

**КРИТЕРИИ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ ГРАНИЦ
 ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ**

Н. И. Баутин

(Горький)

Эта работа представляет собой развитие метода автора, изложенного в предыдущей работе: *О поведении динамических систем при малых нарушениях условий устойчивости Рауса-Гурвица* [1], в приложении к системам трех и четырех уравнений первого порядка.

Приводятся также некоторые замечания о применении метода к системам из n уравнений первого порядка.

1. Система трех уравнений первого порядка

1°. Выражение для $L(\lambda_0)$ через коэффициенты системы, приведенной к каноническому виду. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_1^{(\nu)} x_1 + a_2^{(\nu)} x_2 + a_3^{(\nu)} x_3 + P_\nu(x_1, x_2, x_3) \quad (\nu=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где P_1, P_2, P_3 не содержат членов ниже второго измерения.

Характеристическое уравнение системы (3.1) будет

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x \end{vmatrix} = x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (1.2)$$

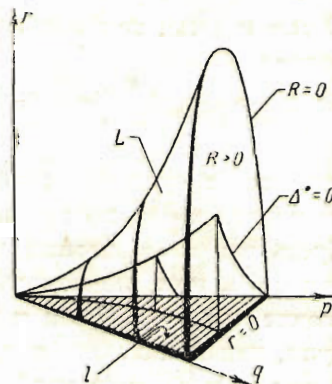
где

$$\begin{aligned} p &= -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}) \\ q &= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3^{(3)} & a_1^{(3)} \\ a_3^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix} \\ r &= - \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Условия Рауса-Гурвица сводятся здесь к условиям

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad R = pq - r > 0$$

Границами области устойчивости служат поверхности $r=0$ и $R=0$, точнее, те части этих поверхностей, для которых выполняются условия $p > 0, q > 0$. На первой из них характеристическое уравнение имеет корень,



Фиг. 1.

равный нулю, на второй — чисто мнимые корни. Фиг. 1 дает геометрическую интерпретацию условий Рауса-Гурвица в пространстве pqr .

Области устойчивости соответствует здесь внутренность гиперболического параболоида, расположенная для положительных p и q над плоскостью $r=0$. Границами служат поверхность гиперболического параболоида и плоскость $r=0$.

Для вычисления $L(\lambda_0)$, следуя Ляпунову [2] (стр. 71), приводим систему (1.1) к каноническому виду

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -p\xi_1 + Q_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\sqrt{q}\xi_2 + Q_2, \quad \frac{d\xi_3}{dt} = \sqrt{q}\xi_2 + Q_3 \quad (1.4)$$

Здесь $-p = a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}$ — действительный корень характеристического уравнения, \sqrt{q} — модуль каждого из чисто мнимых корней и $Q_\nu = Q_\nu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Легко проверить, что при условии $R=0$ уравнение (1.2) имеет корни

$$x_1 = -p, \quad x_2 = i\sqrt{q}, \quad x_3 = -i\sqrt{q}$$

Ищем решение линейной системы (1.4) на границе $R=0$ в виде

$$x_1^{(k)} = \sigma_{1k} e^{x_k t}, \quad x_2^{(k)} = \sigma_{2k} e^{x_k t}, \quad x_3^{(k)} = \sigma_{3k} e^{x_k t} \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.5)$$

Для определения σ_{jk} получаем системы

$$\begin{aligned} \sigma_{1k}(a_1^{(1)} - x_k) + \sigma_{2k} a_2^{(1)} + \sigma_{3k} a_3^{(1)} &= 0 \\ \sigma_{1k} a_1^{(2)} + \sigma_{2k}(a_2^{(2)} - x_k) + \sigma_{3k} a_3^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{1k} a_1^{(3)} + \sigma_{2k} a_2^{(3)} + \sigma_{3k}(a_3^{(3)} - x_k) &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Пусть нумерация исходных уравнений (1.1) была такова, что

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x_1 & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - x_2 & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.7)$$

Легко обнаружить, что такие два различных минора всегда найдутся. В самом деле, так как корни уравнения $D(x)=0$ простые, то производная

$$D_1'(x) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - x & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x \end{vmatrix}$$

отлична от нуля при значениях $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, т. е. для каждого из корней $x=x_k$ по крайней мере один из миноров отличен от нуля. Пусть при $x=x_1$ первый минор отличен от нуля. Если окажется, что при $x=x_2$ этот же минор будет единственным отличным от нуля, то значит при $x=x_1$ были и другие миноры (кроме первого), отличные от нуля, так как второй и третий миноры не могут иметь одновременно корни x_1 и x_2 , если коэффициенты системы действительные.

Из системы (1.6) находим

$$\sigma_{11} = \mu \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_2^{(2)} + p & a_2^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \sigma_{21} = -\mu \begin{vmatrix} a_1^{(1)} + p & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \sigma_{31} = \mu \begin{vmatrix} a_1^{(1)} + p & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} + p \end{vmatrix}$$

где можно положить, например, $\mu = 1$. Аналогично имеем

$$\sigma_{12} = \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - i\sqrt{q} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_2^{(3)} - i\sqrt{q} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_{22} = - \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} - i\sqrt{q} \end{vmatrix}, \quad \sigma_{32} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - i\sqrt{q} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{vmatrix}$$

Корню x_3 будут соответствовать $\sigma_{13} = \bar{\sigma}_{12}$ (сопряженное σ_{12}) и т. д. Пусть

$$\sigma_{j1} = \alpha_{j1}, \quad \sigma_{j2} = \alpha_{j2} - i\alpha_{j3}, \quad \sigma_{j3} = \alpha_{j2} + i\alpha_{j3}$$

Так как (1.5) образует систему линейно независимых решений, то

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

В силу последнего неравенства решение системы (1.1)

$$x_j = kx_j^{(1)} + h \operatorname{Re} x_j^{(2)} = \alpha_{jk} k e^{-pt} + h (\alpha_{j2} \cos \sqrt{q} t + \alpha_{j3} \sin \sqrt{q} t) \quad (j=1, 2, 3)$$

может быть разрешено относительно

$$k e^{-pt} = \xi_1, \quad h \cos \sqrt{q} t = \xi_2, \quad h \sin \sqrt{q} t = \xi_3$$

рассматриваемых как новые переменные.

Таким образом, исходная система (1.1) приводится к виду (1.4) подстановками

$$x_v = \alpha_{v1} \xi_1 + \alpha_{v2} \xi_2 + \alpha_{v3} \xi_3 \quad (v=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

Здесь

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_2^{(2)} + p & a_3^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(1)} + p \\ a_3^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{31} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} + p & a_1^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_3^{(2)} + p \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_3^{(1)} & a_1^{(1)} \\ a_3^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_1^{(1)} \\ a_2^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \\ a_3^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

$$\alpha_{13} = (a_2^{(2)} + a_3^{(3)}) \sqrt{q}, \quad \alpha_{23} = -a_1^{(2)} \sqrt{q}, \quad \alpha_{33} = -a_1^{(3)} \sqrt{q}$$

Пусть члены $P_j(x_1, x_2, x_3)$ и $Q_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в системах (1.1) и (1.4) представлены в виде рядов по степеням аргументов

$$P_j(x_1, x_2, x_3) = a_{11}^{(j)} x_1^2 + a_{22}^{(j)} x_2^2 + a_{33}^{(j)} x_3^2 + 2a_{12}^{(j)} x_1 x_2 + 2a_{13}^{(j)} x_1 x_3 +$$

$$+ 2a_{23}^{(j)} x_2 x_3 + a_{111}^{(j)} x_1^3 + a_{222}^{(j)} x_2^3 + a_{333}^{(j)} x_3^3 + 3a_{112}^{(j)} x_1^2 x_2 + 3a_{113}^{(j)} x_1^2 x_3 +$$

$$+ 3a_{122}^{(j)} x_1 x_2^2 + 3a_{223}^{(j)} x_2^2 x_3 + 3a_{133}^{(j)} x_1 x_3^2 + 3a_{233}^{(j)} x_2 x_3^2 + 6a_{123}^{(j)} x_1 x_2 x_3 + \dots$$

$$Q_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = A_{11}^{(j)} \xi_1^2 + A_{22}^{(j)} \xi_2^2 + A_{33}^{(j)} \xi_3^2 + 2A_{12}^{(j)} \xi_1 \xi_2 + 2A_{13}^{(j)} \xi_1 \xi_3 +$$

$$+ 2A_{23}^{(j)} \xi_2 \xi_3 + A_{111}^{(j)} \xi_1^3 + A_{222}^{(j)} \xi_2^3 + A_{333}^{(j)} \xi_3^3 + 3A_{112}^{(j)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{113}^{(j)} \xi_1^2 \xi_3 +$$

$$+ 3A_{122}^{(j)} \xi_1 \xi_2^2 + 3A_{223}^{(j)} \xi_2^2 \xi_3 + 3A_{133}^{(j)} \xi_1 \xi_3^2 + 3A_{233}^{(j)} \xi_2 \xi_3^2 + 6A_{123}^{(j)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \dots$$

Тогда коэффициенты преобразованной системы будут выражаться через исходные по формулам

$$A_{kl}^{(j)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{p=1}^3 \alpha_{jp}' [a_{11}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} + a_{22}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} + a_{33}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} + \quad (1.11)$$

$$+ a_{12}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) + a_{13}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3k}) + a_{23}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k})]$$

$$A_{kl}^{(j)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{p=1}^3 \alpha_{jp}' [a_{111}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{1s} + a_{222}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + a_{333}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3s} +$$

$$+ a_{112}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1k} \alpha_{1s} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{1s} \alpha_{2k}) + a_{113}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{3s} +$$

$$+ \alpha_{1k} \alpha_{1s} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{1s} \alpha_{3k}) + a_{223}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{2s} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{2s} \alpha_{3k}) +$$

$$+ a_{122}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{1s} + \alpha_{2k} \alpha_{2s} \alpha_{1l} + \alpha_{2l} \alpha_{2s} \alpha_{1k}) +$$

$$+ a_{223}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{2s} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{2s} \alpha_{3k}) + a_{133}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{1s} +$$

$$+ \alpha_{3k} \alpha_{3s} \alpha_{1l} + \alpha_{3l} \alpha_{3s} \alpha_{1k}) + a_{133}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{1l} \alpha_{2k} \alpha_{3s} +$$

$$+ \alpha_{1k} \alpha_{2s} \alpha_{3l} + \alpha_{1s} \alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{2s} \alpha_{3k} + \alpha_{1s} \alpha_{2l} \alpha_{3k})]$$

где α_{jp}' — адьюнкт элемента α_{pj} определителя $\|\alpha_{pj}\|$ ($p, j, = 1, 2, 3$), т. е. соответствующий минор, умноженный на $(-1)^{j+p}$.

Вводя полярные координаты $\xi_2 = \rho \cos \varphi$, $\xi_3 = \rho \sin \varphi$ и исключая t , систему (1.4) можно привести к системе двух уравнений

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R^\circ(\rho, \varphi, \xi_1); \quad \frac{d\xi_1}{d\varphi} = Z^\circ(\rho, \varphi, \xi_1) \quad (1.12)$$

Следуя Ляпунову, разворачиваем правые части системы (1.12) по степеням и будем искать решение системы (1.12) в виде рядов

$$\rho = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + \dots, \quad \xi_1 = v_1(\varphi)\rho_0 + v_2(\varphi)\rho_0^2 + \dots \quad (1.13)$$

Тогда, подставляя (1.13) в (1.12), получаем рекуррентные дифференциальные уравнения, из которых последовательно определяет функции $u_j(\varphi)$ и $v_j(\varphi)$ так, чтобы удовлетворялись начальные условия

$$u_1(0) = 1, \quad u_j(0) = 0 \quad (j=2, 3, \dots), \quad v_j(0) = 0 \quad (j=1, 2, \dots)$$

Полагая $\varphi = 2\pi$ в построенном решении системы (1.12), получаем

$$\rho = \rho_0 + \alpha_j \rho_0^3 + \dots, \quad \xi_1 = \beta_j \rho_0^j + \dots \quad (1.14)$$

где $\alpha_j = u_j(2\pi)$, $\beta_j = v_j(2\pi)$.

Первый ляпуновский коэффициент $L(\lambda_0)$ совпадает с α_3 . В коэффициентах (1.11) преобразованной системы (1.4) имеем

$$L(\lambda_0) = \alpha_3 = \frac{\pi}{4q} [2(A_{33}^{(2)}A_{33}^{(3)} - A_{22}^{(2)}A_{22}^{(3)}) + 2A_{23}^{(2)}(A_{22}^{(2)} + A_{33}^{(2)}) -$$

$$- 2A_{13}^{(3)}(A_{22}^{(3)} + A_{33}^{(3)}) + 3\sqrt{q}(A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{223}^{(3)})] +$$

$$+ \frac{\pi}{4p(p^2 + 4q)\sqrt{q}} \left\{ p^2 [2A_{22}^{(4)}(3A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) + 2A_{33}^{(4)}(A_{12}^{(2)} + 3A_{13}^{(3)}) +$$

$$+ 4A_{23}^{(4)}(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)})] + 4p\sqrt{q} [(A_{22}^{(4)} - A_{22}^{(4)}) (A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) +$$

$$+ 2A_{23}^{(4)}(A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)})] + 16q(A_{22}^{(4)} + A_{33}^{(4)})(A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) \right\} \quad (1.15)$$

2°. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы (без приведения к каноническому виду). Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_1^{(\nu)}x_1 + a_2^{(\nu)}x_2 + a_3^{(\nu)}x_3 + \mu P_\nu(x_1, x_2, x_3) \quad (\nu=1, 2, 3) \quad (1.16)$$

где μ — малый параметр. При $\mu=1$ система (1.14) совпадает с (1.6).

Общее решение линейной системы, получаемой из (1.16) при $\mu=0$ на границе $R=0$, имеет вид

$$x_\nu = k\alpha_{\nu 1}e^{-p(t+t_0)} + h[\alpha_{\nu 2} \cos \sqrt{q}(t+t_0) + \alpha_{\nu 3} \sin \sqrt{q}(t+t_0)] \quad (\nu=1, 2, 3)$$

где k, h, t_0 — произвольные постоянные, а $\alpha_{\nu i}$ выражаются через коэффициенты системы (1.1) по формулам (1.9).

Семейство периодических решений линейной системы на границе $R=0$ выделяется значением произвольного постоянного $k=0$.

Поставим задачу выразить $L(\lambda_0)$ в виде интеграла, взятого по периоду некоторой кривой семейства периодических решений. Введем с этой целью в окрестности такой кривой C_{h_0} новую систему координат. Рассмотрим три семейства поверхностей (фиг. 2).

1) Семейство эллиптических цилиндров, вложенных один в другой и проходящих через замкнутые кривые консервативной системы:

$$H(x_1, x_2, x_3) = h^2 \quad (1.18)$$

Получается из (1.17) исключением $ke^{-p(t+t_0)}$ и $t+t_0$.

2) Семейство плоскостей, проходящих через ось цилиндров (1.18):

$$h(x_1, x_2, x_3; s) = 0 \quad (1.19)$$

Получается из (1.17) исключением $ke^{-p(t+t_0)}$ и h и заменой $t+t_0$ через s .

3) Семейство плоскостей, параллельных основанию цилиндра, заполненному замкнутыми траекториями:

$$N(x_1, x_2, x_3; \eta) = 0 \quad (1.20)$$

Получается из (1.17) исключением $h \sin \sqrt{q}(t+t_0)$ и $h \cos \sqrt{q}(t+t_0)$ и заменой $ke^{-p(t+t_0)}$ через η . Решение системы (1.18), (1.19) и (1.20) относительно переменных x_1, x_2, x_3 можно представить в виде

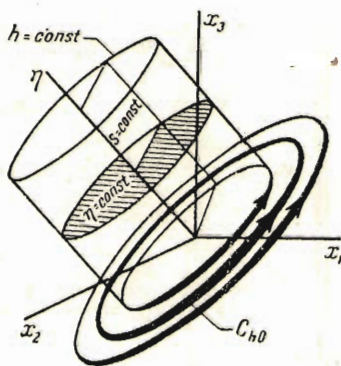
$$x_\nu = f_\nu(h, s, \eta) = \alpha_{\nu 1} \eta + h(\alpha_{\nu 2} \cos s \sqrt{q} + \alpha_{\nu 3} \sin s \sqrt{q}) \quad (\nu=1, 2, 3) \quad (1.21)$$

Выделим некоторую замкнутую кривую C_{h_0} и введем в окрестности этой кривой новую систему координат. Имеем

$$\frac{dx_\nu}{dt} = f_{\nu h} \frac{dh}{dt} + f_{\nu s} \frac{ds}{dt} + f_{\nu \eta} \frac{d\eta}{dt} = \Phi_\nu + \mu P_\nu \quad (\nu=1, 2, 3) \quad (1.22)$$

где

$$\Phi_\nu = a_1^{(\nu)} f_{\nu 1} + a_2^{(\nu)} f_{\nu 2} + a_3^{(\nu)} f_{\nu 3}, \quad P_\nu = P_\nu^1(f_1, f_2, f_3)$$



Фиг. 2.

В дальнейшем для определителей будем пользоваться обозначениями

$$\Delta(a_\nu, b_\nu, c_\nu) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

Элементы строки и столбца, указанные в скобках, будут опускаться, если это не приводит к недоразумениям.

Решая систему (1.22), находим

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\Delta} \Delta(\Phi_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') + \frac{\mu}{\Delta} \Delta(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') \quad (1.24)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Delta} \Delta(f_{\nu h}', \Phi_\nu, f_{\nu \eta}') + \frac{\mu}{\Delta} \Delta(f_{\nu h}', P_\nu, f_{\nu \eta}') \quad (1.25)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\Delta} \Delta(f_{\nu h}', f_{\nu s}', \Phi_\nu) + \frac{\mu}{\Delta} \Delta(f_{\nu h}', f_{\nu s}', P_\nu) \quad (1.26)$$

В силу тождества $2H(f_1, f_2, f_3) = (h_0 + \delta)^2$ для $\mu = 0$ должно быть $d\delta/dt = 0$; поэтому определитель $\Delta(\Phi_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}')$ в (1.24) необходимо должен обратиться в нуль. В силу соотношения $t + t_0 = s$ для $\mu = 0$ должно быть $ds/dt = 1$; поэтому определитель $\Delta(f_{\nu h}', \Phi_\nu, f_{\nu \eta}')$ в (1.25) должен равняться 1. Наконец, в силу соотношения $\eta = ke^{-p(t+t_0)}$ для $\mu = 0$ должно быть $d\eta/dt = -p\eta$, поэтому определитель $\Delta(f_{\nu h}', f_{\nu s}', \Phi_\nu)$ в (1.26) равен $-p\eta\Delta$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \frac{\mu}{\Delta} \Delta(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}'), & \frac{ds}{dt} &= 1 + \frac{\mu}{\Delta} \Delta(f_{\nu h}', P_\nu, f_{\nu \eta}') \\ \frac{d\eta}{dt} &= -p\eta + \frac{\mu}{\Delta} \Delta(f_{\nu h}', f_{\nu s}', P_\nu) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Исключая t из равенств (1.27), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{\mu\Delta(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}')}{\Delta + \mu\Delta(f_{\nu h}', P_\nu, f_{\nu \eta}')} = R(\delta, s, \eta, \mu) \\ \frac{d\eta}{ds} &= \frac{-p\eta\Delta + \mu\Delta(f_{\nu h}', f_{\nu s}', P_\nu)}{\Delta + \mu\Delta(f_{\nu h}', P_\nu, f_{\nu \eta}')} = S(\delta, s, \eta, \mu) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Здесь

$$\Delta(f_{\nu h}', f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') = h\sqrt{q}\Delta(\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \alpha_{\nu 3}) = h\sqrt{q}\bar{\Delta}_0 \quad (1.29)$$

Представим (1.28) в виде рядов по степеням δ, η, μ

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= R_\mu' \mu + \frac{1}{2} R_{\mu\mu}'' \mu^2 + R_{\delta\mu}'' \delta\mu + R_{\mu\eta}'' \mu\eta + \dots \\ \frac{d\eta}{ds} &= S_\eta' \eta + S_\mu' \mu + \frac{1}{2} S_{\mu\mu}'' \mu^2 + S_{\delta\mu}'' \delta\mu + S_{\mu\eta}'' \mu\eta + \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

и ищем решение этой системы в виде рядов по степеням μ и начальным значениям δ_0, η_0

$$\begin{aligned} \delta &= C_{100} \delta_0 + C_{010} \eta_0 + C_{001} \mu + C_{200} \delta_0^2 + C_{020} \eta_0^2 + C_{002} \mu^2 + \\ &\quad + C_{110} \delta_0 \eta_0 + C_{101} \delta_0 \mu + C_{011} \eta_0 \mu + \dots \\ \eta &= D_{100} \delta_0 + D_{010} \eta_0 + D_{001} \mu + D_{200} \delta_0^2 + D_{020} \eta_0^2 + D_{002} \mu^2 + \\ &\quad + D_{110} \delta_0 \eta_0 + D_{101} \delta_0 \mu + D_{011} \eta_0 \mu + \dots \end{aligned} \quad (1.31)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} C_{100}(0) &= 1, & C_{jik}(0) &= 0 & (j, i, k \neq 1, 0, 0) \\ D_{010}(0) &= 1, & D_{jik}(0) &= 0 & (j, i, k \neq 0, 1, 0) \end{aligned}$$

Подставляя (1.31) в (1.30) и сравнивая коэффициенты при степенях δ_0, η_0, μ , получаем рекуррентные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{C}_{100} &= 0, & \dot{C}_{010} &= 0, & \dot{C}_{001} - R_{\mu}' &= 0, & \dot{C}_{020} &= 0 \\ \dot{C}_{002} &= \frac{1}{2} R_{\mu\mu}'' + C_{001} R_{\delta\mu}'' + D_{001} R_{\eta\mu}'' + \dots & (1.32) \\ \dot{D}_{100} &= S_{\eta}' D_{100}, & \dot{D}_{010} &= S_{\eta}' D_{010}, & \dot{D}_{001} &= S_{\eta}' D_{001} + S_{\mu}' \end{aligned}$$

где

$$R_{\mu}'(0, s, 0, 0) = \frac{1}{h_0 \sqrt{q \Delta_0}} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') \quad (1.33)$$

$$R_{\mu\mu}''(0, s, 0, 0) = \frac{-2}{h_0^2 q \Delta_0^2} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') \Delta(f_{\nu h}', P_{\nu}, f_{\nu \eta}')$$

$$R_{\delta\mu}''(0, s, 0, 0) = \frac{1}{h_0 \sqrt{q \Delta_0}} \frac{d}{dh} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') - \frac{1}{h_0^2 \sqrt{q \Delta_0}} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}')$$

$$R_{\eta\mu}''(0, s, 0, 0) = \frac{1}{h_0 \sqrt{q \Delta_0}} \Delta(P_{\nu \eta}', f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') \quad (1.34)$$

$$S(0, s, 0, 0) = \frac{1}{h_0 \sqrt{q \Delta_0}} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}'), \quad S_{\eta}'(0, s, 0, 0) = -p \quad (1.35)$$

Для дальнейшего заметим соотношение

$$\frac{d}{dh} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') = \quad (1.36)$$

$$= \frac{d}{ds} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu h}', f_{\nu \eta}') - \Delta(P_{\nu \eta}', f_{\nu h}', f_{\nu s}') + (P_{1x_1}' + P_{2x_2}' + P_{3x_3}') \Delta$$

Из (1.32), принимая во внимание начальные условия, получаем

$$\begin{aligned} C_{100} &= 1, & C_{010} &= C_{200} = C_{020} = D_{100} = 0 & D_{010} &= e^{-ps} \\ C_{001} &= \frac{1}{h_0 \sqrt{q \Delta_0}} \int_0^s \Delta(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta}') d\tilde{s} & (1.37) \end{aligned}$$

$$D_{001} = \frac{1}{h_0 \sqrt{q \Delta_0}} e^{-ps} \int_0^s e^{ps} \Delta(P_{\nu}, f_{\nu h}', f_{\nu s}') d\tilde{s}$$

$$C_{002} = \int_0^s \left\{ \frac{1}{2} R_{\mu\mu}'' + C_{001} R_{\delta\mu}'' + D_{001} R_{\eta\mu}'' \right\} d\tilde{s}$$

Полагая $s = \tau$ в (1.31), причем $\tau = 2\pi/\omega$ есть период на кривой C_{h_0} , получаем «функцию соответствия»

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 + C_{001}(\tau) \mu + C_{002}(\tau) \mu^2 + C_{100}(\tau) \delta_0 \mu + C_{010}(\tau) \eta_0 \mu + \dots \\ \eta &= \eta_0 e^{-p\tau} + D_{001}(\tau) \mu + \dots \end{aligned} \quad (1.38)$$

дающую в окрестности точки $(0, 0)$ преобразование плоскости $\delta_0 \eta_0$ в плоскость $\delta \eta$.

Обратимся к равенствам (1.14), из которых определялось α_3 . Заметим, что геометрический смысл равенств (1.14) заключается в преобразовании в окрестности точки $\rho=0$ прямой $\xi_1=0$, лежащей в плоскости $\varphi=0$ (т. е. $\xi_3=0$), в некоторую кривую $F(\rho, \xi_1)=0$, находящуюся в той же плоскости. Если положить $\eta_0=0$ в равенствах (1.38), то мы точно так же получим из (1.38) вместо преобразования плоскости в плоскость преобразование в окрестности точки $\delta_0=0$ прямой $\eta_0=0$, лежащей в плоскости $s=0$; в некоторую кривую $F_1(\delta, \eta)=0$, находящуюся в той же плоскости.

Из равенств (1.8) и (1.21) совместно с соотношениями $\xi_2=\rho \cos \varphi$, $\xi_3=\rho \sin \varphi$ находим, что прямые $\xi_1=\varphi=0$ и $\eta=s=0$ совпадают и что $\rho=h$. Выбирая теперь такие h_0 , чтобы кривая C_{h_0} целиком находилась внутри области сходимости (1.14), находим связь между ρ и δ :

$$\rho = h_0 + \delta, \quad \text{или} \quad \rho - \rho_0 = \delta - \delta_0 \quad (1.39)$$

Представив правые части выражений для ρ и δ в (1.14) и (1.38) в виде рядов по μ , h_0 и δ_0 [введение μ в (1.14) соответствует вычислению α_3 для системы (1.16) и воспользовавшись равенством (1.39), выражаем α_3 через C_{001} и C_{002} . Имеем

$$(A_1\mu + A_2\mu^2)(h_0 + \delta_0)^3 + \dots = C_{001}(\tau)\mu + C_{002}(\tau)\mu^2 + \dots$$

или

$$A_1\mu h_0^3 + A_2\mu h_0^3 + \dots = \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dh_0^3} C_{001} \right)_{h_0=0} \mu h_0^3 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dh_0^3} C_{002} \right)_{h_0=0} \mu^2 h_0^3 + \dots$$

откуда

$$L(\lambda_0) = \alpha_3 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \{ C_{001}(\tau) + C_{002}(\tau) \} \right]_{h_0=0} \quad (1.40)$$

Выражение для $C_{001}(\tau)$ и $C_{002}(\tau)$ получим из (1.37), полагая $s=\tau=2\pi/\sqrt{q}$. Соотношение (1.36) позволяет при этом значительно упростить выражение для $L(\lambda_0)$, выделив из $C_{002}(s)$ периодическую часть, обращающуюся в нуль при интегрировании по периоду. Имеем

$$\begin{aligned} L(\lambda_0) = \alpha_3 = & \frac{1}{3! \sqrt{q} \Delta_0} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/\sqrt{q}} \Delta(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \tau}') ds \right]_{h_0=0} + \quad (1.41) \\ & + \frac{1}{3! \sqrt{q} \Delta_0^2} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0^2} \int_0^{2\pi/\sqrt{q}} \left\{ e^{-ps} \Delta(P_{\nu \tau}', f_{\nu s}', f_{\nu \tau}') \int_0^s e^{ps} \Delta(P_\nu, f_{\nu h}', f_{\nu s}') d\zeta + \right. \right. \\ & \left. \left. + [\Delta_0] \sqrt{q} h_0 (P_{1x_1}' + P_{2x_2}' + P_{3x_3}') - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Delta(P_{\nu \tau}', f_{\nu h}', f_{\nu s}') \right\} \int_0^s \Delta(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \tau}') d\zeta \right] ds \Big]_{h_0=0} \end{aligned}$$

Здесь всюду в выражения P_j и $P_{j\tau}' = \alpha_{j1} P_{jx_1}' + \alpha_{j2} P_{jx_2}' + \alpha_{j3} P_{jx_3}'$, где $j=1, 2, 3$, нужно подставить уравнения кривой C_{h_0}

$$x_\nu = h_0 (\alpha_{\nu 2} \cos s\sqrt{q} + \alpha_{\nu 3} \sin s\sqrt{q}) \quad (\nu=1, 2, 3) \quad (1.42)$$

значения Δ и q даются в (1.29), (1.9) и (1.3).

Примечание 1. Заметим, что здесь, так же как и в случае системы двух уравнений, использование консервативных кривых является лишь специальным приемом и не предполагает близости исходной системы (1.1) к использованной консервативной.

Примечание 2. Первое слагаемое в выражении (1.41) отлично от нуля только для членов третьего порядка в разложениях P_j ; а второе — только для членов второго порядка в тех же разложениях. Для рассматриваемого случая справедливо все сказанное в примечании 2, § 2, в работе^[1].

3°. *Выражение для $l(\lambda)$ через коэффициенты исходной системы.*

Пусть для системы (1.1) выполняются условия

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r = 0 \quad (1.43)$$

где p , q и r согласно (1.3), причем для определенности пусть

$$\|a_j^{(i)}\| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

Ищем решение линейной системы в виде

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

Для определения α , β и γ получаем систему

$$\alpha a_1^{(1)} + \beta a_1^{(2)} + \gamma a_1^{(3)} = 0, \quad \alpha a_2^{(1)} + \beta a_2^{(2)} + \gamma a_2^{(3)} = 0 \quad (1.44)$$

Отсюда находим

$$\alpha = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_1^{(3)} \\ a_2^{(2)} & a_2^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1^{(3)} & a_1^{(1)} \\ a_2^{(3)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.45)$$

Вводим вместо x_3 новое переменное $z = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$, тогда система (1.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left(a_1^{(1)} - \frac{\alpha}{\gamma} a_3^{(1)} \right) x_1 + \left(a_2^{(1)} - \frac{\beta}{\gamma} a_3^{(1)} \right) x_2 + \frac{1}{\gamma} a_3^{(1)} z + \dots = X_1(x_1, x_2, z) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left(a_1^{(2)} - \frac{\alpha}{\gamma} a_3^{(2)} \right) x_1 + \left(a_2^{(2)} - \frac{\beta}{\gamma} a_3^{(2)} \right) x_2 + \frac{1}{\gamma} a_3^{(2)} z + \dots = X_2(x_1, x_2, z) \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha P_{1z} + \beta P_{2z} + \gamma P_{3z} + \dots = Z(x_1, x_2, z) \end{aligned} \quad (1.46)$$

где P_{jz} — члены второго порядка в разложениях правых частей системы (1.1), в развернутом виде представленные в (1.10).

Искомая постоянная $l(\lambda_0)$ может быть определена согласно Ляпунову как коэффициент при z^2 в разложении $Z(x_1, x_2, z)$, где x_1 и x_2 определяются как функции z системой $X_1 = 0$, $X_2 = 0$; при этом в силу предположения, что характеристическое уравнение (1.2) имеет только один равный нулю корень, а остальные с отрицательными действительными частями, система $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ определяет x_1 и x_2 как голоморфные функции z (Ляпунов^[2], стр. 116).

Пусть $x_1 = \sigma_1 z + \dots$, $x_2 = \sigma_2 z + \dots$. Для σ_1 и σ_2 находим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{\Delta} (a_3^{(1)} a_2^{(2)} - a_2^{(1)} a_3^{(2)}) \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\Delta} (a_3^{(4)} a_1^{(2)} - a_3^{(2)} a_1^{(4)}) \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad (1.47)$$

Отсюда

$$i(\lambda_0) = \alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 \quad (1.48)$$

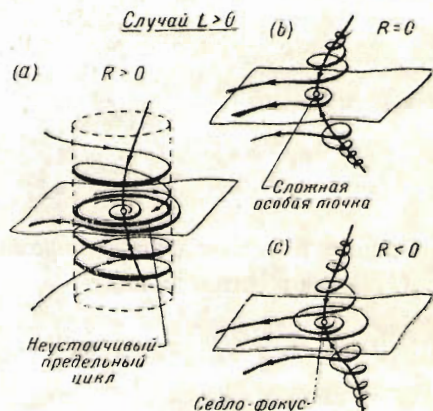
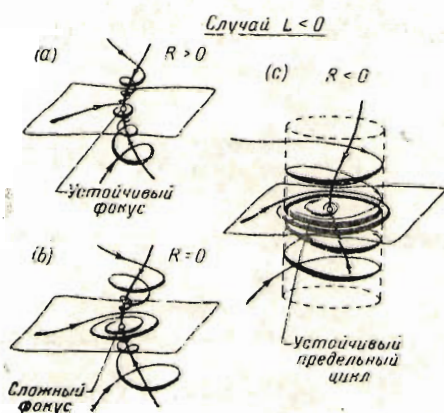
где

$$m_\nu = a_{11}^{(\nu)} \sigma_1^2 + a_{22}^{(\nu)} \sigma_2^2 + a_{33}^{(\nu)} (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 - 1)^2 + 2a_{12}^{(\nu)} \sigma_1 \sigma_2 - \quad (1.49) \\ - \frac{2}{\gamma} a_{13}^{(\nu)} \sigma_2 (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 - 1) - \frac{2}{\gamma^2} a_{23}^{(\nu)} \sigma_2 (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 - 1) \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

а значения $\alpha, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2$ определяется согласно (1.45) и (1.47).

Примечание. Заметим, что при использовании выражения (1.48) необходимо выбирать такую нумерацию уравнений (1.1), чтобы выполнялось условие $\|a_j^{(i)}\| \neq 0$ ($j, i = 1, 2$).

4°. Смена качественных структур разбиения на траектории окрестности состояния равновесия при переходе через границу области Рауса-Гурвица. При переходе через границу $R=0$ возможны следующие случаи:



1) Ляпуновский коэффициент $L(\lambda_0)$ на границе отрицателен (фиг. 3).

При переходе через границу $R=0$ от положительных значений к отрицательным (на границе $dR/d\lambda < 0$, если рассматривать R в зависимости от параметра λ) появляется единственный устойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра устойчивый предельный цикл стягивается в точку.

2) Ляпуновский коэффициент $L(\lambda_0)$ на границе положителен (фиг. 4).

При переходе через границу $R=0$ от положительных значений к отрицательным к состоянию равновесия стягивается единственный неустойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл.

Качественно характер разбиения на траектории поверхности, проходящей через предельный цикл, и характер состояния равновесия аналогичны с таковым в плоском случае. Остальные траектории, за исключением двух образующих вместе с состоянием равновесия одну анали-

тическую кривую, имеют вид спиралей. В первом случае ($L(\lambda_0) < 0$) все спирали накручиваются либо на состояние равновесия ($R > 0$), либо на устойчивый предельный цикл ($R < 0$). Во втором случае ($L(\lambda_0) > 0$) существует интегральная поверхность, проходящая через предельный цикл и заполненная спиралью, накручивающимися на предельный цикл. Остальные спирали либо накручиваются на состояние равновесия (спирали внутри поверхности, проходящей через предельный цикл), либо удаляются от состояния равновесия (спирали вне поверхности, проходящей через предельный цикл).

Сопоставление фиг. 3 и 4 показывает различие в поведении системы (1.1) по отношению к случайным толчкам вблизи границы при выполнении условия $R > 0$ и при нарушении условия устойчивости $R > 0$.

В случае $L > 0$, $R > 0$ возможно выбивание случайным толчком изображающей точки из устойчивого состояния равновесия за границу области устойчивости (фиг. 4); в случае же $L < 0$, $R > 0$ такое выбивание невозможно (фиг. 3).

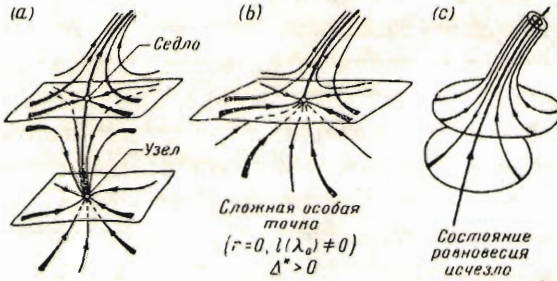
Переход через границу $R = 0$ в первом случае ($L(\lambda_0) < 0$, $dR/d\lambda < 0$) соответствует появлению устойчивого предельного цикла, являющегося элементом притяжения для всех траекторий (кроме одной, проходящей через состояние равновесия с определенным направлением касательной) и остающегося сколь угодно малым при достаточно малых нарушениях условия устойчивости $R > 0$. При обратном изменении параметра изображающие точки возвращаются в состояние равновесия, система ведет себя *обратно* по отношению к изменению параметра.

Переход через границу $R = 0$ во втором случае ($L(\lambda_0) > 0$, $dR/d\lambda < 0$) соответствует стягиванию неустойчивого предельного цикла и исчезанию области устойчивости (внутри цилиндрической поверхности, проходящей через предельный цикл). Изображающая точка при этом срывается с состояния равновесия и уходит за пределы рассматриваемой окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия; система ведет себя *необратно*.

Состояния равновесия системы (1.1) определяются из условия $P_1 = P_2 = P_3 = 0$. Если характеристическое уравнение (1.2) не имеет равного нулю корня, то поверхности $P_j = 0$ пересекаются в состоянии равновесия без касания. Обращение в нуль одного корня характеристического уравнения совместно с условием $l(\lambda_0) \neq 0$ указывает, как легко показать, на то, что линия пересечения двух из поверхностей $P_j = 0$ имеет с третьей поверхностью касание первого порядка и, следовательно, состояние равновесия можно рассматривать как двойную особую точку. Легко проверить, что при соответствующем введении параметра в систему (1.1) это состояние равновесия может либо совсем исчезнуть, либо расщепиться на два простых состояния равновесия (с характеристическими уравнениями, не имеющими ни нулевых корней, ни корней с равной нулю действительной частью); одно из них будет иметь положительный, а другое отрицательный корень харак-

теристического уравнения¹; два других корня могут быть и действительными и комплексными (фиг. 5 и 6).

Возможные случаи разбиения на траектории малой окрестности состояния равновесия x_1, x_2, x_3 вблизи границы $r=0$ изображены на фиг. 5 и 6.



Фиг. 5.

При выполнении условий $r=0, l(\lambda_0) \neq 0$ в начале координат системы (1.1) обе точки сливаются в сложную особую точку (фиг. 5 и 6).

Условия, дополнительные к $l(\lambda_0) \neq 0$, которые позволяют различить случаи состояния равновесия, представленные на фиг. 5 и фиг. 6, будут:

для состояния равновесия типа пространственный седло-узел

$$\Delta^* = -p^2q^2 + 4q^3 < 0 \quad (1.50)$$

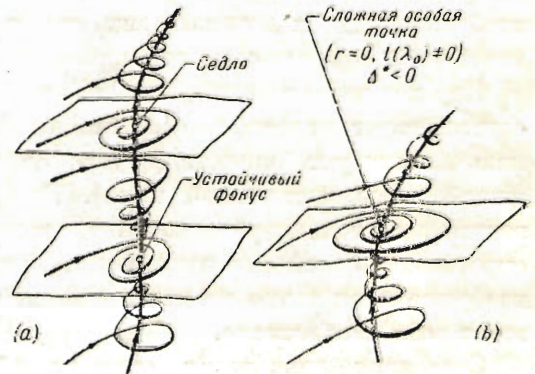
для состояния равновесия типа пространственный седло-фокус

$$\Delta^* = -p^2q^2 + 4q^3 > 0 \quad (1.51)$$

Поверхность, отделяющая в пространстве pqr область действительных корней от области, где уравнение имеет комплексные корни, изображена на фиг. 1 внутри области $R > 0$.

Для системы (1.1) при выполнении условия на границе $l(\lambda_0) \neq 0$ при приближении к границе возрастает опасность быть выброшенной случайным толчком из устойчивого состояния равновесия в область неустойчивости.

5°. *Пример. Сложный генератор с вырожденным вторым контуром.* Рассмотрим схему, изображенную на фиг. 7. Уравнение для то-



Фиг. 6.

¹ Критерий для суждения о возможности состояния равновесия при определенном введении параметра совершенно аналогичен подобному критерию для системы двух уравнений. Вопрос и здесь решается обращением или необращением в нуль в точке, соответствующей рассматриваемому состоянию равновесия некоторого определителя, например, определителя $\Delta_r = \Delta_1(P_{v\lambda}^*, P_{vx_2}^*, P_{vx_3}^*)$ при значениях $\xi_1 = \xi_1^*, \xi_2 = \xi_2^*, \xi_3 = \xi_3^*, \lambda = \lambda_0$, где $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*$ — состояния равновесия системы

$$\dot{\xi}_i = P_i^*(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \lambda)$$

определяемое из уравнений $P_i^* = 0$, значение λ_0 определяется из условия

$$r(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \lambda) \equiv \Delta = 0$$

ков в контурах имеет вид: (1.52)

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt = N \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_a}{dt}, \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = N \frac{di_1}{dt}$$

Характеристику лампы примем в виде

$$i_a = S V_1 \left(1 - \frac{V_1^2}{3V_s^2} \right) \quad \left(V_1 = \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt \right)$$

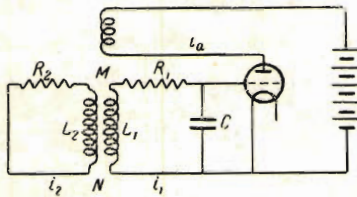
где крутизна в нулевой точке S и напряжение насыщения V_s — константы. Так как

$$C \dot{V}_1 = i_1 \quad C \ddot{V}_1 = \frac{di_1}{dt}$$

то система (1.52) принимает вид: (1.53)

$$L_1 \ddot{V}_1 + R_1 \dot{V}_1 + \frac{1}{C} V_1 = \frac{N}{C} \frac{di_2}{dt} + \frac{M}{C} S \left(1 - \frac{V_1^2}{V_s^2} \right) \dot{V}_1, \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = N C \dot{V}_1$$

Предположим, что первый генератор частично самовозбужден, т. е.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

что $MS > R_1 C$, и введем безразмерные переменные

$$x = \frac{V_1}{V_s} \sqrt{\frac{MS}{MS - R_1 C}}, \quad y = \frac{i_2 L_2 \omega_0}{V_s} \sqrt{\frac{MS}{MS - R_1 C}}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$$

Система (1.53) примет тогда вид:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = x_2 \frac{dy}{d\tau} + \mu (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} + \rho \mu y = x_1 \frac{d^2 x}{d\tau^2} \quad (1.54)$$

где безразмерные параметры

$$\mu = \omega_0 (MS - R_1 C), \quad \rho = \frac{R_2}{L_2 \omega_0^2 (MS - CR_1)}, \quad x_1 = \frac{N}{L_1}, \quad x_2 = \frac{N}{L_2}$$

Систему (1.54) представим в виде уравнения третьего порядка

$$\sigma \ddot{x} + \mu(\rho - 1) \dot{x} + (1 - \rho \mu^2) \dot{x} + \rho \mu x = -2\mu x \dot{x}^2 - \mu^2 \rho x^2 \dot{x} \quad (\sigma = 1 - x_1 x_2)$$

или в виде системы

$$\dot{x}_1 = -p x_1 - q x_2 - r x_3 - \frac{2\mu}{\sigma} x_2^2 x_3 - \frac{\mu^2 \rho}{\sigma} x_2 x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2 \quad (1.55)$$

где

$$x_1 = \ddot{x}, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = x, \quad p = \frac{\mu(\rho - 1)}{\sigma}, \quad q = \frac{1 - \rho \mu^2}{\sigma}, \quad r = \frac{\rho \mu}{\sigma}$$

Условия Рауса-Гурвица дают для системы (1.55) неравенства

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad R = pq - r > 0 \quad (1.56)$$

ограничивающие область, изображенную на фиг. 8. (Область устой-

чивости покрыта штриховкой.) Нумерация переменных в системе (1.7) такова, что условия (1.56) выполняются.

В самом деле,

$$\begin{vmatrix} 0 & -q \\ 1 & p \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -i\sqrt{q} & 0 \\ 1 & -i\sqrt{q} \end{vmatrix} \neq 0$$

Вычислим знак $L(\lambda_0)$ на границе $R=0$. Так как система (1.55) не имеет членов второго порядка, то для $L(\lambda_0)$ согласно (1.15) получаем

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4b} (A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{223}^{(3)}) \quad (1.57)$$

В этом выражении $L(\lambda_0)$ коэффициенты имеют значение

$$A_{kls}^{(j)} = \frac{1}{\Delta} [a_{223}^{(1)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + a_{233}^{(1)} (\alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{3s})] z_{j1}' \quad (1.58)$$

Для α_{ji} , пользуясь (1.9) и (1.55), находим

$$\alpha_{11} = pr, \quad \alpha_{21} = -r, \quad \alpha_{31} = q, \quad \alpha_{12} = -q, \quad \alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{32} = 1, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{23} = -\sqrt{q}, \quad \alpha_{33} = 0$$

По формуле (1.58), принимая во внимание, что $a_{223}^{(1)} = -2\mu/3\sigma$ и $a_{233}^{(1)} = -\mu^2\rho/3\sigma$, находим

$$A_{222}^{(2)} = 0, \quad A_{333}^{(3)} = 0, \quad A_{233}^{(2)} = -\frac{\alpha_{21}' 2\mu q}{\Delta 3\sigma}, \quad A_{223}^{(3)} = \frac{\alpha_{31}' \mu^3 \rho \sqrt{q}}{\Delta 3\sigma}$$

где

$$\alpha_{21}' = -q\sqrt{q}, \quad \alpha_{31}' = -r, \quad \Delta = \sqrt{q}(q^2 + pr) > 0$$

Таким образом, для $L(\lambda_0)$ окончательно получаем

$$L(\lambda_0) = \frac{\mu\pi}{4\sigma\Delta} (2q^2 - \mu r \rho) = \frac{\mu\pi}{4\sigma^3\Delta} [2(1 - \rho^2\mu^3)^2 - \mu^2\rho^2\sigma] \quad (1.59)$$

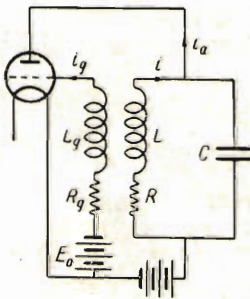
Знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком выражения в квадратных скобках. На фиг. 8 в плоскости параметров $\rho\sigma$ изображены область устойчивости состояния равновесия (покрыта штриховкой) и кривая $L(\lambda_0)$. Точка пересечения кривой $L(\lambda_0) = 0$ с кривой $R = 0$ отделяет на последней опасную часть границы $R = 0$ ($L(\lambda_0) > 0$) от безопасной ($L(\lambda_0) < 0$). Если при фиксированном σ изменять ρ , переходя через границу области устойчивости, то в первом случае происходит срыв изображающей точки с состояния равновесия, а во втором — мягкое возникновение автоколебаний.

6°. *Пример. Генератор с учетом сеточного тока.* Рассмотрим схему, изображенную на фиг. 9. Уравнения для токов в контурах в обычных обозначениях будут

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t (i - i_a) dt = M \frac{di_g}{dt}, \quad L_g \frac{di_g}{dt} + Ri_g + V_g = M \frac{di}{dt} \quad (1.60)$$

Примем характеристику в виде

$$i_a = S \left(1 - \frac{V_g^2}{3k^2} \right) V_g, \quad V_g = R_g' i_g \quad (1.61)$$



Фиг. 9.

Сводя систему (1.60) к одному уравнению третьего порядка относительного сеточного тока i_g , получаем

$$\frac{d^2 i_g}{dt^2} (LL_g - M^2) + \frac{d^2 i_g}{dt^2} [(R_g + R_g') L + RL_g] + \frac{d i_g}{dt} [(R_y + R_y') R + \frac{1}{C} (L_y - MSR_g')] + i_y \frac{1}{C} (R_g + R_g') + \frac{E_0}{C} = - \frac{MSR_g'^3}{Ck^2} i_g^2 \frac{d i_g}{dt} \quad (1.62)$$

Вводим безразмерные переменные x и τ с помощью соотношений

$$i_g = x i_{g0} - \frac{E_0}{R_g + R_g'}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t = \omega_0 t \quad (1.63)$$

при этом переменная x вводится таким образом, что стационарному режиму соответствует значение $x=0$. Уравнение (1.62) примет вид

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx + rx = \alpha x \dot{x} - \beta x^2 \dot{x} \quad (1.64)$$

Здесь безразмерные параметры p, q, r, α, β будут

$$p = \frac{LC [L(R_g + R_g') + RL_g]}{LL_g - M^2}, \quad q = \frac{SR_g'^3 ME_0^2 + k^2 (R_g + R_g')^2 [CR (R_g + R_g') + L_g - MSR_g']}{Ck^2 (R_g + R_g')^2 (LL_g - M^2) \omega_0^2}$$

$$r = \frac{R_g + R_g'}{C (LL_g - M^2) \omega_0^2}, \quad \alpha = \frac{2SR_g'^3 i_y ME_0}{Ck^2 (R_g + R_g') (LL_g - M^2) \omega_0^2}, \quad \beta = \frac{SR_g'^3 i_{g0} M}{Ck^2 (LL_g - M^2) \omega_0^2}$$

Полагая $\dot{x} = x_1, \dot{x} = x_2, x = x_3$, уравнение (1.64) заменим системой

$$\dot{x}_1 = -px_1 - qx_2 - rx_3 + \alpha x_2 x_3 - \beta x_2 x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2 \quad (1.65)$$

Линейная часть системы (1.65) отличается от линейной части системы (1.55) предыдущего примера только [зависимостью своих коэффициентов от исходных параметров и поэтому выражения для α_{ji} через коэффициенты системы (1.65) получаем из предыдущего примера. Величины $A_{kl}^{(j)}, A_{kl_s}^{(j)}$ вычисляются по формулам



Фиг. 10.

$$A_{kl}^{(j)} = \frac{1}{\Delta} \alpha_{j1}' a_{23}^{(1)} (\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k})$$

$$A_{kl_s}^{(j)} = \frac{1}{\Delta} \alpha_{j1}' a_{23s}^{(1)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{2s}) \quad (1.66)$$

$$a_{23}^{(1)} = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{23s}^{(1)} = -\frac{\beta}{3}, \quad \Delta = \sqrt{q} (pr + q^2)$$

Так как $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ и, следовательно,

$$A_{22}^{(j)} = A_{33}^{(j)} = A_{222}^{(j)} = A_{333}^{(j)} = A_{233}^{(j)} = 0$$

то по формуле (1.15) для $L(\lambda_0)$ получаем

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4\sqrt{q}} A_{223}^{(3)} + \frac{\pi}{\sqrt{q} (p^2 + 4q)} A_{23}^{(1)} [p (A_{12}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + \sqrt{q} (A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(3)})]$$

Заметив, что $\alpha_{11}' = \sqrt{q}, \alpha_{21}' = -q\sqrt{q}, \alpha_{31}' = -r$, из (1.66) получим

$$A_{23}^{(1)} = -\frac{\alpha q}{2\Delta}, \quad A_{12}^{(2)} = \frac{\alpha q^3}{2\Delta}, \quad A_{12}^{(3)} = \frac{\alpha q r \sqrt{q}}{2\Delta}$$

$$A_{12}^{(2)} = \frac{\alpha q r \sqrt{q}}{2\Delta}, \quad A_{12}^{(3)} = \frac{\alpha r^2}{2\Delta}, \quad A_{223}^{(3)} = -\frac{\beta r \sqrt{q}}{3\Delta}$$

Для $L(\lambda_0)$ находим окончательно

$$L(\lambda_0) = -\frac{\pi pq}{4\Delta^2(p^2 + 4q)} [\beta\Delta(p^2 + 4q) + \alpha^2 q \sqrt{q(p^2 + q)}] \quad (1.67)$$

очевидно, что $L(\lambda_0)$ на границе $R=0$ всегда отрицательно. Граница $R=0$ будет безопасной. При нарушении границы $R=0$ происходит мягкое возникновение автоколебаний (фиг. 10).

2. Система четырех уравнений первого порядка

1°. Выражение для $R(\lambda_0)$ через коэффициенты системы, приведенной к каноническому виду. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_1^{(\nu)} x_1 + a_2^{(\nu)} x_2 + a_3^{(\nu)} x_3 + a_4^{(\nu)} x_4 + P_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (\nu=1, 2, 3, 4)$$

где $P_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не содержат членов ниже второго измерения.

Характеристическое уравнение для уравнений первого приближения представляется определителем

$$D(x) = \| a_\lambda^{(\nu)} - x\delta \| \quad (\lambda, \nu=1, 2, 3, 4) \quad (2.2)$$

где $\delta=1$ при $\lambda=\nu$ и $\delta=0$ при $\lambda \neq \nu$, или в развернутом виде

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \quad (2.3)$$

Здесь s есть определитель $s = \| \alpha_\lambda^{(\nu)} \|$ ($\lambda, \nu=1, 2, 3, 4$); коэффициент r равен сумме четырех миноров, соответствующих диагональным элементам определителя s ; коэффициент q равен сумме шести миноров второго порядка, соответствующих диагональным элементам, наконец,

$$p = -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)} + a_4^{(4)})$$

Условия Рауса-Гурвица сводятся здесь к неравенствам

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad s > 0, \quad R = pqr - sp^2 - r^2 > 0 \quad (2.4)$$

Границами области устойчивости служат поверхности $s=0$ и $R=0$ или, точнее, части этих поверхностей, проходящие в той области пространства коэффициентов, где выполняются условия $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$. На первой из поверхностей ($s=0$) характеристическое уравнение имеет корень, равный нулю, на второй — чисто мнимые корни.

Характер второй пары корней на границе $R=0$ зависит от знака

$$\Delta_1^* = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4} \quad (2.5)$$

А. Если $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$, $R > 0$, $\Delta_1^* > 0$, то характеристическое уравнение (4.2) имеет корни

$$x_1 = bi, \quad x_2 = -bi, \quad x_3 = m + ni, \quad x_4 = m - ni \quad (2.6)$$

где

$$b^2 = \frac{r}{p}, \quad m = -\frac{p}{2}, \quad n^2 = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4}, \quad (n > 0) \quad (2.7)$$

Б. Если $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$, $R=0$, $\Delta_1^* < 0$, то уравнение (4.2) имеет корни

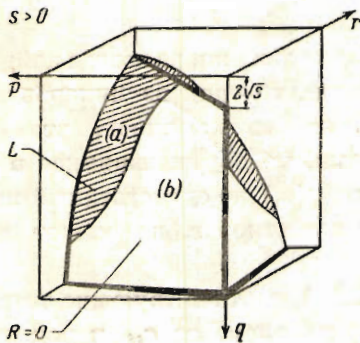
$$x_1 = bi, \quad x_2 = -bi, \quad x_3 = m + n = \sigma, \quad x_4 = m - n = \nu \quad (2.8)$$

Характер остальных корней на границе $s=0$ зависит от знака выражения

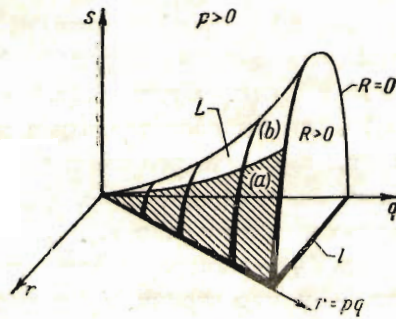
$$\Delta_2^* = 27r^2 - 18pqr + 4q^3 + 4p^3r - p^2q^2 \quad (2.9)$$

Если $\Delta_2^* < 0$, $p > 0$, $q > 0$, $R > 0$, $s=0$, то уравнение (2.2) имеет один корень, равный нулю, и три действительных отрицательных корня. Если $\Delta_2^* > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $R > 0$, $s=0$, то уравнение (2.2) имеет один корень, равный нулю, один действительный отрицательный и два комплексных с отрицательной действительной частью.

Фиг. 11 и 12 дают геометрическую интерпретацию условий Рауса-Гурвица. Фиг. 11 изображает поверхность $R=0$ в пространстве pqr ; при фиксированном $s > 0$ область устойчивости находится внутри изображенной части поверхности. На заштрихованной части (a) поверхность



Фиг. 11.



Фиг. 12.

ности характеристическое уравнение имеет помимо пары чисто мнимых корней два действительных корня. На незаштрихованной части (b) поверхности — два комплексных.

Фиг. 12 изображает ту же поверхность в пространстве qrs ; при фиксированном $p > 0$ границами области устойчивости служат поверхность гиперболического параболоида и плоскость $s=0$. Область устойчивости — внутренность гиперболического параболоида.

Для рассматриваемой системы следует различать два случая в зависимости от характера второй пары корней.

(а) Случай, когда на границе $R=0$ характеристическое уравнение не имеет действительных корней $4s - rp > 0$.

Приводим сначала систему (2.1) к каноническому виду¹

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -b\xi_2 + Q_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) & \frac{d\xi_3}{dt} &= m\xi_3 - n\xi_4 + Q_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= b\xi_1 + Q_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) & \frac{d\xi_4}{dt} &= n\xi_3 + m\xi_4 + Q_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где m , n , b , согласно (2.7). Ищем с этой целью решение линейной системы, полученной из (2.1) при $P_v=0$ на границе $R=0$ в виде

$$x_v^{(k)} = \sigma_{vk} e^{\lambda_v t} \quad (v=, 1, 2, 3, 4) \quad (2.11)$$

¹ Ляпунов [2], стр. 73. Здесь для рассматриваемых случаев приводится развернутое приведение к каноническому виду, так как эту операцию приходится фактически выполнять при расчете конкретных примеров.

Для определения σ_{jk} получаем систему

$$\begin{aligned} \sigma_{1k}(a_1^{(1)} - x_k) + \delta_{2k}a_2^{(1)} + \delta_{3k}a_3^{(1)} + \delta_{4k}a_4^{(1)} &= 0 \\ \sigma_{1k}a_1^{(2)} + \sigma_{2k}(a_2^{(2)} - x_k) + \sigma_{3k}a_3^{(2)} + \delta_{4k}a_4^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{1k}a_1^{(3)} + \sigma_{2k}a_2^{(3)} + \sigma_{3k}(a_3^{(3)} - x_k) + \delta_{4k}a_4^{(3)} &= 0 \\ \sigma_{1k}a_1^{(4)} + \sigma_{2k}a_2^{(4)} + \sigma_{3k}a_3^{(4)} + \sigma_{4k}(a_4^{(4)} - x_k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Пусть нумерация исходных уравнений (2.1) была такова, что в определителе системы (2.12)

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x_k & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - x_k & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - x_k & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} - x_k \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

миноры $D_{11}(x_3)$ и $D_{44}(x_1)$ не равны нулю. Такие два минора всегда найдутся. В самом деле, так как корни $D(x)$ простые, то один из миноров $D'(x)$ отличен от нуля. Пусть $\delta_1(x_1) \neq 0$. Если бы оказалось, что $\delta_1(x_3)$ и $\delta_1(x_4)$ были бы единственными минорами, не обращающимися в нуль при $x = x_3$, $x = x_4$, то это значило бы, что $\delta_1(x_1)$ не единственный минор, отличный от нуля при $x = x_1$ (ни один из миноров не может иметь одновременно корни x_1 и x_3).

Пусть D_{ij} — миноры определителя (2.13), соответствующие элементу a_{ij} , где i — номер строки, j — номер столбца элемента a_{ij} и под минором понимается определитель, получаемый вычеркиванием из (2.13) i -й строки и j -го столбца. Из систем (2.12) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = D_{41}(x_1), \quad \sigma_{21} = -D_{42}(x), \quad \sigma_{13} = -D_{11}(x_3), \quad \sigma_{23} = D_{12}(x_3) \\ \sigma_{31} = D_{43}(x_1), \quad \sigma_{41} = -D_{44}(x_1), \quad \sigma_{33} = -D_{13}(x_3), \quad \sigma_{43} = D_{14}(x_3) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Корню x_2 будут соответствовать σ_{j2} , сопряженные с σ_{j1} , а корню x_4 будут соответствовать σ_{j4} , сопряженные с σ_{j3} . Пусть

$$\sigma_{j1} = \alpha_{j1} - i\alpha_{j2}, \quad \sigma_{j2} = \alpha_{j1} + i\alpha_{j2}, \quad \sigma_{j3} = \alpha_{j3} - i\alpha_{j4}, \quad \sigma_{j4} = \alpha_{j3} + i\alpha_{j4}$$

Так как (2.11) образуют систему линейно независимых решений, то $|x_j^{(k)}| \neq 0$, а следовательно, и $|\alpha_{jk}| \neq 0$.

В силу последнего решение системы (2.1)

$$x_j = h(\alpha_{j1} \cos bt + \alpha_{j2} \sin bt) + k(\alpha_{j3} e^{mt} \cos nt + \alpha_{j4} e^{mt} \sin nt) \quad (2.15)$$

может быть разрешено относительно

$$h \cos bt = \xi_1, \quad h \sin bt = \xi_2, \quad ke^{mt} \cos nt = \xi_3, \quad ke^{mt} \sin nt = \xi_4$$

рассматриваемых как новые переменные.

Таким образом, подстановка

$$x_j = \alpha_{j1} \xi_1 + \alpha_{j2} \xi_2 + \alpha_{j3} \xi_3 + \alpha_{j4} \xi_4 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.16)$$

приводит исходную систему (2.1) к виду (2.10). Коэффициенты α_{ji} выражаются через коэффициенты системы (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \Delta_{41} - b^2 a_4^{(1)}, & \alpha_{12} &= -b (\Delta_{34,13} + \Delta_{24,12}) \\ \alpha_{21} &= -\Delta_{42} - b^2 a_4^{(2)}, & \alpha_{22} &= b (\Delta_{34,23} - \Delta_{14,12}) \\ \alpha_{31} &= \Delta_{43} - b^2 a_4^{(3)}, & \alpha_{32} &= b (\Delta_{24,23} + \Delta_{14,13}) \\ \alpha_{41} &= b^2 (a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}) - \Delta_{44}, & \alpha_{42} &= b^3 - b (\Delta_{34,34} + \Delta_{24,24} + \Delta_{14,14}) \\ \alpha_{23} &= D_{12} - n^2 a_1^{(2)}, & \alpha_{24} &= n (D_{14,24} + D_{13,23}) \\ \alpha_{33} &= -D_{13} - n^2 a_1^{(3)}, & \alpha_{34} &= n (D_{12,23} - D_{14,34}) \\ \alpha_{43} &= D_{14} - n^2 a_1^{(4)}, & \alpha_{44} &= -n (D_{13,34} + D_{12,24}) \\ \alpha_{13} &= n^2 (a_2^{(2)} + a_3^{(3)} + a_4^{(4)} - 3m) - D_{11}, & \alpha_{14} &= n^3 - n (D_{14,14} + D_{13,13} + D_{12,12}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь $\Delta = D(0)$ и $D = D(m)$ означают определители четвертого порядка, получаемые из $D(x)$ соответственно при $x=0$ и $x=m$ (формула 2.13), Δ_{ij} и D_{ij} означают определители третьего порядка, получаемые соответственно из определителей Δ и D вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, а $\Delta_{ij,\lambda\mu}$ и $D_{ij,\lambda\mu}$ означают определители второго порядка, получаемые из определителей Δ и D вычеркиванием двух строк i, j и двух столбцов λ, μ .

Представим $P_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в виде рядов по степеням x_1, x_2, x_3, x_4 . Имеем

$$\begin{aligned} P_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4) &= a_{11}^{(\nu)} x_1^2 + a_{22}^{(\nu)} x_2^2 + a_{33}^{(\nu)} x_3^2 + a_{44}^{(\nu)} x_4^2 + 2a_{12}^{(\nu)} x_1 x_2 + \\ &+ 2a_{13}^{(\nu)} x_1 x_3 + 2a_{14}^{(\nu)} x_1 x_4 + 2a_{23}^{(\nu)} x_2 x_3 + 2a_{24}^{(\nu)} x_2 x_4 + 2a_{34}^{(\nu)} x_3 x_4 + \\ &+ a_{111}^{(\nu)} x_1^3 + a_{222}^{(\nu)} x_2^3 + a_{333}^{(\nu)} x_3^3 + a_{444}^{(\nu)} x_4^3 + 3a_{112}^{(\nu)} x_1^2 x_2 + \\ &+ 3a_{113}^{(\nu)} x_1^2 x_3 + 3a_{114}^{(\nu)} x_1^2 x_4 + 3a_{122}^{(\nu)} x_1 x_2^2 + 3a_{223}^{(\nu)} x_2^2 x_3 + \\ &+ 3a_{224}^{(\nu)} x_2^2 x_4 + 3a_{133}^{(\nu)} x_1 x_3^2 + 3a_{334}^{(\nu)} x_3^2 x_4 + 3a_{233}^{(\nu)} x_2 x_3^2 + \\ &+ 3a_{134}^{(\nu)} x_1 x_4^2 + 3a_{244}^{(\nu)} x_2 x_4^2 + 3a_{344}^{(\nu)} x_3 x_4^2 + 6a_{123}^{(\nu)} x_1 x_2 x_3 + \\ &+ 6a_{134}^{(\nu)} x_1 x_3 x_4 + 6a_{124}^{(\nu)} x_1 x_2 x_4 + 6a_{234}^{(\nu)} x_2 x_3 x_4 + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Соответственно в таком же виде представим правые части системы (2.10) (заменяя $a_{jk}^{(i)}$ и $a_{jki}^{(i)}$ через $A_{jk}^{(i)}$ и $A_{jki}^{(i)}$).

Коэффициенты преобразованной системы будут выражаться через исходные по формулам

$$\begin{aligned} A_{il}^{(i)} &= \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^4 \alpha_{jp}^{(i)} [a_{11}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{il} + a_{22}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{il} + a_{33}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{il} + a_{44}^{(p)} \alpha_{4k} \alpha_{il} + \\ &+ a_{12}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) + a_{13}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3k}) + a_{14}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{4l} + \alpha_{1l} \alpha_{4k}) + \\ &+ a_{23}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k}) + a_{24}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{4l} + \alpha_{2l} \alpha_{4k}) + a_{34}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{4l} + \alpha_{3l} \alpha_{4k})] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
A_{kls}^{(i)} = & \frac{1}{\Delta_0} \alpha_{jp}' \{ a_{111}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{1s} + a_{222}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + a_{33}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3s} + \\
& + a_{444}^{(p)} \alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{4s} + a_{112}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1l} \alpha_{2l} \alpha_{1s} + \alpha_{2k} \alpha_{1l} \alpha_{1s} \} + \\
& + a_{113}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1k} \alpha_{3l} \alpha_{1s} + \alpha_{3k} \alpha_{1l} \alpha_{1s}) + \\
& + a_{114}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{4s} + \alpha_{1k} \alpha_{4l} \alpha_{1s} + \alpha_{4k} \alpha_{1l} \alpha_{1s}) + \\
& + a_{221}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{1s} + \alpha_{2k} \alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + \\
& + a_{223}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + \\
& + a_{224}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{4s} + \alpha_{2k} \alpha_{4l} \alpha_{2s} + \alpha_{4k} \alpha_{2l} \alpha_{2s}) + \\
& + a_{331}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{1s} + \alpha_{3k} \alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + \\
& + a_{332}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + \\
& + a_{334}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{4s} + \alpha_{3k} \alpha_{4l} \alpha_{3s} + \alpha_{4k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + \\
& + a_{441}^{(p)} (\alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{1s} + \alpha_{4k} \alpha_{1l} \alpha_{4s} + \alpha_{1k} \alpha_{4l} \alpha_{4s}) + \\
& + a_{442}^{(p)} (\alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{2s} + \alpha_{4k} \alpha_{2l} \alpha_{4s} + \alpha_{2k} \alpha_{4l} \alpha_{4s}) + \\
& + a_{443}^{(p)} (\alpha_{4k} \alpha_{4l} \alpha_{3s} + \alpha_{4k} \alpha_{3l} \alpha_{4s} + \alpha_{3k} \alpha_{4l} \alpha_{4s}) + \\
& + a_{123}^{(p)} [(\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k}) \alpha_{3s} + (\alpha_{1k} \alpha_{2s} + \\
& + \alpha_{1s} \alpha_{2k}) \alpha_{3l} + (\alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1s} \alpha_{3l}) \alpha_{3k}] + \\
& + a_{124}^{(p)} [(\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) \alpha_{4s} + (\alpha_{1k} \alpha_{2s} + \alpha_{1s} \alpha_{2k}) \alpha_{4l} + (\alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1s} \alpha_{2l}) \alpha_{4k}] + \\
& + a_{134}^{(p)} [(\alpha_{1k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3k}) \alpha_{4s} + (\alpha_{1k} \alpha_{3s} + \alpha_{1s} \alpha_{3k}) \alpha_{4l} + (\alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1s} \alpha_{3l}) \alpha_{4k}] + \\
& + a_{234}^{(p)} [(\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k}) \alpha_{4s} + (\alpha_{2k} \alpha_{3s} + \alpha_{2s} \alpha_{3k}) \alpha_{4l} + (\alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2s} \alpha_{3l}) \alpha_{4k}] \}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где α_{jp}' — адьюнкт элемента α_{pj} определителя $\Delta_0 = |\alpha_{ij}|$, т. е. соответствующий минор, умноженный на $(-1)^{j+p}$.

Переходя к полярным координатам $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ и исключая t , систему (2.16) приведем к виду

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R_2(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \quad \frac{d\xi_3}{d\varphi} = Z_2(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \quad \frac{d\xi_4}{d\varphi} = S_2(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4) \tag{2.21}$$

Развертываем правые части системы (2.21) по степеням ρ , ξ_3 , ξ_4 и будем искать решение системы (2.21) в виде рядов

$$\begin{aligned}
\rho &= u_1(\varphi) \rho_0 + u_2(\varphi) \rho_0^2 + u_3(\varphi) \rho_0^3 + \dots \\
\xi_3 &= v_1(\varphi) \rho_0 + v_2(\varphi) \rho_0^2 + v_3(\varphi) \rho_0^3 + \dots \\
\xi_4 &= w_1(\varphi) \rho_0 + w_2(\varphi) \rho_0^2 + w_3(\varphi) \rho_0^3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Тогда, подставляя (2.22) в (2.21) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ_0 , определяем u_j , v_j , w_j из рекуррентных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$u_1(0) = 1, \quad u_j(0) = 0 \quad (j \neq 1) \quad v_j(0) = w_j(0) = 0 \tag{2.23}$$

Полагая в построенном решении системы (2.21) $\varphi = 2\pi$, получим

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \dots, \quad \xi_3 = \beta_0 \rho_0^j + \dots, \quad \xi_4 = \gamma_0 \rho_0^j + \dots \tag{2.24}$$

где

$$\alpha_j = u_j(2\pi), \quad \beta_j = v_j(2\pi), \quad \gamma_j = w_j(2\pi)$$

Вычисление дает для первой ляпуновской величины $L(\lambda_0) = \alpha_3$ следующее выражение через коэффициенты преобразованной системы:

$$\begin{aligned}
 L(\lambda_0) = \alpha_3 = \frac{\pi}{4b^2} \left\{ 2(A_{22}^{(1)}A_{22}^{(2)} - A_{11}^{(1)}A_{11}^{(2)}) - 2A_{12}^{(2)}(A_{11}^{(2)} + A_{22}^{(2)}) + \right. \\
 + 2A_{12}^{(1)}(A_{11}^{(1)} + A_{22}^{(1)}) + 3b(A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{112}^{(2)} + A_{122}^{(1)}) + \\
 + \frac{2b}{\Delta} \left(2(A_{23}^{(1)} + A_{13}^{(2)})(m^2 + n^2)[b(n^2 - m^2 - 4b^2)A_{11}^{(3)} + \right. \\
 + m(n^2 + 4b^2 + m^2)A_{12}^{(3)} + b(m^2 - n^2 + 4b^2)A_{22}^{(3)} - 2bmnA_{11}^{(4)} + \\
 + n(m^2 + n^2 - 4b^2)A_{12}^{(4)} + 2bmnA_{22}^{(4)}] + \\
 + 2(A_{24}^{(1)} + A_{14}^{(2)})(m^2 + n^2)[2bmnA_{11}^{(3)} + n(4b^2 - m^2 - n^2)A_{12}^{(3)} - \\
 - 2bmnA_{22}^{(3)} - b(m^2 - n^2 + 4b^2)A_{11}^{(4)} + m(4b^2 + m^2 + n^2)A_{12}^{(4)} + \\
 + b(4b^2 + m^2 - n^2)A_{22}^{(4)}] + (3A_{13}^{(1)} + A_{23}^{(2)})[m(m^2 + n^2)^2A_{11}^{(3)} + \\
 + 2b^2m(4b^2 + 3m^2 - n^3)A_{11}^{(3)} + 2b(m^2 + n^2)(m^2 - n^2 + 4b^2)A_{12}^{(3)} - \\
 - 2b^2m(3n^2 - 4b^3 - m^2)A_{22}^{(3)} + n(m^2 + n^2)^2A_{11}^{(4)} + \\
 + 2b^2n(4b^2 - 3n^2 + m^2)A_{11}^{(4)} + 4mnb(m^2 + n^2)A_{12}^{(4)} + \\
 + 2b^2n(4b^2 + 3m^2 - n^2)A_{22}^{(4)}] + \\
 + (3A_{14}^{(1)} + A_{24}^{(2)})[2b^2n(3b^2 - m^2 - 4b^2)A_{11}^{(3)} - n(m^2 + n^2)^2A_{11}^{(3)} - \\
 - 4mnb(m^2 + n^2)A_{12}^{(3)} - 2b^2n(3m^2 + 4b^2 - n^2)A_{22}^{(3)} + \\
 + m(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + 6b^2)A_{11}^{(4)} + 8mb^2(b^2 - n^2)A_{11}^{(4)} - \\
 - 2b(m^2 + n^2)(n^2 - m^2 - 4b^2)A_{12}^{(4)} + 2b^2m(m^2 - 3n^2 + 4b^2)A_{22}^{(4)}] + \\
 + (3A_{23}^{(2)} + A_{13}^{(1)})[2b^2m(4b^2 + m^2 - 3n^2)A_{11}^{(3)} - \\
 - 2b(m^2 + n^2)(m^2 - n^2 + 4b^2)A_{12}^{(3)} - 2b^2m(n^2 - 4b^2 - 3m^2)A_{22}^{(3)} + \\
 + m(m^2 + n^2)^2A_{22}^{(3)} + 2b^2n(4b^2 + 3m^2 - n^2)A_{11}^{(4)} - \\
 - 4bmn(m^2 + n^2)A_{12}^{(4)} - 2nb^2(3n^2 - m^2 - 4b^2)A_{22}^{(4)} + \\
 + n(m^2 + n^2)A_{22}^{(4)}] + (3A_{24}^{(2)} + A_{14}^{(1)})[4bmn(m^2 + n^2)A_{12}^{(3)} - \\
 - 2b^2n(3m^2 + 4b^2 - n^2)A_{11}^{(3)} - n(m^2 + n^2)^2A_{22}^{(3)} - \\
 - 2b^2n(m^2 - 3n^2 + 4b^2)A_{22}^{(3)} + 2b^2m(4b^2 + m^2 - 3n^2)A_{11}^{(4)} - \\
 - 2b(m^2 + n^2)(4b^2 + m^2 - n^2)A_{12}^{(4)} + m(m^2 + n^2)^2A_{22}^{(4)} + \\
 \left. - 2b^2m(3m^2 + 4b^2 - n^2)A_{22}^{(4)} \right\} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta = -(m^2 + n^2)[16b^4 + 8b^2(m^2 - n^2) + (m^2 + n^2)^2]$$

В. Случай, когда на границе $R=0$ характеристическое уравнение имеет действительные корни. Приводим систему (2.1) к каноническому виду

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\xi}_1}{dt} = -b\tilde{\zeta}_1 + Q_1(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4), \quad \frac{d\tilde{\xi}_3}{dt} = \sigma\tilde{\zeta}_3 + Q(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4) \\
 \frac{d\tilde{\xi}_2}{dt} = b\tilde{\zeta}_1 + Q_2(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4), \quad \frac{d\tilde{\xi}_4}{dt} = \nu\tilde{\zeta}_4 + Q(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4) \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

где $\sigma = m + n$, $\nu = m - n$, а b, m, n имеют значения, указанные в (2.7).

С этой целью ищем опять решение линейной системы, соответствующей системе (2.1) на границе $R=0$, в виде (2.11).

Пусть нумерация исходных уравнений была такова, что для определителя (2.13), кроме $D_{11}(x_2) \neq 0$, $D_{44}(x_1) \neq 0$, имело место $D_{22}(x_3) \neq 0$.

Тогда подобно предыдущему находим выражения для σ_{ij} ; имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= D_{41}(x_1), & \sigma_{21} &= -D_{42}(x_1), & \sigma_{31} &= D_{43}(x_1) \\ \sigma_{41} &= -D_{44}(x_1), & \sigma_{13} &= D_{11}(\sigma), & \sigma_{23} &= -D_{12}(\sigma) \\ \sigma_{23} &= D_{13}(\sigma), & \sigma_{43} &= -D_{14}(\sigma), & \sigma_{14} &= D_{21}(\nu) \\ \sigma_{34} &= -D_{22}(\nu), & \sigma_{34} &= D_{23}(\nu), & \sigma_{44} &= -D_{24}(\nu) \end{aligned} \quad (2.27)$$

При этом будут определены также σ_{j2} , сопряженные σ_{j1} . Пусть

$$\sigma_{j1} = \beta_{j1} - i\beta_{j2}, \quad \sigma_{j2} = \beta_{j1} + i\beta_{j2}, \quad \sigma_{j3} = \beta_{j3}, \quad \sigma_{j4} = \beta_{j4} \quad [(2.28)]$$

Аналогично предыдущему находим, что $|\beta_{jk}| \neq 0$ и, следовательно, решение системы (2.1)

$$x_j = h(\beta_{j1} \cos bt + \beta_{j2} \sin bt) + k_1 \beta_{j3} e^{\sigma t} + k_2 \beta_{j4} e^{\nu t} \quad (2.29)$$

может быть разрешено относительно

$$h \cos bt = \xi_1, \quad h \sin bt = \xi_2; \quad k_1 = e^{\sigma t} = \xi_3, \quad k_2 = e^{\nu t} = \xi_4$$

рассматриваемых как новые переменные.

Таким образом, подстановка

$$x_j = \beta_{j1} \xi_1 + \beta_{j2} \xi_2 + \beta_{j3} \xi_3 + \beta_{j4} \xi_4 \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (2.30)$$

приводит исходную систему (2.1) к виду (2.10). Заметим, что $\beta_{j1} = \alpha_{j1}$, $\beta_{j2} = \alpha_{j2}$ выражаются через коэффициенты системы (2.1) по формулам (2.17), а β_{j3} и β_{j4} по формулам (2.28) и (2.27).

Если представить правые части системы (2.1) в виде рядов по степеням x_1, x_2, x_3, x_4 , сохраняя обозначения (2.18), и соответственно этому в таком же виде правые части системы (2.26) (заменяя только $a_{jk}^{(i)}$ и $a_{jkl}^{(i)}$ через $A_{jk}^{(i)}$ и $A_{jkl}^{(i)}$), то коэффициенты преобразованной системы опять будут выражаться через исходные по формулам (2.19), (2.20).

Переходя к полярным координатам $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ и исключая t , систему (2.26) можно привести к виду

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R_1(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \quad \frac{d\xi_3}{d\varphi} = Z_1(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4), \quad \frac{d\xi_4}{d\varphi} = S_1(\rho, \varphi, \xi_3, \xi_4) \quad (2.31)$$

Подобно предыдущему ищем решение системы (2.31) в виде рядов по степеням ρ, ξ_3, ξ_4 с теми же начальными условиями, что и раньше, и полагаем опять в построенном таким образом решении $\varphi = 2\pi$. Получим

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \dots, \quad \xi_3 = \beta_j \rho_0^j + \dots, \quad \xi_4 = \gamma_j \rho_0^j + \dots \quad (2.32)$$

Вычисления для первого ляпуновского коэффициента, который совпадает с α_3 , дают следующее выражение через коэффициенты преобразованной системы:

$$\begin{aligned}
L(\lambda_0) = \alpha_2^0 = \frac{\pi}{4b^2} \{ & 2(A_{22}^{(1)}A_{22}^{(2)} - A_{11}^{(1)}A_{11}^{(2)}) - 2A_{12}^{(2)}(A_{11}^{(2)} + A_{22}^{(2)}) + \\
& + 2A_{12}^{(1)}(A_{11}^{(1)} + A_{22}^{(1)}) + 3b(A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{112}^{(2)} + A_{122}^{(1)}) + \\
+ \frac{2b}{m(m^2 + 4b^2)} [& 4bmA_{12}^{(2)}A_{22}^{(2)} - (m^2 + 8b^2)A_{11}^{(2)}A_{22}^{(2)} - (3m^2 + 8b^2)A_{22}^{(2)}A_{22}^{(2)} - \\
& - 4bmA_{12}^{(1)}A_{12}^{(2)} - (3m^2 + 8b^2)A_{11}^{(2)}A_{12}^{(1)} - (m^2 + 8b^2)A_{22}^{(2)}A_{12}^{(1)} + \\
& + (A_{22}^{(1)} + A_{12}^{(2)})(2bmA_{11}^{(2)} - 2bmA_{22}^{(2)} - 2m^2A_{12}^{(2)})] + \\
+ \frac{2b}{n(n^2 + 4b^2)} [& 4bnA_{12}^{(4)}A_{24}^{(2)} - (n^2 + 8b^2)A_{11}^{(4)}A_{24}^{(2)} - (3n^2 + 8b^2)A_{22}^{(4)}A_{24}^{(2)} - \\
& - 4bnA_{12}^{(4)}A_{14}^{(1)} - (3n^2 + 8b^2)A_{11}^{(4)}A_{14}^{(1)} - (n^2 + 8b^2)A_{22}^{(4)}A_{14}^{(1)} + \\
& + (A_{24}^{(1)} + A_{14}^{(2)})(2bnA_{11}^{(4)} - 2bnA_{22}^{(4)} - 2n^2A_{12}^{(4)})] \} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

2°. Выражение для $L(\lambda_0)$ в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы (без приведения к каноническому виду). Представим систему (2.1) в виде

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_1^{(\nu)}x_1 + a_2^{(\nu)}x_2 + a_3^{(\nu)}x_3 + a_4^{(\nu)}x_4 + \mu P_\nu \quad (\nu=1,2,3,4) \quad (2.34)$$

где μ — малый параметр; при $\mu=1$ система (2.34) совпадает с (2.1)

1. Случай $4s - rp > 0$

Общее решение линейной системы, получаемой из (2.34) при $\mu=0$, имеет вид:

$$\begin{aligned}
x_j = h [& \alpha_{j1} \cos b(t + t_0) + \alpha_{j2} \sin b(t + t_0)] + \\
+ k [& \alpha_{j3} e^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1) + \alpha_{j4} e^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1)] \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Семейство периодических решений линейной системы на границе $R=0$ выделяется значением произвольного постоянного $k=0$. Каждое периодическое решение соответствует замкнутой кривой в пространстве x_j . Рассмотрим четыре семейства поверхностей.

Первое, получаемое исключением из (2.35) $ke^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1)$, $ke^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1)$ и $t + t_0$:

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^2 \quad (2.36)$$

Второе, получаемое из (2.35) исключением $ke^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1)$, $ke^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1)$, h и заменой $t + t_0 = s$:

$$n(x_1, x_2, x_3, x_4; s) = 0 \quad (2.37)$$

Третье, получаемое из (2.35) исключением величин $h \cos b(t + t_0)$, $h \sin b(t + t_0)$, $ke^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1)$ и заменой $ke^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1) = \eta_1$:

$$N_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_1) = 0 \quad (2.38)$$

Четвертое, получаемое из (2.35) исключением $h \cos b(t + t_0)$, $h \sin b(t + t_0)$, $ke^{m(t+t_1)} \cos n(t + t_1)$ и заменой $ke^{m(t+t_1)} \sin n(t + t_1) = \eta_2$:

$$N_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_2) = 0 \quad (2.39)$$

Решение системы (2.36) — (2.38), т. е.

$$H = h^2, \quad n = 0, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0 \quad (2.40)$$

относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4 , можно тогда представить в виде

$$x_\nu = f_\nu(h, s, \eta_1, \eta_2) = h(\alpha_{\nu 1} \cos bs + \alpha_{\nu 2} \sin bs) + \alpha_{\nu 3} \eta_1 + \alpha_{\nu 4} \eta_2 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

Выделим в (2.41) некоторую замкнутую кривую C_{h_0} и введем в окрестности этой кривой новую систему координат $\delta, s, \eta_1, \eta_2$ ($h_0 + \delta = h$). Тогда имеем ($\nu = 1, 2, 3, 4$)

$$f_{\nu h} \frac{d\delta}{dt} + f_{\nu s} \frac{ds}{dt} + f_{\nu \eta_1} \frac{d\eta_1}{dt} + f_{\nu \eta_2} \frac{d\eta_2}{dt} = a_1^{(\nu)} f_1 + a_2^{(\nu)} f_2 + a_3 f_3^{(\nu)} + a_4^{(\nu)} f_4 + \mu P$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{\mu (P_1 D_{1h} - P_2 D_{2s} + P_3 D_{3\eta_1} - P_4 D_{4\eta_2})}{D - \mu (P_1 D_{1\eta_2} - P_2 D_{2\eta_1} + P_3 D_{3s} - P_4 D_{4h})} = R \\ \frac{d\eta_1}{ds} &= \frac{D(m\eta_1 - n\eta_2) + \mu (P_1 D_{1\eta_1} - P_2 D_{2\eta_1} + P_3 D_{3\eta_1} - P_4 D_{4\eta_1})}{D - \mu (P_1 D_{1\eta_2} - P_2 D_{2\eta_1} + P_3 D_{3s} - P_4 D_{4h})} = S_1 \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= \frac{D(n\eta_1 + m\eta_2) + \mu (P_1 D_{1\eta_2} - P_2 D_{2\eta_2} + P_3 D_{3\eta_2} - P_4 D_{4\eta_2})}{D - \mu (P_1 D_{1\eta_2} - P_2 D_{2\eta_1} + P_3 D_{3s} - P_4 D_{4h})} = S_2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} f_{1h}' & f_{1s}' & f_{1\eta_1}' & f_{1\eta_2}' \\ f_{2h}' & f_{2s}' & f_{2\eta_1}' & f_{2\eta_2}' \\ f_{3h}' & f_{3s}' & f_{3\eta_1}' & f_{3\eta_2}' \\ f_{4h}' & f_{4s}' & f_{4\eta_1}' & f_{4\eta_2}' \end{vmatrix} = bh \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = bh \Delta_0 \quad (2.44)$$

при этом через D_{ij} обозначены миноры определителя D , соответствующие элементу, указанному в индексе.

Развернем (2.43) в ряды по степеням $\delta, \eta_1, \eta_2, \mu$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta p}{ds} &= R_{\mu^0} + \frac{1}{2} R_{\mu^2} \mu^2 + R_{\delta\mu} \delta \mu + R_{\eta_1\mu} \eta_1 \mu + R_{\eta_2\mu} \eta_2 \mu + \dots \\ \frac{d\eta_1}{ds} &= S_{1\eta_1} \eta_1 + S_{1\eta_2} \eta_2 + S_{1\mu} \mu + \frac{1}{2} S_{1\mu^2} \mu^2 + S_{1\delta\mu} \delta \mu + \\ &\quad + S_{1\eta_1\mu} \eta_1 \mu + S_{1\eta_2\mu} \eta_2 \mu + \dots \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= S_{2\eta_1} \eta_1 + S_{2\eta_2} \eta_2 + S_{2\mu} \mu + \frac{1}{2} S_{2\mu^2} \mu^2 + S_{2\eta_1\mu} \eta_1 \mu + S_{2\eta_2\mu} \eta_2 \mu + \\ &\quad + S_{2\delta\mu} \delta \mu + S_{2\eta_2\mu} \eta_2 \mu + \dots \end{aligned} \quad (2.45)$$

Решение ищем в виде рядов по степеням параметра μ и начальных значений $\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}$

$$\begin{aligned} \delta &= C_{1000} \delta_0 + C_{0100} \eta_{10} + C_{0010} \eta_{20} + C_{0001} \mu + C_{0002} \mu^2 + \dots \\ \eta_1 &= D_{1000} \delta_0 + D_{0100} \eta_{10} + D_{0010} \eta_{20} + D_{0001} \mu + D_{0002} \mu^2 + \dots \\ \eta_2 &= E_{1000} \delta_0 + E_{0100} \eta_{10} + E_{0010} \eta_{20} + E_{0001} \mu + E_{0002} \mu^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

с начальными условиями

$$C_{1000}(0) = D_{0100}(0) = E_{0010}(0) = 1 \quad (2.47)$$

$$C_{jikl}(0) = D_{jikl}(0) = E_{jikl}(0) = 0 \quad \text{для остальных значений } i, j, k, l$$

Подставляя (2.26) в (4.45) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ_c , η_{10} , η_{20} , μ , получаем рекуррентные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{C}_{1000} &= 0, & \dot{C}_{0100} &= 0, & \dot{C}_{0010} &= 0, & \dot{C}_{0001} &= R_\mu' \\ \dot{C}_{0002} &= \frac{1}{2} R_{\mu\mu}'' + C_{0001} R_{\delta\mu}'' + D_{0001} R_{\eta_{1\mu}}'' + E_{0001} R_{\eta_{2\mu}}'', \dots \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{1000} &= D_{1000} S_{1\eta_1}' + E_{1000} S_{1\eta_2}', & \dot{E}_{1000} &= D_{1000} S_{2\eta_1}' + E_{1000} S_{2\eta_2}' \\ \dot{D}_{0100} &= D_{0100} S_{1\eta_1}' + E_{0100} S_{1\eta_2}', & \dot{E}_{0100} &= D_{0100} S_{2\eta_1}' + E_{0100} S_{2\eta_2}' \\ \dot{D}_{0010} &= D_{0010} S_{1\eta_1}' + E_{0010} S_{1\eta_2}', & \dot{E}_{0010} &= D_{0010} S_{2\eta_1}' + E_{0010} S_{2\eta_2}' \\ \dot{D}_{0001} &= D_{0001} S_{1\eta_1}' + E_{0001} S_{1\eta_2}' + S_{1\mu}, & \dot{E}_{0001} &= D_{0001} S_{2\eta_1}' + E_{0001} S_{2\eta_2}' + S_{2\mu}' \end{aligned} \quad (2.49)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_\mu'(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} D(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}') \\ R_{\mu\mu}''(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{2}{h_0^2 b^2 \Delta_0^2} D(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}') D(P_\nu, f_{\nu h}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}') \\ R_{\delta\mu}''(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} \frac{d}{dh} D(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}') - \frac{1}{h_0^2 b \Delta_0} D(P_\nu, f_{\nu s}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}') \\ R_{\eta_{1\mu}}''(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} D(P_{\nu \eta_1}', f_{\nu s}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}'), \\ R_{\eta_{2\mu}}''(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 b \Delta_0} D(P_{\nu \eta_2}', f_{\nu s}', f_{\nu \eta_2}', f_{\nu \eta_2}') \\ S_{1\eta_1}'(0, s, 0, 0, 0) &= m, & S_{1\eta_2}'(0, s, 0, 0, 0) &= -n, \\ S_{2\eta_1}'(0, s, 0, 0, 0) &= n, & S_{2\eta_2}'(0, s, 0, 0, 0) &= m \\ S_{1\mu}'(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 b} D(P_\nu, f_{\nu h}', f_{\nu s}', f_{\nu \eta_2}'), \\ S_{2\mu}'(0, s, 0, 0, 0) &= \frac{1}{h_0 \Delta_0 b} D(P_\nu, f_{\nu h}', f_{\nu s}', f_{\nu \eta_1}') \end{aligned}$$

где D обозначает определитель четвертого порядка, элементы которого указаны в скобках ($\nu = 1, 2, 3, 4$).

Из (2.48), принимая во внимание начальные условия, получаем

$$\begin{aligned} C_{1000} &= 1, & C_{0100} &= C_{0010} = D_{1000} = E_{1000} = 0, & D_{0100} &= e^{ms} \cos ns \\ E_{0100} &= e^{ms} \sin ns, & D_{0010} &= e^{ms} \sin ns, & E_{0010} &= -e^{ms} \cos ns \\ D_{0001} &= \int_0^s \left[S_{2\mu}' \cos \lambda(s - \xi) + \frac{1}{\lambda} (m S_{1\mu}' - n S_{2\mu}') \sin \lambda(s - \xi) \right] d\xi \\ E_{0001} &= \int_0^s \left[S_{2\mu}' \cos \lambda(s - \xi) + \frac{1}{\lambda} (n S_{1\mu}' + m S_{2\mu}') \sin \lambda(s - \xi) \right] d\xi \\ C_{0001} &= \int_0^s R_\mu d\xi & (\lambda &= \sqrt{m^2 + n^2}) \\ C_{0002} &= \int_0^s \left[\frac{1}{2} R_{\mu\mu}'' + R_{\delta\mu}'' C_{0001} + R_{\eta_{1\mu}}'' D_{0001} + R_{\eta_{2\mu}}'' E_{0001} \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.50)$$

Полагая в (2.46) $s = \tau$, где $\tau = 2\pi/b$ — период на кривой C_{h_0} , получаем в окрестности точки $(0, 0, 0)$ функцию соответствия

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 + C_{0001}(\tau)\mu + C_{0002}(\tau)\mu^2 + \mu F_1(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}, \mu) \\ \eta_1 &= D_{0100}(\tau)\eta_{10} + D_{0001}(\tau)\mu + \mu F_2(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}, \mu) \\ \eta_2 &= E_{0010}(\tau)\eta_{20} + E_{0001}(\tau)\mu + \mu F_3(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}, \mu) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Сопоставим теперь (2.51) и (2.24). Геометрический смысл равенств (2.24) заключается в преобразовании для достаточно малых ρ «прямой» $\xi_2 = \xi_4 = \varphi = 0$ в некоторую «кривую» $F_1^*(\rho, \xi_1, \xi_3, \xi_4) = F_2(\rho, \xi_2, \xi_4) = \varphi = 0$, где F_1^* и F_2^* определяются равенствами (2.24). Если положить в равенствах (2.51) η_{10} и η_{20} равными нулю, то (2.51) также будет давать для достаточно малых δ_0 преобразование прямой $\eta_1 = \eta_2 = s = 0$ в некоторую кривую $s = \psi_1(\delta, \eta_1, \eta_2) = \psi_2(\delta, \eta_1, \eta_2) = 0$, где ψ_1 и ψ_2 определяются равенством (2.51) при условии $\eta_{10} = \eta_{20} = 0$.

Из равенств (2.41) и (2.16) совместно с соотношениями $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ находим, что прямые $\xi_2 = \xi_4 = \varphi = 0$ и $\eta_1 = \eta_2 = s = 0$ совпадают и что $\rho = h$. Выбирая такое h_0 , чтобы кривая C_{h_0} находилась внутри области сходимости (2.24), находим связь между $\rho = \delta$. Имеем

$$\rho = h_0 + \delta, \quad \text{или} \quad \rho - \rho_0 = \delta - \delta_0 \quad (2.52)$$

Представим правые части выражений для ρ и δ в (2.24) и (2.51) в виде рядов по μ , h_0 и δ_0 [введение μ в (2.24) соответствует вычислению α для системы (2.34)] и, воспользовавшись равенством (2.52), получим выражение α , через C_{0001} и C_{0002} . Имеем

$$(A_1\mu + A_2\mu^2)(h_0 + \delta_0)^3 + \dots = C_{0001}(\tau)\mu + C_{0002}(\tau)\mu^2 + \dots$$

Отсюда

$$\alpha_2 = A_1 + A_2 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dh^3} C_{0001}(\tau) + C_{0002}(\tau) \right]_{h_0=0} \quad (2.53)$$

Выражение для $C_{0001}(\tau)$ и $C_{0002}(\tau)$ получим из (2.49) и (2.50), полагая $s = \tau = 2\pi/n$, где $n = \sqrt{sp/r - p^2/4}$, и пользуясь соотношением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} D(P_{\nu}, f_{\nu s}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}') &= \\ = \frac{d}{ds} D(P_{\nu}, f_{\nu h}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu \eta_2}') - D(P_{\nu \eta_1}', f_{\nu h}', f_{\nu s}', f_{\nu \eta_2}') + \\ + D(P_{\nu \eta_2}', f_{\nu h}', f_{\nu \eta_1}', f_{\nu s}') + (P_{1x_1}' + P_{2x_2}' + P_{3x_3}' + P_{4x_4}') D \end{aligned} \quad (2.54)$$

Здесь D определено согласно (2.44). Тогда для $L(\lambda_0)$ будем иметь

$$\begin{aligned} L(\lambda_0) = \alpha_2 &= \frac{1}{3! \Delta_0 b} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/b} D(P_{\nu}, f_{\nu s}, f_{\nu \eta_1}, f_{\nu \eta_2}) ds \right]_{h_0=0} + \\ &+ \frac{1}{3! \Delta_0 b} \left[\frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/b} \left\{ D_{0001} D(P_{\nu \eta_1}, f_{\nu s}, f_{\nu \eta_1}, f_{\nu \eta_2}) + \right. \right. \\ &= E_{0001} D(P_{\nu \eta_2}, f_{\nu s}, f_{\nu \eta_1}, f_{\nu \eta_2}) + (P_{1x_1} + P_{2x_2} + P_{3x_3} + P_{4x_4}) + \\ &\left. \left. + \frac{1}{\Delta_0 h_0 b} (D(P_{\nu \eta_2}, f_{\nu h}, f_{\nu \eta_1}, f_{\nu s}) - D(P_{\nu \eta_1}, f_{\nu h}, f_{\nu s}, f_{\nu \eta_2})) \right\} ds \right]_{h_0=0} \end{aligned} \quad (2.55)$$

где D_{0001} и E_{0001} в развернутом виде даны формулами (2.50), а в выражения P_i и $P_{i\eta_j} = \alpha_{1j}P_{ix_1} + \alpha_{2j}P_{ix_2} + \alpha_{3j}P_{ix_3} + \alpha_{4j}P$ нужно подставить уравнение кривой C_{h0}

$$x_j = h_0 (\alpha_{j2} \cos bs + \alpha_{j3} \sin bs) \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

причем значения Δ_0 и b даются в (2.44) и (2.7).

2. Случай $4s - rp < 0$

Общее решение линейной системы (полученной из системы (2.34) при $\mu = 0$) имеет здесь вид:

$$x_j = h [\beta_{j1} \cos b(t + t_0) + \beta_{j2} \sin b(t + t_0)] + k_1 \beta_{j3} e^{st} + k_2 \beta_{j4} e^{vt} \quad (2.56)$$

Семейство периодических решений линейной системы на границе $R = 0$ выделяется значениями произвольных постоянных $k_1 = k_2 = 0$. Периодическим решениям соответствуют замкнутые траектории в пространстве x_j .

Рассмотрим четыре семейства поверхностей:

$$(1) \quad H(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^2$$

полученное из (2.56) исключением $k_1 e^{st}$, $k_2 e^{vt}$ и $t + t_0$;

$$(2) \quad n(x_1, x_2, x_3, x_4; s) = 0$$

полученное из (2.56) исключением $k_1 e^{st}$, $k_2 e^{vt}$, h и заменой $t + t_0 = s$;

$$(3) \quad N_1(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_1) = 0$$

получаемое из (2.56) исключением $h \cos b(t + t_0)$, $h \sin b(t + t_0)$, $k_2 e^{vt}$ и заменой $k_1 e^{st}$ на η_1 ;

$$(4) \quad N_2(x_1, x_2, x_3, x_4; \eta_2) = 0$$

получаемое из (2.56) исключением $h \cos b(t + t_0)$, $h \sin b(t + t_0)$, ke^{st} и заменой ke^{vt} на η_2 . Решение системы

$$H = h^2, \quad n = 0, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0 \quad (2.57)$$

относительно переменных x_j можно тогда представить в виде

$$x_j = f_j(h, s, \eta_1, \eta_2) = h(\beta_{j1} \cos bs + \beta_{j2} \sin bs) + \beta_{j3} \eta_1 + \beta_{j4} \eta_2 \quad (2.58)$$

Выделим из (2.58) некоторую замкнутую кривую C_{h0} и введем в окрестности этой кривой новую систему координат $\delta, s, \eta_1, \eta_2$ ($h_0 + \delta = h$). Тогда получим соотношение, вполне аналогичное (2.42), откуда следуют выражения для производных

$$\frac{d\delta}{ds} = R^*(\delta, s, \eta_1, \eta_2), \quad \frac{d\eta_1}{ds} = S_1^*(\delta, s, \eta_1, \eta_2), \quad \frac{d\eta_2}{ds} = S_2^*(\delta, s, \eta_1, \eta_2) \quad (2.59)$$

вполне аналогичные (2.43). При этом входящий в (2.43) определитель D дается также (2.44), где α_{ji} следует заменить на β_{ji} .

Развертывая (2.59) в ряды по степеням $\delta, \eta_1, \eta_2, \mu$, получим для производных представления (2.45). Решение ищем согласно (2.46), т. е.

в виде рядов по степеням μ и начальных значений $\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}$ с начальными условиями (2.47).

Подставляя решение в виде (2.46) в представления (2.45), получаем рекуррентные дифференциальные уравнения (2.48), в которых вместо R_1, S_1, S_2 будет стоять R_1^*, S_1^*, S_2^* . Значения $R_{\mu}^{*'}, R_{\mu\mu}^{*''}, \dots, S_{2\mu}^{*'}, \dots$ могут быть получены из соответствующих значений $R_{\mu}', R_{\mu\mu}'', \dots, S_{2\mu}', \dots$ по формулам (2.49), если в них величины α_{ji} , входящие в выражения для f_j , заменить через β_{ji} . Кроме того,

$$\begin{aligned} S_{1\eta_1}^{*'}(0, s, 0, 0, 0) &= \sigma, & S_{1\eta_2}^{*'}(0, s, 0, 0, 0) &= 0, \\ S_{2\eta_1}^{*'}(0, s, 0, 0, 0) &= 0, & S_{2\eta_2}^{*'}(0, s, 0, 0, 0) &= \nu \end{aligned} \quad (2.60)$$

Из рекуррентных уравнений (2.48), принимая во внимание начальные условия, получаем

$$\begin{aligned} C_{0100} &= C_{0010} = D_{1000} = D_{0010} = E_{1000} = E_{0100} = 0 \\ C_{1000} &= 1, \quad D_{0100} = e^{\nu s}, \quad E_{0010} = e^{\nu s} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} D_{0001} &= e^{\sigma s} \int_0^s e^{-\sigma \xi} S_{1\mu}^{*'} d\xi, \quad E_{0001} = e^{\nu s} \int_0^s e^{-\nu \xi} S_{2\mu}^{*'} d\xi, \quad C_{0001} = \int_0^s R_{\mu}^{*'} d\xi \\ C_{0002} &= \int_0^s \left(\frac{1}{2} R_{\mu\mu}^{*''} + R_{\delta\mu}^{*''} C_{0001} + R_{\eta_1\mu}^{*'} D_{0001} + R_{\eta_2\mu}^{*''} E_{0001} \right) d\xi \end{aligned}$$

Полагая в (2.46) $s = \tau$, где $\tau = 2\pi/b$ — период на кривой C_{h0} , получаем в окрестности точки $(0, 0, 0)$ «функцию соответствия» в виде (2.51), где вместо $F_1(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu)$ будет $F_1^*(\delta_0, \eta_{10}, \eta_{20}; \mu)$.

Сопоставляя (2.51) и (2.32), так же как и раньше, находим связь между α_s и коэффициентами C_{0001} и C_{0002} . Для $L(\lambda_0)$ получаем выражение (2.55), где вместо D_{0001} и E_{0001} нужно всюду подставить их значения из (2.61) и заменить всюду α_{ji} через β_{ji} . Так же как и в случаях систем двух и трех уравнений, первое слагаемое в выражении для $L(\lambda_0)$ отлично от нуля только для членов третьего порядка в разложениях P_j , а второе слагаемое отлично от нуля только для членов второго порядка в разложениях P_j .

3°. *Выражение для $l(\lambda_0)$, через коэффициенты исходной системы.* Пусть для системы (2.1) выполняются условия $p > 0, q > 0, r > 0$, причем для определенности пусть $|a_j^{(i)}| \neq 0$ ($j, i = 1, 2, 3$) и, кроме того, $s = 0$. При этом характеристическое уравнение системы (2.1) имеет один нулевой корень и остальные с отрицательными действительными частями.

Ищем решение линейной системы, соответствующей системе (2.1), в виде

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0 \quad (2.62)$$

находим

$$\alpha = \Delta_{11}, \quad \beta = -\Delta_{21}, \quad \gamma = \Delta_{31}, \quad \delta = -\Delta_{41} \quad (2.63)$$

Здесь Δ_{jk} — миноры, соответствующие элементу $\alpha_h^{(v)}$ определителя

$\Delta = \|\alpha_k^{(\nu)}\|$ системы (4.1), где $\nu = 1, 2, 3, 4$ означает номер строки, а $k = 1, 2, 3, 4$ — номер столбца.

Вводим вместо x_4 новое переменное $z = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4$. Тогда система (2.4) приводится к виду

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3, z) = \left(a_1^{(i)} - \frac{\alpha}{\delta} a_4^{(i)}\right) x_1 + \left(a_2^{(i)} - \frac{\beta}{\delta} a_4^{(i)}\right) x_2 + \left(a_3^{(i)} - \frac{\gamma}{\delta} a_4^{(i)}\right) x_3 + \frac{z}{\delta} a_4^{(i)} + \dots \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.64)$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha P_{1z} + \beta P_{2z} + \gamma P_{3z} + \delta P_{4z} = Z(x_1, x_2, x_3) \quad (2.65)$$

где P_{jz} — члены второго порядка в разложениях правых частей системы (2.1), в развернутом виде представленные в (2.18)

Определяя x_1, x_2, x_3 из системы $X_i = 0$ (2.64) как голоморфные функции z (это всегда возможно в силу сделанных предположений о характере корней характеристического уравнения (Ляпунов^[2] стр. 116)), получаем

$$x_1 = \sigma_1 z + \dots, \quad x_2 = \sigma_2 z + \dots, \quad x_3 = \sigma_3 z + \dots$$

где

$$\sigma_1 = \frac{\Delta_{41}}{D}, \quad \sigma_2 = -\frac{\Delta_{42}}{D}, \quad \sigma_3 = \frac{\Delta_{43}}{D}, \quad D = \alpha \Delta_{41} - \beta \Delta_{42} + \gamma \Delta_{43} + \delta \Delta_{44} \quad (2.66)$$

Постоянная $l(\lambda)$ есть коэффициент при z^2 в разложении $Z(x_1, x_2, x_3, z)$ по степеням z . Находим отсюда для $l(\lambda_0)$ выражение

$$l(\lambda_0) = \alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 + \delta L_4 \quad (2.67)$$

где

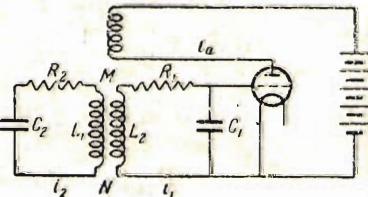
$$L_4 = a_{11}^{(\nu)} \sigma_1^2 + a_{22}^{(\nu)} \sigma_2^2 + a_{33}^{(\nu)} \sigma_3^2 + \frac{1}{\delta^2} a_{44}^{(\nu)} (1 - \alpha \sigma_1 - \beta \sigma_2 - \gamma \sigma_3)^2 + \frac{2}{\delta} a_{14}^{(\nu)} (1 - \alpha \sigma_1 - \beta \sigma_2 - \gamma \sigma_3) \sigma_1 + \frac{2}{\delta} a_{24}^{(\nu)} (1 - \alpha \sigma_1 - \beta \sigma_2 - \gamma \sigma_3) \sigma_2 + \frac{2}{\delta} a_{34}^{(\nu)} (1 - \alpha \sigma_1 - \beta \sigma_2 - \gamma \sigma_3) \sigma_3 + 2a_{12}^{(\nu)} \sigma_1 \sigma_2 + 2a_{13}^{(\nu)} \sigma_1 \sigma_3 + 2a_{23}^{(\nu)} \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.68)$$

Значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, даны в (2.63) и (2.66).

4°. *Пример. Сложный генератор.* Рассмотрим схему, изображенную на фиг. 13. Пренебрегая реакцией анода и сеточным током, имеем для токов в контурах уравнения

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt = N \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_a}{dt}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt = N \frac{di_1}{dt} \quad (2.69)$$



Фиг. 13.

Характеристику лампы примем в виде

$$i_a = S_0 V_1 \left(1 - \frac{V_3^2}{3V_s^2}\right) \quad (2.70)$$

где крутизна в нулевой точке S_0 и напряжение насыщения V_s кон-

станты, а V_1 и в дальнейшем V_2 определяются формулами

$$V_1 = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_2 dt, \quad V_2 = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt \quad (2.71)$$

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{V_1}{V_2} \sqrt{\frac{MS_0}{MS_0 - R_1 C_1}}, \quad y = \frac{V_2}{V_2} \sqrt{\frac{MS_0}{MS_0 - R_1 C_1}}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} t \quad (2.72)$$

Уравнения (2.69) в этих переменных имеют вид:

$$\ddot{x} + x - x_1 \ddot{y} = \delta(1 - x^2) \dot{x}, \quad \ddot{y} + \zeta y - x_2 \ddot{x} = -\delta \varepsilon y \quad (2.73)$$

где безразмерные параметры будут

$$x_1 = \frac{NC_2}{L_1 C_1}, \quad x_2 = \frac{NC_1}{L_2 C_2}, \quad \delta = \frac{MS_0 - RC_1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \varepsilon = \frac{R_2 L_1 C_1}{L_2 (MS_0 - R_1 C_1)} \quad (2.74)$$

Систему (2.73) заменим одним уравнением четвертого порядка

$$\sigma \overset{\dots}{x} + \delta(\varepsilon - 1) \overset{\dots}{x} + (1 + \zeta - \delta^2 \varepsilon) \overset{\dots}{x} + \delta(\varepsilon - \zeta) \overset{\dots}{x} + \zeta x = \\ = -\delta [2\dot{x}^3 + 2\delta \varepsilon x \dot{x}^2 + \ddot{x} x^2 + \delta \varepsilon x \ddot{x}^2 + \zeta \dot{x} x^2 + 6\dot{x} x \ddot{x}] \quad (2.75)$$

а затем окончательно представим в виде системы

$$\dot{x}_1 = -px_1 - qx_2 - rx_3 - sx_4 - \frac{2\delta}{\sigma} x_2^3 - \frac{2\delta^2 \varepsilon}{\sigma} x_2 x_3^2 - \frac{\delta}{\sigma} x_1 x_4^2 - \\ - \frac{\delta^2 \varepsilon}{\sigma} x_2 x_4^2 - \frac{\zeta \delta}{\sigma} x_2 x_4^2 - \frac{6\delta}{\sigma} x_2 x_3 x_4 \\ \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2, \quad \dot{x}_4 = x_3 \quad (2.76)$$

где

$$x_1 = \overset{\dots}{x}, \quad x_2 = \overset{\dots}{x}, \quad x_3 = \overset{\dots}{x}, \quad x_4 = x \\ p = \frac{\delta(\varepsilon - 1)}{\sigma}, \quad q = \frac{1 + \zeta - \delta^2 \varepsilon}{\sigma}, \quad r = \frac{\delta(\varepsilon - \zeta)}{\sigma}, \quad s = \frac{\zeta}{\sigma}, \quad \sigma = 1 - x_1 x_2$$

Условия Рауса-Гурвица дают для системы (2.76) неравенства

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad s > 0, \quad R = pqr - ps^2 - r^2 > 0$$

Нумерация переменных в системе уравнений (2.76) такова, что условия $D_{11}(x_3) \neq 0$ и $D_{44}(x_1) \neq 0$ выполняются. В самом деле,

$$D_{44}(x_1) = \begin{vmatrix} -p - bi & -q & -r \\ 1 & -bi & 0 \\ 0 & 1 & -bi \end{vmatrix} = b^2(p + bi) - r - qbi$$

Но так как $b^2 = r/p$ и $R = pqr - ps^2 - r^2 = 0$, то имеем

$$D_{44}(x_1) = (b^2 - q)bi = \frac{r - pq}{p} bi = \frac{spb}{r} \neq 0$$

Также имеем

$$D_{11}(x_3) = \begin{vmatrix} -(m + ni) & 0 & 0 \\ 1 & -(m + ni) & 0 \\ 0 & 1 & -(m + ni) \end{vmatrix} \neq 0$$

Вычислим $L(\lambda_0)$ на границе $R=0$. Согласно (2.25) получаем

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4b} (A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}) \quad (2.77)$$

Для α_{ji} из (2.17) и (2.76) находим

$$\begin{array}{llll} \alpha_{11} = sb^2, & \alpha_{12} = 0, & \alpha_{13} = m^3 - 3mn^2, & \alpha_{14} = n^3 - 3m^2n \\ \alpha_{21} = 0, & \alpha_{22} = bs, & \alpha_{23} = m^2 - n^2, & \alpha_{24} = -2mn \\ \alpha_{31} = -s, & \alpha_{32} = 0, & \alpha_{33} = m, & \alpha_{34} = -n \\ \alpha_{41} = 0, & \alpha_{42} = b^3 - bq - \frac{spb}{r}, & \alpha_{43} = 1, & \alpha_{44} = 0 \end{array}$$

Из (2.19), принимая во внимание, что

$$\begin{array}{lll} a_{333}^{(1)} = -\frac{2\delta}{\sigma}, & a_{234}^{(1)} = -\frac{2\delta^2\epsilon}{3\sigma}, & a_{144}^{(1)} = -\frac{\delta}{3\sigma} \\ a_{244}^{(1)} = -\frac{\delta^2\epsilon}{3\sigma}, & a_{344}^{(1)} = -\frac{\zeta\delta}{3\sigma}, & a_{284}^{(1)} = -\frac{\delta}{\sigma} \end{array}$$

находим

$$\begin{array}{lll} A_{111}^{(1)} = \frac{2\delta s^3}{\Delta} \alpha_{11}', & A_{222}^{(2)} = -\frac{\delta^2 \epsilon b^3 s^3 p^2}{\sigma r^3 \Delta} \alpha_{21}', & A_{112}^{(2)} = \frac{2\delta^2 \epsilon s^3 b p}{3\sigma r \Delta} \alpha_{21}' \\ A_{122}^{(1)} = \frac{\delta \zeta s^3 b^3 p^2 - \delta s^3 b^4 p^2 - 6\delta s^3 b^2 p r}{3\sigma r^3 \Delta} \alpha_{11}' \end{array}$$

где

$$\alpha_{11}' = \frac{nbs}{r^2} (r^2 - sp^2), \quad \alpha_{21}' = -2mns$$

Подставляя полученные величины в выражение для $L(\lambda)$ и воспользовавшись для упрощения результата соотношением $b^3 = r/p$, окончательно получаем



Фиг. 14.

$$\begin{aligned} L(\lambda_0) &= \frac{\pi n s^4 \delta}{4\sigma \Delta r^3} [(r^2 - sp^2)(p\zeta - r) - \delta \epsilon r^2 \rho^2] = \\ &= \frac{\pi n s^4 \delta^4}{4\sigma^4 \Delta r^3} \{[\sigma(\epsilon - \zeta)^2 - \zeta(\epsilon - 1)^2](\zeta - 1)\epsilon - \delta^2(\epsilon - \zeta)^2(\epsilon - 1)^3\} \quad (2.78) \end{aligned}$$

где

$$\Delta = bn [(n^2 - b^2)^2 + m^2 (m^2 + 2n^2 + 2b^2)] > 0$$

Знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком выражения в фигурных скобках. На фиг. 14 в плоскости параметров ϵ, ζ изображена часть кривой

$$R = \frac{\delta^2}{\sigma^2} [(\epsilon - 1)(\epsilon - \zeta)(1 + \zeta - \delta^2 \epsilon) - \zeta(\epsilon - 1)^2 - \sigma(\epsilon - \zeta)^2] = 0$$

проходящая внутри области $p > 0, q > 0, r > 0, s > 0$, и кривая $L(\lambda_0)$. Кривые R и L пересекаются в точке (1,1) (для каждой из кривых это кратная точка), причем кривая $L(\lambda_0)$ проходит внутри области устойчивости, ограниченной петлей кривой $R=0$. Первый ляпуновский коэффициент $L(\lambda_0)$ всюду на границе области устойчивости отрицателен.

Проведенное вычисление выражения $L(\lambda_0)$ выполнено в предположении, что на границе $R=0$ вторая пара корней комплексная. Гра-

ница комплексных корней на кривой $R=0$ дается точками пересечения с кривой

$$4s - rp = \frac{1}{\sigma^2} [4\sigma\zeta - \delta^2 (s-1)(s-\zeta)]$$

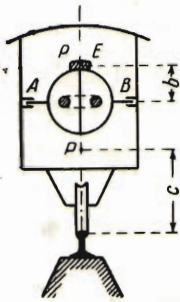
В плоскости переменных $\epsilon\zeta$ это гипербола, пересекающая границу $R=0$ области устойчивости, если δ невелико. Вычисление $L(\lambda_0)$ для случая, когда вторая пара корней на границе $R=0$ действительная, дает для $L(\lambda_0)$ выражение, совпадающее с только что вычисленным с точностью до постоянного положительного множителя.

Таким образом, граница $R=0$ области устойчивости в обоих случаях безопасная. При нарушении границы области устойчивости изменением ϵ и δ происходит мягкое возникновение автоколебаний.

5°. *Пример. Однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией.* Рассмотрим однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией, схема которого представлена на фиг. 15. Приближенные уравнения движения такой системы имеют вид [3]:

$$A_0 \ddot{x} - C \omega \dot{y} - p^\circ b x = -\gamma'' \dot{x} + M_x, \quad J_0 \ddot{y} + C \omega \dot{x} - P c y = -\gamma' \dot{y} \quad (2.79)$$

где x — угол поворота рамы, y — угол отклонения вагона от вертикали. A_0, J_0 — приведенные моменты инерции, C — момент инерции гироскопа относительно оси симметрии, ω — собственная угловая скорость гироскопа, c — расстояние от центра тяжести E всей системы без груза до рельса, P — вес всей системы без груза, p° — вес груза, b — расстояние от оси AB до груза, γ' и γ'' — коэффициенты вязкого трения для вагона и для рамы, M_x — сервомомент, осуществляющий стабилизацию.



Фиг. 15.

Рассмотрим сервомомент вида

$$M_x = (\alpha' - \beta' \dot{x}^2) \dot{x} \quad (0 < \gamma'' \leq \alpha') \quad (2.80)$$

Обозначая коэффициент результирующего трения через

$$\delta' = \alpha' - \gamma'' \quad (\delta' > 0) \quad (2.81)$$

и переходя к безразмерным переменным

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{\sqrt{A_0 p^\circ b}}{c \omega} y, \quad x_3 = \sqrt{\frac{A}{p^\circ b}} \dot{x}, \quad x_4 = \frac{C \omega}{p^\circ b} \dot{y}, \quad \tau = \sqrt{\frac{p^\circ b}{A_0}} t$$

получаем систему

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = x_1 + \delta x_3 + x_2 - \delta \beta x_3^2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = x_4, \quad \frac{dx_4}{d\tau} = \zeta x_2 - \kappa x_3 - \nu x_4 \quad (2.82)$$

где безразмерные параметры будут

$$\delta = \frac{\delta'}{\sqrt{A_0 p^\circ b}}, \quad \beta = \frac{\beta'}{\delta'} \frac{p^\circ b}{A_0}, \quad \zeta = \frac{P c C^2 \omega^2}{(p^\circ b)^2 J_0}, \quad \kappa = \frac{C^2 \omega^2}{J_0 p^\circ b}, \quad \nu = \frac{\gamma'}{J_0} \sqrt{\frac{A_0}{p^\circ b}}$$

Составляя характеристическое уравнение, находим, что

$$p = \nu - \delta, \quad q = \kappa - \delta \nu - \kappa - 1, \quad r = \zeta \delta - \nu, \quad s = \zeta$$

Условия Рауса-Гурвица для системы (2.82) дают неравенства

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad s > 0, \quad R = pqr - sp^2 - r^2 > 0$$

совместные при $\zeta > 1$ и ограничивающие область, данную на фиг. 16.

Нумерация переменных в системе (2.82) введена таким образом, что условия $D_{11}(x_3) \neq 0$ и $D_{44}(x_1) \neq 0$ выполняются. В самом деле,

$$\begin{vmatrix} -bi & 0 & 1 \\ 1 & -bi & 0 \\ 0 & 0 & \delta - bi \end{vmatrix} = b(b^2 + 1)i - \delta b^2 \neq 0 \quad (2.83)$$

$$\begin{vmatrix} -x_3 & 0 & 1 \\ 0 & \delta - x & 1 \\ \zeta & -x & -\nu - x_3 \end{vmatrix} = -x_3^3 + (\delta - \nu)x_3^2 + (\zeta - x + \delta\nu)x_3 - \zeta\delta \neq 0 \quad (2.84)$$

В неравенстве нулю последнего выражения можно убедиться следующим образом: если x_3 — корень, то x_4 (сопряженный x_3) — тоже корень, и так как $x_3 + x_4 = 2m = -p = \delta - \nu$, т. е. как раз равно коэффициенту при переменной x_3^2 с обратным знаком в уравнении $x_3^3 + (\nu - \delta)x_3^2 + (\delta\nu + x - \zeta)x_3 + \zeta\delta = 0$, то, следовательно, третий корень должен был бы быть нулевым. Последнее невозможно, так как $\zeta\delta \neq 0$.

Вычислим знак $L(\lambda_0)$ на границе $R=0$. Так как система (2.82) не имеет членов второго порядка, выражение для $L(\lambda_0)$ принимает вид:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4b} (A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}) \quad (2.85)$$

где

$$A_{kls}^{(j)} = -\frac{\delta\beta}{\Delta} \alpha_{js}' \alpha_{sk} \alpha_{sl} \alpha_{ss} \quad (2.86)$$

Для α_{ji} из (2.17) и (2.82) находим¹

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0, & \alpha_{12} &= -l, & \alpha_{13} &= m(x - \zeta - n^2 - m^2 - \delta\nu) + \zeta\delta \\ \alpha_{14} &= n(m^2 + n^2 + \delta\nu + \zeta - x), & \alpha_{21} &= -(1 + b^2), & \alpha_{22} &= b\delta \\ \alpha_{23} &= -x, & \alpha_{24} &= 0, & \alpha_{31} &= -b^2, & \alpha_{32} &= 0, & \alpha_{33} &= m^2 - n^2 + m\nu - \zeta \\ \alpha_{34} &= -n\delta, & \alpha_{41} &= \delta l^2, & \alpha_{42} &= b(1 + b^2), & \alpha_{43} &= -mx, & \alpha_{44} &= nx \end{aligned}$$

Из равенства (2.86) в силу того, что величина $\alpha_{32} = 0$, находим $A_{222}^{(2)} = A_{112}^{(2)} = A_{122}^{(1)} = 0$, т. е.

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi b^5 \delta \beta}{4\Delta} \alpha_{13}'$$

Вычисляя α_{13}' (минор элемента α_{31}) и воспользовавшись для упрощения полученного выражения соотношениями

$$m = \frac{\delta - \nu}{2}, \quad b^2 = \frac{r}{p} = \frac{\zeta\delta - \nu}{\nu - \delta}, \quad n^2 = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4} = \frac{\zeta - m^2 b^2}{b^2}$$

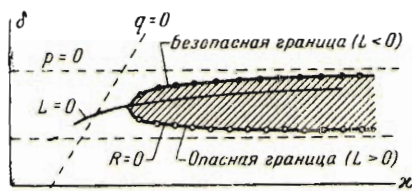
¹ Для ν не слишком большого $\nu\delta < 4\zeta(\zeta + 1)$ выполняется неравенство $4s - rp > 0$. Мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда характеристическое уравнение не имеет действительных корней.

а также уравнением кривой $R=0$, окончательно получаем

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi l \delta^3 \beta^2 k}{4\Delta} \left\{ \kappa - \left[1 + \left(\frac{\xi\delta - \nu}{\nu - \delta} \right)^2 \right] - \zeta\delta^2 \right\} \quad (2.87)$$

Знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком выражения в квадратных скобках, так как $\Delta > 0$; знак Δ всегда легко определить, так как все вычисления ведутся таким образом, что Δ не может обратиться в нуль, и, следовательно, достаточно определить знак при подходящим образом выбранных частных значениях параметров.

На фиг. 16 в плоскости параметров κ, δ изображена часть кривой $R=0$, проходящая внутри области $p > 0, q > 0, r > 0, s > 0$, и кривая



Фиг. 16.

$L(\lambda_0)=0$. На той части кривой $R=0$, которая расположена выше кривой $L(\lambda_0)=0$, коэффициент $L(\lambda_0)$ отрицателен и, следовательно, нарушение границы $R=0$ за счет увеличения параметра δ приводит к автоколебаниям вагона достаточно малым, если малы нарушения границы (*безопасная часть*

границы $R=0$). На другой части кривой $R=0$, расположенной ниже кривой $L(\lambda_0)=0$, знак $L(\lambda_0)$ будет положительным и, следовательно, нарушение границы $R=0$ за счет уменьшения параметра δ (сколь угодно малое нарушение) приводит к раскачиванию вагона с возрастающей амплитудой (*опасная часть* границы $R=0$).

6°. *Пример. Система с неконсервативными силами, зависящими от положения.* Рассмотрим плоское движение приведенной массы, на которую действуют:

- а) квазиупругая сила, пропорциональная смещению из положения равновесия;
- б) сила вязкого трения, пропорциональная скорости;
- в) неконсервативная сила, зависящая от положения массы m и способная возбудить автоколебания.

К такого рода задаче может быть сведена согласно С. П. Стрелкову^[4] задача о колебаниях струны в струе воздуха.

Уравнения движения, к которым пришел С. П. Стрелков, имеют вид:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\delta'\dot{\mathbf{R}} - k\mathbf{R} + \mathbf{F} \quad (2.88)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} (\alpha'\rho + \gamma'\rho^3)$, причем \mathbf{k} — единичный нормальный к плоскости xu вектор, \mathbf{r} — единичный вектор, направленный по радиусу-вектору, лежащему в плоскости xu , далее ρ — модуль радиуса-вектора, α' и γ' — некоторые коэффициенты.

С. П. Стрелков исследовал эти уравнения методом Ван-дер-Поля в предположении малости α' и γ' .

Исследуем поведение систем (2.88) вблизи границ области устойчивости (не считая α' и γ' малыми).

Переходя к декартовым координатам, получим систему

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \delta'\dot{x} + kx &= -\alpha'y - \gamma y^3 - \gamma x^2 y, \\ m\ddot{y} + \delta'\dot{y} + ky &= \alpha'x + \gamma x^3 + \gamma xy^2 \end{aligned} \quad (2.89)$$

Вводя обозначение $x = x_1$, $y = x_2$, $\dot{x} = x_3$, $\dot{y} = x_4$ и безразмерное время $\tau = t\sqrt{k/m}$, представим уравнение (2.89) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_3, & \frac{dx_3}{d\tau} &= -x_1 - \alpha x_2 - \delta x_3 - \gamma x_2^3 - \gamma x_1^2 x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_4, & \frac{dx_4}{d\tau} &= \alpha x_1 - x_2 - \delta x_4 + \gamma x_1^3 - \gamma x_1 x_2^3 \end{aligned} \quad (2.90)$$

где

$$\delta = \frac{\delta'}{\sqrt{km}}, \quad \alpha = \frac{\alpha'}{k}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{k}$$

Условия Рауса-Гурвица в этом случае

$$\begin{aligned} p &= 2\delta > 0, & q &= 2 + \delta^2 > 0, & r &= 2\sigma > 0, \\ s &= 1 + \alpha^2 > 0, & R &= pqr - sp^2 - r^2 = 4\delta^2(\delta^2 - \alpha^2) > 0 \end{aligned}$$

сводятся к двум неравенствам:

$$\delta > 0, \quad \delta^2 - \alpha^2 > 0$$

Корни характеристического уравнения на границе $R=0$ будут

$$x_1 = bi = i, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = m + ni = -\delta + i, \quad x_4 = -\delta - i$$

Нумерация уравнений (2.90) введена таким образом, что условия

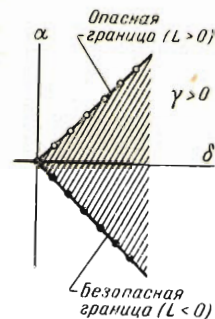
$$D_{11}(x_3) \neq 0, \quad D_{44}(x_1) \neq 0$$

выполняются. В самом деле,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -x_1 & 0 & 1 \\ 0 & -x_1 & 0 \\ -1 & -\alpha & -\delta - x_1 \end{vmatrix} &= \delta \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -x_3 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\delta - x_3 & 0 \\ -1 & 0 & -\delta - x_3 \end{vmatrix} &= -\delta \neq 0 \end{aligned}$$

Вычислим $L(\lambda_0)$ на границе $R=0$. Для α_{ji} из (2.17) и (2.90) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\alpha, & \alpha_{12} &= 0, & \alpha_{13} &= \delta, & \alpha_{14} &= 0 \\ \alpha_{21} &= 0, & \alpha_{22} &= -\delta, & \alpha_{23} &= 0, & \alpha_{24} &= -\alpha \\ \alpha_{31} &= 0, & \alpha_{32} &= \alpha, & \alpha_{33} &= -\alpha^2, & \alpha_{34} &= -\delta \\ \alpha_{41} &= -\delta, & \alpha_{42} &= 0, & \alpha_{43} &= -\alpha, & \alpha_{44} &= \alpha\delta \end{aligned}$$



Фиг. 17.

Так как система (2.90) не содержит членов второго измерения, то выражение для $L(\lambda_0)$ принимает вид:

$$L(\lambda_0) = \frac{3\pi}{4\delta} (A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)})$$

Вычисляя $A_{kls}^{(j)}$ по формулам (2.20), находим

$$A_{111}^{(1)} = \frac{1}{\Delta} a_{111}^{(4)} \alpha_{11}^3 \alpha_{14}', \quad A_{222}^{(2)} = \frac{1}{\Delta} a_{222}^{(3)} \alpha_{22}^3 \alpha_{23}'$$

$$A_{112}^{(2)} = \frac{1}{\Delta} a_{112}^{(3)} \alpha_{11}^2 \alpha_{22} \alpha_{23}', \quad A_{122}^{(1)} = \frac{1}{\Delta} a_{221}^{(4)} \alpha_{11} \alpha_{22}^2 \alpha_{14}'$$

Здесь

$$a_{111}^{(4)} = \gamma, \quad a_{222}^{(3)} = -\gamma, \quad a_{112}^{(3)} = -\frac{\gamma}{3}, \quad a_{221}^{(4)} = \frac{\gamma}{3}$$

$$\alpha_{14}' = \delta(\alpha^2 + \delta^2), \quad \alpha_{23}' = -\alpha(\alpha^2 + \delta^2)$$

$$\Delta = -[\alpha^4 + \delta^2 + (\alpha^2 + \delta^2)^2]$$

Откуда для $L(\lambda_0)$ получаем

$$L(\lambda_0) = \frac{\pi\alpha\gamma\delta}{42\Delta} (\alpha^2 + \delta^2)^2 \quad (2.91)$$

Так как $\delta > 0$, знак $L(\lambda_0)$ определяется знаком произведения $\alpha\gamma$ (свойствами характеристики $F = \alpha'\rho + \gamma'\rho^3 = k(\alpha\rho + \gamma\rho^3)$). Возможны случаи $\alpha\gamma > 0$ и $\alpha\gamma < 0$. На фиг. 17 дана область Рауса-Гурвица для фиксированного $\gamma > 0$. В зависимости от знака $\alpha\gamma$ при нарушении границы $R=0$ происходит либо мягкое возникновение автоколебаний ($\alpha\gamma < 0$), либо срыв изображающей точки из состояния равновесия ($\alpha\gamma > 0$).

3. Замечания к общему случаю системы n уравнений первого порядка

Как и для систем двух, трех и четырех уравнений, можно провести аналогичные вычисления для $L(\lambda_0)$ в общем случае системы n уравнений. Однако для $n > 4$ возникает принципиальное затруднение, обесценивающее эти формулы. В случаях систем двух, трех и четырех уравнений оказывалось возможным на границе $R=0$ найти простые явные выражения для корней характеристического уравнения. Это оказывается невозможным для случая $n > 4$. Поэтому приходится при применении этих формул или ограничиваться случаями распада характеристического уравнения, когда на границе $R=0$ его корни могут быть легко определены, или вычислять $L(\lambda_0)$ для тех случаев, когда можно найти с желаемой точностью приближенные значения корней характеристического уравнения на границе $R=0$.

Мы ограничимся частным случаем системы n уравнений, когда разложения правых частей не содержат членов второго измерения. В этом

случае выражение для $L(\lambda_0)$ может быть дано в удобообозримом виде.

Рассмотрим систему¹

$$\frac{dx_i}{dt} = a_1^{(i)}x_1 + \dots + a_n^{(i)}x_n + P_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.1)$$

где $P_i(x_1, \dots, x_n)$ не содержат членов второго измерения. Характеристическое уравнение, соответствующее системе (3.1):

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0 \quad (3.2)$$

имеет, как нетрудно показать, одну пару чисто мнимых корней и остальные корни с отрицательной действительной частью, если при выполнении условий Рауса-Гурвица

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \dots, D_{n-2} > 0; \quad p_n > 0$$

имеет место равенство

$$D_{n-1} \equiv R = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-3} & p_{2n-4} & p_{2n-5} & p_{2n-6} & p_{2n-7} \dots p_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

($p = 0$, если $2p > n + 2$)

Пусть характеристическое уравнение (3.2) имеет на границе $R = 0$ корни $bi, -bi, m_\nu \pm n_\nu i, \sigma_k$. Общее решение линейной системы, соответствующей системе (3.1) на границе $R = 0$, имеет вид:

$$x_\mu = h [\alpha_{\mu_1} \cos b(t + t_0) + \alpha_{\mu_2} \sin b(t + t_0)] + \sum_k h_k \alpha_{\mu k} e^{\sigma_k t} + \sum_\nu h_\nu e^{m_\nu(t+t_\nu)} [\alpha_{\mu, 2\nu+1} \cos n_\nu(t + t_\nu) + \alpha_{\mu, 2\nu+2} \sin n_\nu(t + t_\nu)]$$

где $h, h_\nu, h_k, t_0, t_\nu$ — произвольные постоянные. Введем переменные

$$\begin{aligned} \eta_k &= t + t_0, & \eta_{2\nu+1} &= h_\nu e^{m_\nu(t+t_\nu)} \cos n_\nu(t + t_\nu) \\ \eta_k &= h_k e^{\sigma_k t}, & \eta_{2\nu+2} &= h_\nu e^{m_\nu(t+t_\nu)} \sin n_\nu(t + t_\nu) \end{aligned}$$

связанные с переменными x_μ соотношениями

$$x_\mu = h [\alpha_{\mu_1} \cos bs + \alpha_{\mu_2} \sin bs] + \sum_\nu \alpha_{\mu, 2\nu+1} \eta_{2\nu+1} + \sum_\nu \alpha_{\mu, 2\nu+2} \eta_{2\nu+2} + \sum_k \alpha_{\mu, k} \eta_k \quad (\nu=1, \dots, l; k=2l+3, \dots, n-2) \quad (3.3)$$

Поступая совершенно аналогично тому как в рассмотренных выше случаях системы двух, трех и четырех уравнений, найдем

$$L(\lambda_0) = \frac{1}{3! b \Delta_0} \left\{ \frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/b} D ds \right\}_{h_0=0} \quad (3.4)$$

¹ Такого рода системы часто возникают, когда характеристики различных устройств аппроксимируются кривыми, не содержащими членов второго измерения.

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ f_{1s}' & f_{2s}' & \dots & f_{ns}' \\ a_{1s} & a_{2s} & \dots & a_{ns} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta = |\alpha_{jz}|$$

$$P_j = P_j(f_1, \dots, f_n)$$

где

$$f_\mu = h_0 [\alpha_{\mu 1} \cos bs + \alpha_{\mu 2} \sin bs]$$

есть уравнения кривой C_{h_0} , причем α_{ji} — коэффициенты в решениях (3.3) соответствующей линейной системы.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. А. Андронову под руководством которого выполнялась эта работа.

Поступила в редакцию
15 XII 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. О поведении динамических систем при малых нарушениях устойчивости Рауса-Гурвица. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
3. Баутин Н. Н. О рождении предельного цикла из состояния равновесия типа фокус. ЖТФ. 1938. № 6.
4. Стрелков С. П. К теории автоколебаний под действием сил, зависящих от положения. ЖТФ. 1939. Т. IX. Вып. 17.