Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ ЛЯПУНОВА

И. Г. Малкин

(Свердловск)

В этой работе основные результаты, изложенные в статье автора[1], посвященной колебаниям систем с одной степенью свободы, распространены на системы более общего вида.

§ 1. Порождающие решения. n°1. Основные результаты, полученные для системы с одной степенью свободы, могут быть распространены на системы значительно более общего вида. Допустим, что колебания системы описываются уравнениями вида

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + \cdots + q_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) + \mu f_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) = F_s + \mu f_s$$

где $$(1.1)$$

$$F_s = q_{s1}x_1 + \cdots + q_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Здесь $X_s(x_1, \ldots, x_n)$ суть независящие от t аналитические функции, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, а f_s суть аналитические функции от $x_1, \ldots, x_n$ и малого параметра μ, разложения которых содержат, вообще говоря, как линейные, так и не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$ члены, причем коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом, который мы примем равным 2π.

Рассмотрим порождающую систему

$$\frac{dx_s^0}{dt} = F_s^0 = q_{s1}x_1^0 + \cdots + q_{sn}x_n^0 + X_s(x_1^0, \ldots, x_n^0) \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (1.2)$$

Относительно этой системы сделаем два основных предположения:

1. Будем предполагать, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} q_{11} - \rho & q_{12} \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} - \rho \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} \cdots & q_{nn} - \rho \end{vmatrix} = \| q_{ik} - \delta_{ik}\rho \| = 0 \qquad (1.3)$$

имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых некратных корней $\pm \lambda i$ и не имеет ни нулевого корня, ни корней вида $\pm p\lambda i$, где p — целое число[1].

---

[1] Приведенная здесь запись характеристического определителя с помощью символа Кронекера $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ будет применяться в дальнейшем.

При таком предположении, можно, не нарушая общности рассуждения, считать, что уравнения (1.1) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_m) + \mu f(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu) \\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_m) + \mu F(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu) \qquad (1.4) \\
\frac{dx_s}{dt} &= r_{s1}x_1 + \ldots + r_{sm}x_m + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_m) + \mu f_s(t, x, y, x_1, \ldots, x_m, \mu) \\
&\qquad (s = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

где $m = n - 2$, а характеристическое уравнение

$$\| r_{ik} - \delta_{ik}\rho \| = 0 \qquad (1.5)$$

не имеет ни нулевого корня, ни корней вида $\pm p\lambda i$. В самом деле, при принятом предположении относительно корней уравнения (1.3) уравнения (1.1) можно привести к виду (1.4) при помощи простого линейного преобразования. Такое преобразование, если в нем будет необходимость, будем считать заранее выполненным[1].

2. Будем предполагать, что для порождающей системы (1.2), которой может быть придан вид (1.6)

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx^\circ}{dt} = -\lambda y^\circ + X(x^\circ, y^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ), \qquad \frac{dy^\circ}{dt} = \lambda x^\circ + Y(x^\circ, y^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ) \\
&\frac{dx_s^\circ}{dt} = r_{s1}x_1^\circ + \cdots + r_{sm}x_m^\circ + X_s(x^\circ, y^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ) \qquad (s = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

существует не зависящий от t аналитический первый интеграл, в котором совокупность членов второго порядка зависит от x° и y°.

Легко показать, что при сделанных предположениях этот интеграл не может содержать членов первого порядка, а члены второго порядка могут содержать x° и y° только в комбинации $x^{\circ 2} + y^{\circ 2}$. Поэтому рассматриваемый интеграл имеет вид:

$$H = x^{\circ 2} + y^{\circ 2} + S(x^\circ, y^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ) = \text{const} \qquad (1.7)$$

где S — аналитическая функция, разложение которой начинается членами не ниже второго порядка, а члены второго порядка, если они существуют, не содержат x° и y°.

n°2. При сделанных выше предположениях Ляпунов доказал, что порождающая система (1.6) имеет периодическое частное решение, содержащее две произвольные постоянные. Это периодическое решение характеризуется тем, что в нем величины x_s° являются определенными аналитическими функциями величин x° и y° (в окрестности $x^\circ = y^\circ = 0$) и, следовательно, начальные значения α_s величин x_s° являются аналитическими функциями начальных значений α и β величин x° и y°. Что же касается α и β, то они могут быть выбраны совершенно произвольно, лишь бы они

[1] Разумеется, если уравнения были заданы не сразу в форме (1.4) и необходимо было предварительное преобразование, то переменные и функции x_s, X_s и f_s в уравнениях (1.1) будут отличаться от переменных и функций, обозначенных теми же буквами в уравнениях (1.4).

были численно достаточно малыми, и являются теми двумя произвольными постоянными, от которых зависит рассматриваемое периодическое решение. Период решения является также аналитической функцией α и β. Самое решение может быть получено следующим образом.

Рассмотрим систему уравнений с частными производными

$$\frac{\partial x_s^\circ}{\partial x^\circ}(-\lambda y^\circ + X) + \frac{\partial x_s^\circ}{\partial y}(\lambda x^\circ + Y) = \tag{1.8}$$

$$= r_{s1}x_1^\circ + \cdots + r_{sm}x_m^\circ + X_s(x^\circ, y^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ) \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

Как показал Ляпунов, существует одна и только одна система аналитических функций $x_s^\circ = w_s(x^\circ, y^\circ)$, удовлетворяющих уравнениям (1.8). Заменяя этими функциями величины x_s° в первых двух уравнениях (1.6), получим систему двух уравнений: (1.9)

$$\frac{dx^\circ}{dt} = -\lambda y^\circ + X(x^\circ, y^\circ, w_1, \ldots, w_m), \qquad \frac{dy^\circ}{dt} = \lambda x^\circ + Y(x^\circ, y^\circ, w_1, \ldots, w_m)$$

для которых, очевидно, существует первый интеграл

$$x^{\circ 2} + y^{\circ 2} + S(x^\circ, y^\circ, w_1, \ldots, w_m) = \text{const} \tag{1.10}$$

Уравнения (1.9) отличаются от уравнений (0.1), рассмотренных в работе [1], только тем, что для них условие консервативности заменено несколько более общим условием существования первого интеграла (1.10). Это, однако, не имеет никакого значения для результатов § 1 указанной работы и все эти результаты целиком переносятся на систему (1.9). Таким образом, общее решение этих уравнений при достаточно малых начальных значениях α и β величин x° и y° будет периодическим и период этого решения будет аналитической функцией α и β.

Определив $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ из уравнений (1.9) и добавив к ним соотношения $x_s^{(0)} = w_s(x^{(0)}, y^{(0)})$, мы и получим искомое периодическое решение уравнений (1.6).

Рассмотрим несколько подробнее выражение для периода решения, который обозначим через T. На основании результатов работы [1] имеем

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + H_{2l}C^{2l} + H_{2l+2}C^{2l+2} + \cdots)$$

где через C^2 обозначена постоянная в интеграле (1.10).

Так как правые части уравнений (1.8) не содержат x° и y° в линейных членах, то, как нетрудно видеть, разложения функций w_s начнутся не ниже второго порядка. Поэтому C^2 имеет вид:

$$C^2 = \alpha^2 + \beta^2 + S[\alpha, \beta, w_1(\alpha, \beta), \ldots, w_m(\alpha, \beta)] = \alpha^2 + \beta^2 + \cdots$$

где многоточием обозначена совокупность членов не ниже третьего порядка. Таким образом,

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}\{1 + H_{2l}(\alpha^2 + \beta^2)^l + T_{2l+1}\} \tag{1.11}$$

где T_{2l+1} — аналитическая функция α и β, разложение которой начинается членами порядка не ниже $2l + 1$. При начальных значениях $\alpha = c$,

$\beta=0$, где c — произвольная постоянная, выражение периода примет вид:

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_{2l}c^{2l}+h_{2l+1}c^{2l+1}+\cdots) \qquad (h_{2l}=H_{2l}) \qquad (1.12)$$

Это выражение содержит также и нечетные степени c.

n° 3. Для практического вычисления рассматриваемого периодического решения удобнее всего пользоваться следующим приемом. Будем искать периодическое решение, зависящее не от двух, а только от одной произвольной постоянной. С этой целью примем для x° и y° начальные условия $\alpha=c$, $\beta=0$. Тогда период решений примет вид (1.12), причем число l будет в общем случае равняться единице.

Если в уравнениях (1.6) заменять t на величину τ при помощи соотношения

$$t=\frac{\tau}{\lambda}(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots)$$

то задача сведется к отысканию периодического решения с периодом 2π для полученных таким образом уравнений

$$\frac{dx^\circ}{d\tau}=\left(-y^\circ+\frac{1}{\lambda}\right)(1+h_2c^2+\cdots), \qquad \frac{dy^\circ}{d\tau}=\left(x^\circ+\frac{1}{\lambda}Y\right)(1+h_2c^2+\ldots)$$
$$\frac{dx_s^\circ}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}(r_{s1}x_1^\circ+\cdots+r_{sm}x_m^\circ+X_s)(1+h_2c^2+\ldots) \quad (s=1,\ldots,m)$$

Оставляя постоянные $h_2, h_3, \ldots$ неопределенными, попытаемся удовлетворить этим уравнениям рядами

$$x^\circ=cx_1^\circ+c^2x_2^\circ+\cdots, \qquad y^\circ=cy_1^\circ+c^2y_2^\circ+\cdots, \qquad x_s=c^2x_{s2}^\circ+c^3x_{s3}^\circ+\ldots$$

у которых коэффициенты были бы периодическими функциями τ периода 2π. При этом имеем начальные условия

$$x_1^\circ(0)=1, \qquad x_2^\circ(0)=x_3^\circ(0)=\cdots=y_1^\circ(0)=y_2^\circ(0)=\ldots=0 \qquad (1.13)$$

Начальные условия для x_{sk}° заранее, конечно, неизвестны. Очевидно, имеем

$$x_1^\circ=\cos\tau, \qquad y_1^\circ=\sin\tau$$

Допустим, что все $x_j^\circ, y_j^\circ, x_{sj}^\circ$, а также постоянные h_{j-1}, для которых $j<k$, уже вычислены. Тогда для определения $x_k^\circ, y_k^\circ, x_{sk}^\circ$ и h_{k-1} мы будем иметь уравнения

$$\frac{dx_k^\circ}{d\tau}=-y_k^\circ-h_{k-1}\sin\tau+X^{(k)}(\tau), \quad \frac{dy_k^\circ}{d\tau}=x_k^\circ+h_{k-1}\cos\tau+Y^{(k)}(\tau) \qquad (1.14)$$
$$\frac{dx_{sk}^\circ}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}(r_{s1}x_{1k}^\circ+\cdots+r_{sm}x_{mk}^\circ)+X_s^{(k)}(\tau) \quad (s=1,\ldots,m)$$

где $X^{(k)}(\tau)$, $Y^{(k)}(\tau)$ и $X_s^{(k)}(\tau)$ будут уже известными периодическими функциями τ периода 2π. Первые два уравнения (1.14) вместе с начальными условиями (1.13), как это было показано в работе [1], однозначно определяют функции x_k°, y_k° и постоянную h_{k-1}. Для определения функций x_{sk}° служат последние m уравнений (1.14).

Так как характеристическое уравнение

$$\left\| \frac{1}{\lambda} r_{ik} - \delta_{ik} \rho \right\| = 0$$

согласно предположению о корнях уравнения (1.5) не имеет корней вида $\pm pi$, где p — целое число, то уравнения для x_{sk}° имеют, и притом единственное, периодическое решение для этих функций.

Таким образом, мы имеем возможность определить с любой степенью точности периодическое решение, содержащее одну произвольную постоянную. Для нахождения решения, зависящего от двух произвольных постоянных, достаточно заменить t на $t-\alpha$, где α — произвольная постоянная. Итак, рассматриваемое периодическое решение определяется формулами

$$\begin{aligned} &x^\circ = \cos\tau + c^2 x_2^\circ(\tau) + \ldots, && y^\circ = c\sin\tau + c^2 y_2^\circ(\tau) + \ldots \\ &x_s^\circ = c^2 x_{s2}^\circ(\tau) + \ldots, && \tau = \lambda(t-\alpha)(1 + h_2 c^2 + \ldots)^{-1} \end{aligned} \tag{1.15}$$

n° 4. Так же как и в работе [1] для нахождения порождающих решений уравнений (1.6), мы должны в (1.15), оставляя величину α произвольной, величину c заменить корнем c_p уравнения $T = 2\pi / p$, имеющего на основании (1.12) вид:

$$h_{2l} c^{2l} + h_{2l+1} c^{2l+1} + \ldots = \frac{\lambda - p}{p} \tag{1.16}$$

где p — целое число. Это уравнение ничем не отличается от уравнения для c_p в работе [1], и поэтому для него справедливы все заключения, сделанные в указанной работе.

Порождающее решение, отвечающее заданному числу p, будем обозначать через $\{x_0^{(p)}(t-\alpha),\ y_0^{(p)}(t-\alpha),\ x_{0s}^{(p)}(t-\alpha)\}$. Это решение содержит произвольную постоянную α и на основании (1.15) и (1.16) имеет вид:

$$\begin{aligned} &x_0^{(p)}(t-\alpha) = c_p\cos\tau + c_p^2 x_2^\circ(\tau) + \ldots, \\ &y_0^{(p)}(t-\alpha) = c_p\sin\tau + c_p^2 y_2^\circ(\tau) + \ldots \\ &x_{0s}^{(p)}(t-\alpha) = c_p^2 x_{s2}^\circ(\tau), \qquad \tau = p(t-\alpha) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Периодическое решение полной системы (1.4), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (1.17), будем обозначать через $\{x^{(p)}(t),\ y^{(p)}(t),\ x_s^{(p)}(t)\}$. Это решение не содержит произвольного параметра, так как величина α, как это будет показано ниже, должна иметь определенное значение для того, чтобы решение (1.17) действительно порождало периодическое решение системы (1.4).

Кроме (1.17), порождающим решением будет также и тривиальное решение $x^\circ = y^\circ = x_s^\circ = 0$ системы (1.6). Соответствующее ему периодическое решение системы (1.4) будем обозначать через $\{x(t), y(t), x_s(t)\}$ или просто $\{x_s(t)\}$, если пользуемся видом (1.1) уравнений колебаний.

Заметим, наконец, что порождающие решения (1.17) могут быть построены для любой пары чисто мнимых корней уравнения (1.3), для которой справедливы указанные в n° 1 предположения.

§ 2. Периодическое решение $\{x_s(t)\}$. n° 1. Будем исходить из вида (1.1) уравнений колебаний и будем искать периодическое решение этих уравнений, обращающееся при $\mu=0$ в тривиальное решение $x_1^\circ=x_2^\circ=\ldots=x_n^\circ=0$ порождающей системы.

Обозначим через $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ решение уравнений (1.1) с начальными условиями $x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_n)=\beta_s$. Имеем

$$x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_n)=A_{s1}\beta_1+\cdots+A_{sn}\beta_n+C_s\mu+\ldots \quad (s=1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Как легко видеть, A_{sj} представляет собой фундаментальную систему решений линейных уравнений

$$\frac{dA_s}{dt}=q_{s1}A_1+\cdots+q_{sn}A_n \quad (s=1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

удовлетворяющую начальным условиям $A_{sj}(0)=1$ при $s=j$, $A_{sj}(0)=0$ при $s\neq j$.

Для того чтобы решение (2.1) было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$[x_s]=x_s(2\pi, \beta_1, \ldots, \beta_n)-\beta_s=0 \qquad (s=1, \ldots, m)$$

или

$$A_{s1}(2\pi)\beta_1+\cdots+\{A_{ss}(2\pi)-1\}\beta_s+\cdots+A_{sn}(2\pi)\beta_n+[C_s]\mu+\ldots=0 \tag{2.3}$$

Искомое периодическое решение найдем, разрешая систему (2.3) относительно $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и подставляя эти величины в (2.1). Для разрешимости системы (2.3) достаточно, чтобы определитель

$$D=\| A_{ik}(2\pi)-\delta_{ik} \|$$

был отличен от нуля. Можно показать, что имеем тождественно

$$D=(\exp 2\pi\rho_1-1)(\exp 2\pi\rho_2-1)\ldots(\exp 2\pi\rho_n-1) \tag{2.4}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни характеристического уравнения (1.5).

В самом деле, систему (2.2) с постоянными коэффициентами можно рассматривать как частный случай системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами периода 2π. Но тогда уравнение

$$\| A_{ik}(2\pi)-\delta_{ik}\, e^{2\pi\alpha} \|=0$$

определяет так называемые характеристические показатели, которые для уравнений с постоянными коэффициентами представляют собой не что иное, как корни характеристического уравнения. Отсюда непосредственно получается формула (2.4).

Из формулы (2.4) вытекает, что если характеристическое уравнение (1.3) не имеет корней вида $\pm pi$, где p — целое число, то уравнения (1.1) допускают одно и только одно периодическое решение $\{x_s(t)\}$. Вне зависимости от того, выполняются или не выполняются предположения § 1 n° 1.)

Если среди корней уравнения (1.3) имеется хотя бы одна пара вида $\pm pi$, то имеет место резонанс и вопрос о существовании периодического решения $\{x_s(t)\}$ требует особого исследования (см. § 3).

n° 2. Для практического вычисления решения $\{x_s(t)\}$ (в нерезонансном случае) поступаем так же, как и в § 4 в работе[1]. А именно, пытаемся удовлетворить уравнениям (1.1) формальными рядами с периодическими коэффициентами

$$x_s(t) = x_s^{(1)}(t)\mu + x_s^{(2)}\mu^2 + \dots \qquad (s = 1, \dots, n) \tag{2.5}$$

Тогда для нахождения этих коэффициентов получим уравнения

$$\frac{dx_s^{(k)}}{dt} = q_{s1}x_1^{(k)} + \dots + q_{sn}x_n^{(k)} + X_s^{(k)}(t) \qquad (s = 1, \dots, n) \tag{2.6}$$

где $X_s^{(k)}(t)$ суть целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от тех $x_s^{(j)}$, для которых $j < k$. Уравнения (2.6) дают возможность последовательно определять коэффициенты $x_s^{(k)}$ в виде периодических функций времени, причем эти коэффициенты получаются вполне определенными. Ряды (2.5) при достаточно малых $|\mu|$ будут сходиться и действительно представят искомое решение.

§ 3. Периодическое решение при резонансе. n° 1. Рассмотрим случай резонанса. Допустим, что среди корней уравнения (1.3) имеется пара чисто мнимых $\pm pi$, где p — целое число[1]. Будем также предполагать, что других корней такого типа уравнение (1.3) не имеет.

Приведя уравнения колебаний к виду (1.4), имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -py + X + \mu f(t, x, y, x_1, \dots, x_m, \mu), \\
\frac{dy}{dt} &= px + Y + \mu F(t, x, y, x_1, \dots, x_m, \mu) \\
\frac{dx_s}{dt} &= r_{s1}x_1 + \dots + r_{sm}x_m + X_s + \mu f_s \qquad (s = 1, \dots, m)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Если удовлетворять уравнениям (3.1) рядами

$$x = x^{(1)}(t)\mu + \cdots, \qquad y = y^{(1)}(t)\mu + \cdots, \qquad x_s = x_s^{(1)}(t)\mu + \cdots$$

с периодическими коэффициентами, то для коэффициентов первого приближения получим уравнения

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = -py^{(1)} + f(t, 0, \dots, 0), \qquad \frac{dy^{(1)}}{dt} = px^{(1)} + F(t, 0, \dots, 0) \tag{3.2}$$

$$\frac{dx_s^{(1)}}{dt} = r_{s1}x_1^{(1)} + \dots + r_{sm}x_m^{(1)} + f_s(t, 0, \dots, 0) \qquad (s = 1, \dots, m) \tag{3.3}$$

Так как по предположению характеристическое уравнение системы (3.3) не имеет корней вида $\pm qi$, где q — целое число, то эта система допускает периодическое решение для $x_s^{(1)}$. Что же касается уравнений (3.2), то, как было показано в работе[1] в § 6 n° 1, для того чтобы они допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы обе величины

$$\delta_1 = b_{1p} - a_{2p}, \qquad \delta_2 = a_{1p} + b_{2p} \tag{3.4}$$

---

[1] Резонансным следует также считать и тот случай, когда p мало отличается от целого числа. Но, так же как и в § 6 n° 1 в работе[1], этот случай приводится к предыдущему.

обращались в нуль. Здесь, так же как и в § 6 n° 1, предполагается, что функции $f(t, 0, \ldots, 0)$ и $F(t, 0, \ldots, 0)$ можно представить рядами Фурье (6.3).

Будем предполагать, что хотя бы одна из величин (3.4) отлична от нуля. В этом случае мы будем говорить, так же как и в работе [1], что имеет место *главный резонанс.*

n° 2. При главном резонансе имеет место следующая *теорема: пусть* $2l$ — *младшая степень величины* c *в разложении* (1.12) *периода* T *периодического решения порождающей системы* (1.6) (где $\lambda = p$) *с начальными условиями* $x^\circ(0) = c$, $y^\circ(0) = 0$. *Тогда при главном резонансе существует одно и только одно периодическое решение* $\{x_*, y_*, x_{s*}\}$ *уравнения* (3.1), *для которого функции* x_*, y_*, x_{s*} *обращаются в нуль при* $\mu = 0$, *и эти функции разлагаются в ряды по целым положительным степеням величины*

$$\nu = \mu^\omega \qquad \left(\omega = \frac{1}{2l+1}\right) \tag{3.5}$$

сходящиеся при достаточно малых значениях $|\mu|$.

Доказательство. Рассмотрим порождающую систему (1.6), где теперь $\lambda = p$. На основании сказанного в § 1 n° 2 для этой системы существует периодическое решение, содержащее две произвольные постоянные. Этими постоянными являются начальные значения величин x° и y°. Величины x_s° являются в этом решении аналитическими функциями от x° и y°, определенными (§ 1 n° 2) равенствами $x_s^\circ = w_s(x^\circ, y^\circ)$.

Заменим в уравнениях (3.1) переменные x_s переменными ξ_s при помощи подстановки $x_s = \xi_s + w_s(x, y)$. Как было указано в § 1 n° 2, разложение функций $w_s(x, y)$ начинаются членами не ниже второго порядка, и поэтому линейные члены в уравнениях (3.1) не изменятся. Функции же X, Y, X_s, f, F, f_s заменяются другими функциями аналогичного вида, которые обозначим соответственно через

$$X^*, Y^*, X_s^*, f^*, F^*, f_s^*$$

Таким образом, уравнения (3.1) перейдут в уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -py + X^*(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_m) + \mu f^*(t, x, y, \xi_1, \ldots, \xi_m, \mu) \\
\frac{dy}{dt} &= px + Y^*(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_m) + \mu F^*(t, x, y, \xi_1, \ldots, \xi_m, \mu) \\
\frac{d\xi_s}{dt} &= r_{s1}\xi_1 + \cdots + r_{sm}\xi_m + X_s^*(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_m) + \mu f_s^* \qquad (s = 1, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

а порождающие уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dx^\circ}{dt} &= -py^\circ + X^*(x^\circ, y^\circ, \xi_1^\circ, \ldots, \xi_m^\circ), \\
\frac{dy^\circ}{dt} &= px^\circ + Y^*(x^\circ, y^\circ, \xi_1^\circ, \ldots, \xi_m^\circ) \\
\frac{d\xi_s^\circ}{dt} &= r_{s1}\xi_1^\circ + \cdots + r_{sm}\xi_m^\circ + X_s^*(x^\circ, y^\circ, \xi_1^\circ, \ldots, \xi_m^\circ) \qquad (s = 1, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Сделанное преобразование таково, что задача отыскания периодического решения системы (3.1) эквивалентна той же задаче для системы (3.6). При этом, очевидно, имеем

$$f^*(t, 0, \ldots, 0) = f(t, 0, \ldots, 0), \qquad F^*(t, 0, \ldots, 0) = F(t, 0, \ldots, 0)$$

так что величины (3.4) не изменяются и, следовательно, для системы (3.6) также имеет место главный резонанс.

Периодическое решение первоначальной порождающей системы переходит в периодическое решение порождающей системы (3.7). Последнее, при этом, обладает тем свойством, что для него величины $\xi_s{}^\circ$ равны тождественно нулю. Это непосредственно вытекает из формул преобразования. Следовательно, решение уравнений (3.7) с начальными условиями

$$x^\circ(0) = \alpha, \qquad y^\circ(0) = \beta, \qquad \xi_1{}^\circ(0) = \cdots = \xi_m{}^\circ(0) = 0 \tag{3.8}$$

где α и β произвольные постоянные, будет периодическим. Период решения на основании (1.11) имеет вид

$$T = \frac{2\pi}{p}\{1 + H_{2l}(\alpha^2 + \beta^2)^l + \cdots\} \tag{3.9}$$

где величина $H_{2l} = h_{2l}$, по условию теоремы, отлична от нуля.

Из того, что уравнения (3.7) имеют решение, в котором все $\xi_s{}^\circ$ равны нулю, вытекает также, что

$$X_s{}^*(x, y, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.10}$$

Обозначим через $x(t, \alpha, \beta, \beta_j, \mu)$, $y(t, \alpha, \beta, \beta_j, \mu)$, $\xi_s(t, \alpha, \beta, \beta_j, \mu)$ решение уравнений (3.6) с начальными условиями

$$x(0, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) = \alpha, \qquad y(0, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) = \beta,$$
$$\xi_s(0, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) = \beta_s \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.11}$$

Имеем тождественно

$$\{x(pT, \alpha, \beta, \beta_j, 0)\}_{\beta_j=0} \equiv \alpha, \qquad \{y(pT, \alpha, \beta, \beta_j, 0)\}_{\beta_j=0} \equiv \beta \tag{3.12}$$

В самом деле, рассматриваемое решение при $\mu = 0$ обращается в решение системы (3.7), которое при начальных условиях (3.8) будет периодическим с периодом T, следовательно, также и с периодом pT. Далее, на основании (3.10) имеем

$$\{\xi_s(t, \alpha, \beta, \beta_j, 0)\}_{\beta_j=0} \equiv 0 \tag{3.13}$$

Для того чтобы рассматриваемое решение было периодическим периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$[x] = x(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) - \alpha = 0, \qquad [y] = y(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) - \beta = 0$$
$$[\xi_s] = \xi_s(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) - \beta_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.14}$$

Рассмотрим подробнее эти уравнения. Имеем, выписывая только линейные члены:

$$
\begin{aligned}
&x(t, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\mu + \ldots \\
&y(t, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) = A_2\alpha + B_2\beta + C_2\mu + \ldots \\
&\xi_s(t, \alpha, \beta, \beta_j, \mu) = A_{s1}\beta_1 + \ldots + A_{sm}\beta_m + D_s\mu + \ldots \qquad (s = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Остальные линейные члены, как это легко видеть из уравнений (3.6), обращаются тождественно в нуль.

Величины A_{sk} образуют фундаментальную систему решений уравнений

$$\frac{dA_s}{dt} = r_{s1}A_1 + \cdots + r_{sm}A_m \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

Эта система решений удовлетворяет начальным условиям $A_{sk}(0) = 1$ при $s = k$ и $A_{sk}(0) = 0$ при $s \neq k$.

Поэтому, так же как и в § 2, для функционального определителя D последних m уравнений (3.14) относительно величин $\beta_1, \ldots, \beta_m$ в точке $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = \alpha = \beta = \mu = 0$ находим значение

$$D = (\exp 2\pi\rho_1 - 1)(\exp 2\pi\rho_2 - 1)\ldots(\exp 2\pi\rho_m - 1)$$

где $\rho_1 \ldots, \rho_m$ — корни характеристического уравнения (1.5).

Но все эти корни в силу сделанных выше предположений таковы, что величина D отлична от нуля.

Поэтому последние m уравнений (3.14) разрешимы относительно величин β_j и дают для последних аналитические функции

$$\beta_j = \beta_j^*(\alpha, \beta, \mu) \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

обращающиеся в нуль при $\alpha = \beta = \mu = 0$

Однако, как это вытекает из (3.13), функции β_i^* будут обращаться в нуль при $\mu = 0$ и α и β, отличных нуля, т. е. $\beta_j^*(\alpha, \beta, 0) \equiv 0$.

Подставив полученные значения β_j в первые два уравнения (3.14), будем иметь

$$x(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j^*(\alpha, \beta, \mu), \mu) - \alpha = 0, \qquad y(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j^*(\alpha, \beta, \mu), \mu) - \beta = 0$$

Выделяя члены, не зависящие от μ, и учитывая при этом (3.15), находим

$$
\begin{aligned}
&x(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j^*(\alpha, \beta, 0), 0) - \alpha + \mu\{[C_1] + \Phi_1(\alpha, \beta, \mu)\} = 0 \\
&y(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j^*(\alpha, \beta, 0), 0) - \beta + \mu\{[C_2] + \Phi_2(\alpha, \beta, \mu)\} = 0
\end{aligned}
$$

где Φ_1 и Φ_2 — аналитические функции, обращающиеся в нуль при $\alpha = \beta = \mu = 0$; или, принимая во внимание, что $\beta_i^*(\alpha, \beta, 0) = 0$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\{x(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j, 0)\}_{\beta_j = 0} - \alpha + \mu\{[C_1] + \Phi_1(\alpha, \beta, \mu)\} = 0 \\
&\{y(2\pi, \alpha, \beta, \beta_j, 0)\}_{\beta_j = 0} - \beta + \mu\{[C_2] + \Phi_2(\alpha, \beta, \mu)\} = 0
\end{aligned}
$$

Заменяя в этих уравнениях величину 2π выражением из (3.9)

$$2\pi = pT + h, \qquad h = -2\pi H_{2l}(\alpha^2+\beta^2)^l + \cdots$$

и разлагая в ряд по h, будем иметь

$$\{x(pT,\alpha,\beta,\beta_j,0)\}_{\beta_j=0} + h\left\{\frac{dx(t,\alpha,\beta,\beta_j,0)}{dt}\right\}_{\substack{\beta_j=0\\ t=pT}} + \cdots - \alpha + \mu\{[C_1]+\Phi_1\} = 0$$

$$\{y(Tp,\alpha,\beta,\beta_j,0)\}_{\beta_j=0} + h\left\{\frac{dy(t,\alpha,\beta,\beta_j,0)}{dt}\right\}_{\substack{\beta_j=0\\ t=pT}} + \cdots - \beta + \mu\{[C_1]+\Phi_2\} = 0$$

Учитывая (3.12) периодичность функций $x(t,\alpha,\beta,\beta_j,0)$, а также то обстоятельство, что эти функции удовлетворяют уравнениям (3.7), найдем окончательно, удерживая лишь младшие степени α и β:

$$\begin{aligned} 2\pi pH_{2l}(\alpha^2+\beta^2)^l\beta + \cdots + \mu\{[C_1]+\Phi_1(\alpha,\beta,\mu)\} &= 0 \\ -2\pi pH_{2l}(\alpha^2+\beta^2)^l\alpha + \cdots + \mu\{[C_2]+\Phi_2(\alpha,\beta,\mu)\} &= 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Величины C_1 и C_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dC_1}{dt} = -pC_2 + f(t,0,\ldots,0)$$
$$\frac{dC_2}{dt} = pC_1 + F(t,0,\ldots,0)$$

и начальным условиям $C_1(0) = C_2(0) = 0$. Отсюда на основании (3.4) имеем

$$[C_1] = \delta_2\pi, \qquad [C_2] = -\delta_1\pi$$

Следовательно, хотя бы одна из величин $[C_1]$ и $[C_2]$ отлична от нуля и уравнения (3.17), как это было показано в § 6, допускают одно и только одно решение для α и β, при котором эти величины обращаются в нули при $\mu=0$ и являются аналитическими функциями эргумента ν, который определен (3.5). Но тогда на основании $\beta_j = \beta_j^*(\alpha,\beta,\mu)$ такими же получатся и величины β_j. Подставляя α, β и β_j в (3.15), получим периодическое решение, удовлетворяющее всем условиям теоремы. Таким образом, теорема доказана.

Для действительного вычисления искомого периодического решения нет необходимости производить все проделанные здесь вычисления. В частности, нет необходимости переходить к переменным ξ_s. Проще всего исходить непосредственно из уравнений (3.1) и пытаться удовлетворить их рядами

$$x = x^{(1)}\mu^{\omega} + x^{(2)}\mu^{2\omega} + \ldots, \qquad y = y^{(1)}\mu^{\omega} + y^{(2)}\mu^{2\omega} + \ldots,$$
$$x_s = x_s^{(1)}\mu^{\omega} + x_s^{(2)}\mu^{2\omega} + \ldots \qquad \left(\omega = \frac{1}{2l+1}\right)$$

и в дальнейшем поступать так же, как и в работе[1] § 7.

§ 4. Периодическое решение $\{x^{(l)}(t),\ y^{(l)}(t),\ x_s^{(l)}(t)\}$. **n° 1.** Переходим к рассмотрению периодического решения системы (1.4), обращающегося при $\mu=0$ в порождающее решение $\{x_0^{(l)}(t-\alpha),\ y_0^{(l)}(t-\alpha),\ x_{0s}^{(l)}(t-\alpha)\}$ системы (1.6). Оставляя в стороне вопрос о существовании решения, исследованный нами детально в работе[1] для системы с одной степенью свободы, ограничиваемся здесь изложением способа вычисления этого решения.

Введем обозначения

$$x=x_{m+1},\qquad y=x_{m+2},\qquad f=f_{m+1},\qquad F=f_{m+2}$$

$$-\lambda y+X=F_{m+1}(x_1,\ldots,x_m),\qquad \lambda x+Y=F_{m+2}$$

$$r_{s1}x_1+\ldots+r_{sm}x_m+X_s=F_s\qquad (s=1,\ldots,m)$$

Тогда приведем уравнения (1.4) к виду уравнений (1.1), т. е.

$$\frac{dx_s}{dt}=F_s(x_1,\ldots,x_n)+\mu f_s(t,x_1,\ldots,x_n,\mu)\qquad (s=1,\ldots,m+2=n)\tag{4.1}$$

Попытаемся удовлетворить этим уравнениям рядами

$$x_s=x_{0s}^{(l)}(t-\alpha)+\mu x_{1s}(t-\alpha)+\cdots\tag{4.2}$$

с периодическими коэффициентами. Для этих коэффициентов получим уравнения

$$\frac{dx_{1s}}{dt}=p_{s1}x_{11}+\cdots+p_{sn}x_{1n}+f\,[t,x_{01}^{(l)}(t-\alpha),\ldots,x_{0n}^{(l)}(t-\alpha),0]\tag{4.3}$$

$$\frac{dx_{ks}}{dt}=p_{s1}x_{k1}+\cdots+p_{sn}x_{kn}+f_{ks}\qquad (k=2,3,\ldots)\tag{4.4}$$

Здесь p_{sj} суть периодические функции времени, определяемые соотношениями

$$p_{sj}=\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_j}\right)\tag{4.5}$$

где круглые скобки обозначают, что после дифференцирования все величины x_s заменяются их значениями в порождающем решении, т. е. величинами $x_{0s}^{(l)}(t-\alpha)$. Величины f_{ks} суть целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от $x_0^{(l)}(t-\alpha)$ и от тех x_{ij}, для которых $i<k$, и, следовательно, если последние величины уже вычислены и вышли периодическими, то f_{ks} будут вполне определенными периодическими функциями времени.

Уравнения (4.3) и (4.4) дают возможность последовательно определять коэффициенты рядов (4.2).

n° 2. Определение коэффициентов приводится прежде всего к интегрированию системы однородных линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{d\xi_s}{dt}=p_{s1}\xi_1+\cdots+p_{sn}\xi_n\qquad (s=1,\ldots,n)\tag{4.6}$$

Напомним некоторые основные свойства такого рода уравнений. Пусть $\xi_{s1},\ldots,\xi_{sn}$ — фундаментальная система решений этих уравнений с начальными условиями $\xi_{sj}(0)=1$ при $s=j$ и $\xi_{sj}(0)=0$ при $s\neq j$.

Уравнение

$$\| \xi_{ik}(2\pi) - \delta_{ik}\rho \| = 0 \tag{4.7}$$

называется характеристическим уравнением, соответствующим периоду 2π, системы (4.6). Каждому корню ρ характеристического уравнения соответствует частное решение системы (4.6) вида

$$\xi_1 = u_1(t)\rho^{t/2\pi}, \quad \xi_2 = u_2(t)\rho^{t/2\pi}, \ldots, \quad \xi_n = u_n(t)\rho^{t/2\pi} \tag{4.8}$$

где все u_s суть периодические функции времени с периодом 2π.

Если характеристическое уравнение не имеет кратных корней, то будем иметь n решений вида (4.8) и все эти решения будут независимыми. Если уравнение (4.7) имеет кратные корни, то система (4.6) может иметь решения более общего вида. А именно, кратному корню ρ могут соответствовать решения, для которых функции u_s в (4.8) будут иметь вид:

$$u_s(t) = u_{s0}(t) + tu_{s1}(t) + t^2 u_{s2}(t) + \cdots + t^l u_{sl}(t)$$

где $u_{sj}(t)$ — периодические функции времени.

Если это решение продифференцировать по t, рассматривая при этом функции $u_{sj}(t)$ как постоянные, то получим новое решение. Таким образом, из одного решения с некоторым числом l можно получить $l+1$ независимых решений.

Число l никогда не превосходит числа $\mu-1$, где μ — кратность корня. Если этот корень не обращает в нуль по крайней мере одного из первых миноров левой части уравнения (4.7), то всегда найдется решение, в котором число l достигает своего максимума $\mu-1$. Исходя из этого решения, получим для рассматриваемого корня μ независимых частных решений.

В этом случае будем говорить, что рассматриваемому μ кратному корню отвечает одна группа решений.

Если бы кратный корень обращал в нуль все миноры характеристического определителя до порядка $k-1$ включительно, не обращая в нуль по крайней мере одного из миноров порядка k, то ему соответствовало бы k групп независимых решений, которые можно было бы составить, исходя из известных k решений.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\eta_s}{dt} + p_{1s}\eta_1 + p_{2s}\eta_2 + \cdots + p_{ns}\eta_n = 0 \tag{4.9}$$

сопряженную с (4.6). Если ρ — корень характеристического уравнения исходной системы, имеющий определенную кратность с определенным числом групп решений, то величина $1/\rho$ будет корнем характеристического уравнения сопряженной системы такой же кратности и с таким же числом групп решений.

n° 3. Пусть $x_s^\circ(t-\alpha, c)$ — то, зависящие от двух параметров c и α периодическое решение системы (1.2), которое при $c=c_l$ обращается в рассматриваемое порождающее решение $\{x_{0s}^{(l)}(t-\alpha)\}$. Так же как и в работе[1] § 2, легко убеждаемся, что уравнения (4.6) допускают два частных решения:

$$\xi_s=\frac{dx_{0s}^{(l)}}{dt}=\varphi_s(t-\alpha), \qquad \xi_s=\left\{\frac{dx_s^\circ(t-\alpha, c)}{dc}\right\}_{c=c_n}=N(t-\alpha)\varphi_s+\psi_s$$

Здесь φ_s и ψ_s — определенные периодические функции времени, а N — некоторая постоянная.

На основании сказанного в n° 2, отсюда непосредственно вытекает, что характеристическое уравнение (4.7) системы (4.6) имеет корень, равный единице, по меньшей мере второй кратности. Можно показать, что кратность этого корня не превышает двух.

Итак, характеристическое уравнение (4.7) имеет двойной корень, равный единице. Этому корню отвечает одна группа решений, что непосредственно вытекает из вида этих решений. Но тогда характеристическое уравнение сопряженной системы (4.9) имеет двойной корень, равный единице, которому отвечает одна группа решений. Пусть

$$\eta_s=\varphi_s^*, \qquad \eta_s=t\varphi_s^*+\psi_s^* \tag{4.10}$$

решения этой группы. Здесь φ_s^* и ψ_s^* суть некоторые периодические функции времени.

Заметим, что (4.10) является единственным периодическим решением сопряженной системы (4.9).

Перейдем теперь в уравнениях (4.3) и (4.4) к новым переменным $u_k, v_k, u_{k1}, \ldots, u_{km}$ при помощи подстановки

$$\begin{gathered} u_k=\varphi_1^* x_{k1}+\cdots+\varphi_n^* x_{kn}, \qquad v_k=\psi_1^* x_{k1}+\cdots+\psi_n^* x_{kn} \\ u_{kj}=\varphi_{1j} x_{k1}+\cdots+\varphi_{nj} x_{kn}, \qquad (j=1,\ldots, m=n-2;\ k=1,2,\ldots) \end{gathered} \tag{4.11}$$

Здесь φ_{sj} — некоторые периодические функции времени, выбранные таким образом, чтобы детерминант подстановки (4.11) был отличен от нуля и чтобы однородная часть преобразованных уравнений имела постоянные коэффициенты. Как известно из теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами, такой выбор функций φ_{sj} всегда возможен, для чего, однако, необходимо проинтегрировать систему (4.6).

Учитывая, что величины u_k и tu_k+v_k суть первые интегралы однородной части систем (4.3) и (4.4), после преобразования получим уравнения

$$\begin{gathered} \frac{du_k}{dt}=\sum_{i=1}^n \varphi_i^* f_{ki}, \qquad \frac{dv_k}{dt}=-u_k+\sum_{i=1}^n \psi_i^* f_{ki} \\ \frac{du_{kj}}{dt}=\alpha_{j1}u_{k1}+\cdots+\alpha_{jm}u_{km}+\alpha_j u_k+\beta_j v_k+\bar f_{kj} \quad \begin{pmatrix} j=1,\ldots, m \\ k=1,2,\ldots \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{4.12}$$

Здесь $f_{1i}=f_i$, а $\bar f_{kj}$ суть линейные комбинации с периодическими коэффициентами от функций f_{kj}, а α_{ji} — постоянные. При этом по общему свойству преобразований, переводящих уравнения с периодическими коэффициентами в уравнения с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение системы с постоянными коэффициентами имеет своими корнями величины

$$\frac{1}{2\pi}\log \rho_i$$

где ρ_i — характеристические корни системы с периодическими коэффициентами. Отсюда следует, что уравнение

$$\| \alpha_{ik} - \delta_{ik}\lambda \| = 0 \tag{4.13}$$

не имеет ни нулевых корней, ни корней вида $\pm pi$, где p — целое число, так как уравнение (4.7) имеет только двукратный корень, равный единице (который перешел в двойной нулевой корень характеристического уравнения системы (4.12)).

n° 4. Переходим к интегрированию системы (4.12). Положим сначала $k=1$. Для того чтобы u_1 вышло периодическим, необходимо и достаточно, чтобы свободный член в разложении Фурье выражения

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^* f_i [t, x_{01}^{(l)}(t-\alpha), \ldots, x_{0n}^{(l)}(t-\alpha), 0]$$

обращался в нуль, т. е., чтобы

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^* f_i [t, x_{01}^{(l)}(t-\alpha), \ldots, x_{0n}^{(l)}(t-\alpha), 0]\, dt = 0 \tag{4.14}$$

Уравнение (4.14) определяет неопределенный параметр α в порождающем решении. Выбрав таким образом α, мы получим для u_1 периодическую функцию. Эта функция содержит аддитивно произвольную постоянную, полученную в результате выполнения квадратуры.

Положим эту постоянную равной свободному члену разложения Фурье выражения $\psi_1^* f_1 + \cdots + \psi_n^* f_n$. Тогда для v_1 получим периодическую функцию, причем эта функция также содержит произвольную постоянную.

Подставив выражения u_1 и v_1 в уравнения для u_{1j}, для последних найдем в силу свойств корней уравнения (4.13) единственное периодическое решение.

Точно таким же способом будут определяться периодические решения и для величин u_k, v_k, u_{kj} при $k > 1$. При этом для обращения в нуль выражения

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^* f_{ki}\, dt$$

необходимо воспользоваться оставшейся неопределенной аддитивной постоянной функции v_{k-1}.

n° 5. Для действительного выполнения всех вышеуказанных вычислений необходимо знать общий интеграл системы (4.6). Однако для этой системы мы знаем только два частных решения. Поэтому для систем с несколькими степенями свободы приходится ограничиться только приближенными формулами для коэффициентов рядов (4.2).

Покажем все же, что для главных членов этих рядов, т. е. для $x_{0s}^{(l)}(t-\alpha)$, можно получить точные формулы. Для этого, очевидно, достаточно уметь составлять уравнение (4.14) для α, т. е. знать точные выражения для функций φ_i^*.

Заметим прежде всего, что уравнения (4.6), как это видно из (4.5), представляют собой *систему уравнений в вариациях* для порождающей системы

$$\frac{dx_s^\circ}{dt} = F(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \tag{4.15}$$

если в качестве невозмущенного решения принять $\{x_{0s}^{(l)}(t-\alpha)\}$. Но по основному условию (§ 1 n° 1) для системы (1.15) существует первый интеграл

$$H = x_{n-1}^{\circ 2} + x_n^{\circ 2} + S(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) = \text{const}$$

и поэтому по известному свойству уравнений в вариациях для системы (4.6) существует первый интеграл

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)\xi_1 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)\xi_2 + \cdots + \left(\frac{\partial H}{\partial x_n}\right)\xi_n = \text{const}$$

где скобки обозначают, что после дифференцирования величины x_s заменяются их значениями в невозмущенном решении, т. е. величинами $x_{0s}^{(l)}(t-\alpha)$. Следовательно, сопряженная система (4.9) допускает частное решение $\eta_s = (\partial H / \partial x_s)$.

Но $(\partial H / \partial x_s)$ суть функции периодические, поэтому-то они могут отличаться от функций φ_i^* лишь постоянным множителем, так как система (4.9) допускает только одно периодическое решение.

Таким образом, уравнение (4.14), определяющее α, имеет вид,

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \right\}_{x_j = x_{0j}^{(l)}(t-\alpha)} dt = 0 \tag{4.16}$$

Если $n = 2k$ и система (4.15) имеет каноническую форму

$$\frac{dx_s^\circ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_s^\circ}, \qquad \frac{dy_s^\circ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_s^\circ} \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

то уравнение (4.16) принимает вид:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{k} \Big\{ f_i[t, x_{0j}^{(l)}(t-\alpha), y_{0j}^{(l)}(t-\alpha), 0] \frac{dy_{0i}^{(l)}(t-\alpha)}{dt} - \tag{4.17}$$

$$- f_{i+k}[t, x_{0j}^{(l)}(t-\alpha), y_{0j}^{(l)}(t-\alpha), 0] \frac{dx_{0i}^{(l)}(t-\alpha)}{dt} \Big\} dt = 0$$

Уравнение (4.17) при $k = 1$ совпадает с уравнением, полученным для одной степени свободы.

n° 6. В большинстве случаев для практических целей вполне достаточно знать лишь первый член в рядах (4.2), для которого мы имеем возможность составить точные формулы. Однако часто желательно знать хотя бы еще коэффициенты при μ в первой степени, т. е. величины $x_{1s}(t)$. Для приближенного вычисления этих коэффициентов можно с успехом пользоваться методом Ван-дер-Поля. Покажем прежде всего, как это сделать на простейшем примере.

Рассмотрим простейший случай задачи Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x - \gamma x^3 = \mu a \cos \nu t \qquad (\nu - \text{целое число}) \tag{4.18}$$

Подсчитаем приближенно решение $\{x^{(\nu)}(t)\}$. Полагая

$$x^{(\nu)}(t) = x_0^{(\nu)}(t-\alpha) + \mu x_1^{(\nu)} + \cdots \tag{4.19}$$

будем иметь

$$\frac{d^2x_1^{(\nu)}}{dt^2} + [k^2 - 3\gamma x_0^{(\nu)\,2}(t-\alpha)]\, x_1^{(\nu)} = a \cos \nu t$$

Функция $x_0^{(\nu)}(t-\alpha)$ вычислена нами в работе[1] § 10. Так как правая часть уравнения (4.18) не содержит синусов, то величина α в рассматриваемом случае равна нулю. Имеем

$$x_0^{(\nu)}(t) = c_\nu \cos \nu t + c_\nu^3 \left(\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2} \cos \nu t - \frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2} \cos 3\nu t\right) + \cdots$$

При вычислении $x_1^{(\nu)}$ сохраним только первый член в выражении для $x_0^{(\nu)}$. Тогда для $x_1^{(\nu)}$ получим уравнение

$$\frac{d^2x_1^{(\nu)}}{dt^2} + (k^2 - 2\gamma c_\nu^2 \cos^2 \nu t)\, x_1^{(\nu)} = a \cos \nu t \tag{4.20}$$

Это уравнение интегрируем по методу Ван-дер-Поля. С этой целью положим $x_1^{(\nu)} = A \cos \nu t$.

Так как мы ищем не общий интеграл уравнения (4.20), а частное периодическое решение, то, как известно из теории метода Ван-дер-Поля, величина A будет постоянной, для вычисления которой достаточно приравнять коэффициенты при $\cos \nu t$ в обеих частях уравнения (4.20). Поступая таким образом, будем иметь

$$A = \frac{a}{k^2 - \nu^2 - {}^3/_2\, \gamma c_\nu^2}$$

Если бы вместо уравнения (4.18) рассмотреть более общее уравнение (10.1) работы[1] то при вычислении, например, $x_1^{(p)}$ пришлось бы положить

$$x_1^{(p)} = A_1 \cos pt + A_2 \cos qt + B_1 \sin pt + B_1 \sin qt$$

и дело свелось бы к решению системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

Заметим, что метод Ван-дер-Поля здесь применен не для решения уравнения (4.18), как это обычно делается в теории нелинейных колебаний, а для приближеного вычисления решения уравнения (4.20). Такое видоизменение метода Ван-дер-Поля не только резко упрощает вычисления, но и дает более точные результаты.

В самом деле, при обычном применении метода Ван-дер-Поля для нахождения периодического решения уравнения (4.18) в этом уравнении полагают $x = A\cos\nu t$ и приравнивают коэффициенты при $\cos\nu t$ в обеих частях уравнения. Тогда получается кубическое уравнение

$$\frac{3}{4}\gamma A^3 + (\nu^2 - k^2) A + \mu a = 0 \tag{4.21}$$

Таким путем найдутся три периодических решения, которые соответствуют, как легко видеть, нашим решениям $\{x^{(0)}\}$, $\{x^{(\nu)}\}$ с положительным c_ν и $x^{(\nu)}$ с отрицательным c_ν. Разлагая корни уравнения (4.21) в ряд по μ, будем иметь

$$A = A_0 + \frac{\mu a}{k^2 - \nu^2 - {}^9/_4\,\gamma A_0^2} + \ldots$$

где A_0 — один из трех корней уравнения ${}^3/_4\, A_0^3 + (\nu^2 - k^2) A_0 = 0$.

Отсюда видно, что полученные таким путем выражения для периодических решений отличаются от приведенных выше тем, что взятое нами точное значение для $x_0^{(\nu)}(t)$ заменено его приближенным выражением $A_0 \cos\nu t$. Другими словами, метод Ван-дер-Поля применен здесь для вычисления не только поправки $\mu x_1^{(\nu)}$, как у нас, но и для вычисления ведущего члена $x_0^{(\nu)}$. Вместе с тем неизвестный коэффициент определяется уравнением не первой степени, как у нас, а кубическим. Если применить обычным образом метод Ван-дер-Поля к решению уравнения (10.1) приведенного в работе[1], то пришлось бы положить

$$x = A_1 \cos pt + A_2 \cos qt + B_1 \sin pt + B_2 \sin qt$$

и вместо четырех уравнений первой степени мы получили бы систему четырех уравнений третьей степени и едва ли удалось бы разобраться в полученных таким путем восемьдесят одном решении и получить какие-нибудь пригодные для практики результаты.

Все вышесказанное применимо в равной степени и для общих уравнений, рассматриваемых в этой главе. Вычисление коэффициентов x_{1s} в рядах (4.2) приведется к решению системы линейных уравнений, число которых будет тем меньше, чем меньше число гармоник, которые мы удержим в разложениях функций f_{1s}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Колебания систем с одной степенью свободы, близких к системам Ляпунова. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5. Стр. 561

Поступила в редакцию
4 IV 1948

Уральский государственный
университет