/z) \\ & \dot{y}_s = -(\lambda + \rho_s) y_s + z f(\mu/z) \qquad (s = 2, \ldots, 5) \\ & \dot{y}_6 = \frac{\varepsilon_1}{a} y_1 - \left(\lambda - \frac{k\varepsilon_1}{a}\right) y_6 - \rho z f(\mu/z) \\ & \dot{\mu} = -\lambda\mu + \beta_1' y_1 + \ldots + \beta_5' y_5 + (aB_1 + k\beta_1') y_6 - z f(\mu/z) \end{aligned}$$

Условия устойчивости получаются в виде

$$\beta_k' + 2a_k \left(1 + \sum_{i=2}^{5} \frac{a_i}{\rho_i + \rho_k}\right) = 0 \qquad (k = 2, \ldots, 5)$$

$$Pk^2 = Q, \qquad P(1 + k\rho) - \beta_1' = 0, \qquad Q\rho - aB_1 - k\beta_1' = 0$$

Поступила в редакцию
19 II 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1945. Т. IX. Стр. 353.